数理解析研究所講究録
第715巻1990年1-21

フォンノイマン部分環の指数に関する還元論

奈良教育大学 河上哲 (Satoshi KAWAKAMI)

目 次

本稿においては、部分環の「有限型包含関係」とその期待値の「指数型微分」という2つの概念について紹介する。前者は、指数有限型及びエントロピー有限型を包括するものであると同時に、Hermann-Ocneanu[HO]の意味で「離散型かつコンパクト型包含関係」に相当する。後者は、指数(V.Jones[J-1], H.Kosaki[Ko])の代替物(粗く言って指数の微分のようなもの)として定義されるが、実は、Pimsner-Popaの考察したエントロピー [PP-1] をも制御している事を報告する。

指数理論においては、$N' \cap M = \mathbb{C}$となるケース (Jonesは「既約」なケースと呼んでいる) の指数 $[M : N]$ が根源的であり、H.Wenzl[We], A.Ocneanu[O], Popa[Po] 等がこのケースについて深い考察を行なっている。本稿では、因子環とは限らない一般のフォンノイマン環からその部分

環の上への期待値の指数とは何か、またそれはどのようにして既約なケースに還元できるかという点を、上記二つの概念を用いて説明する。

1. 準備と定義

本稿においては、Mを可分ヒルベルト空間 H上に作用するフォンノイマン環、Nをそのフォンノイマン部分環とする。この時、M上の正規な半有限忠実な N-値 weights 全体の集合を $P(M,N)$ と表し、更に次の集合を考える。

$$P_1(M,N) = \{E \in P(M,N);\ \sigma_t^E = id\}$$

$$E_1(M,N) = \{E \in P_1(M,N); E(1) = 1\}$$

$$P(M) = P(M,\mathbb{C}),\ P_1(M) = P_1(M,\mathbb{C}),\ E_1(M) = E_1(M,\mathbb{C})$$

A.Connes は Spatial 理論 [C] において、$\varphi \in P(N)$ と $\psi \in P(M')$ に対し、その Spatial 微分 $\Delta(\varphi/\psi)$ を定義し、$\sigma_t^\varphi = \mathrm{Ad}\Delta(\varphi/\psi)^{it}|_M$, $\sigma_t^\psi = \mathrm{Ad}\Delta(\varphi/\psi)^{-it}|_{M'}$ が成立する等、作用する空間に付随した Tomita-Takesaki 理論を展開している。U.Haagerup[Ha] は、weight と期待値の両者を包括するものとして作用素値 weight を考え、$P(M,N)$ と $P(N',M')$ の間には、順序反転同型 $P(M,N) \ni E \longmapsto E^{-1} \in P(N',M')$ がある事を示した。この Haagerup 対応 E^{-1}は、Spatial 微分を用いて、$\Delta((\varphi \circ E)/\psi) = \Delta(\varphi/(\psi \circ E^{-1}))$ ($\varphi \in P(N)$, $\psi \in P(M')$) として特徴付けられる。この E^{-1}の 1 での値 $E^{-1}(1)$ が広い意味で coupling constant に相当する事を見抜き、幸崎 [Ko] は、Jones の指数の一般化に成功した。

一般に、$E \in P(M,N)$ に対し、Eの $N' \cap M$への制限 E^cは、Eの $N' \cap M$ 上の忠実な正規 $Z(M)$-値 weight となるが、残念ながら半有限とは限らない。U.Haagerup は、作用素値 weight に関する理論 [Ha] の中で、E^c が半有限となるケースの解析（同値条件とその性質）を行っている。そのうち、我々の議論で必要となるものを命題として記す。

定理 A. (U.Haagerup[Ha])

もし、ある $E \in P(M,N)$ に対し、E^cが半有限（つまり、$E^c \in P(N' \cap M, Z(M))$ となれば、すべての $E \in P(M,N)$ に対し、E^cは半有限であり、しかも対応 $P(M,N) \ni E \longmapsto E^c \in P(N' \cap M, Z(M))$ は順序同型である。

この定理を用いれば、次は明らかである。

補題 1.1.
フォンノイマン環の組 $M \supset N$ に対し、次は同値。
（1） $E_1(M,N) \neq \phi$ かつ $E_1(N',M') \neq \phi$
（2） ある $E \in E_1(M,N)$ に対し、$(E^{-1})^c \in P_1(N' \cap M, Z(M))$
（3） すべての $E \in E_1(M,N)$ に対し、$(E^{-1})^c \in P_1(N' \cap M, Z(M))$

この補題に述べた同値条件を満たす時、我々は N の M に対する包含関係 $R(M,N)$ が有限型であると呼ぶ事にする。後に記述する様に、指数有限な、もしくはエントロピー有限な（unimodular）期待値が存在する時は、必ず $R(M,N)$ は有限型でなくてはならない。他方、本質的に指数無限のケースを考察している Hermann-Ocneanu[HO] の定義を、我々の立場から解釈すると次の様になる。

$$R(M,N) \text{ が離散型} \iff E_1(M,N) \neq \phi$$
$$R(M,N) \text{ がコンパクト型} \iff E_1(N',M') \neq \phi$$

従って、(有限型) = (離散型)$\wedge$(コンパクト型) という単純図式に合致するので、上の定義は妥当性を保持していると思っている。但し、期待値の unimodular 性（$\sigma_t^E = id$）に考察の対象を限定している点に関しては、議論の余地がある。

さて、以下、$R(M,N)$ を有限型とする。この時、$E \in E_1(M,N)$ と $\tau \in E_1(Z(N))$ に対し、$\tau \circ E^c \in E_1(N' \cap M)$ となる。つまり、$E \in E_1(M,N)$ に対し、必ず、$\tau \circ E^c = \tau$ を満たす $\tau \in E_1(N' \cap M)$ が存在する。更に、この τ に対し、$\tau \circ F^c = \tau$ を満たす $F \in E_1(N',M')$ も唯一つ存在する事が定理 A により保障される。つまり、$N' \cap M$ 上のトレース τ を介し、E と F は canonical に対応している。今、

$$ET(M,N) = \{(E,\tau); E \in E_1(M,N), \tau \in E_1(N' \cap M) \ s.t. \ \tau \circ E^c = \tau\}$$

とおく。ここで $(E,\tau) \in ET(M,N)$ に対し、上記の F を τ に関する E の standard 対応と呼び、以下、E' と表す事にする。また、上述により、対応：$ET((M,N) \ni (E,\tau) \longmapsto E \in E_1(M,N)$ は全射となっている。

結局、$(E,\tau)\in ET(M,N)$ に対し、2つの対応：Haagerup 対応 E^{-1} と standard 対応 E' が $P_1(N',M')$ の元として得られた訳だが、我々はこの微分 dE^{-1}/dE' を E の指数 index$E$ の代替物として考察する。

補題 1.2.

$R(M,N)$ が有限型とする。この時、$(E,\tau)\in ET(M,N)$ に対し、$Z(N'\cap M)$ に affiliate する正定値自己共役作用素 $A(\geq I)$ が、次の互いに同値な条件（の1つ）により定義される。

（1） $A=d(\tau\circ(E^{-1})^c)/d\tau$ on $N'\cap M$

（2） $A=d(\varphi\circ E^{-1})/d(\varphi\circ E')$ for $\varphi\in P(M')$

（3） $[E^{-1}:E']_t=A^{it}$.　但し、$[\ :\ ]$ は Connes cocycle

（4） $E^{-1}(x)=\sup\limits_n E'(a_n^{1/2}xa_n^{1/2})$ $(x\in(N')^+)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ $(a_n\in Z(N'\cap M)^+)$ に対し、$A=\sup\limits_n a_n$

上記の（2つの weight に対する Pedersen-Takesaki 微分を一般化したような）微分 $A=dE^{-1}/dE'$ を $E\in E_1(M,N)$ のトレース τ に関する指数型微分と呼び、$I_\tau^E(M\mid N)$ で表す事にする。$Z(N'\cap M)=\mathbb{C}$ のケースでは、$E_1(M,N)$ は（空集合でなければ）唯一つの期待値 E_0 からなり、$I_\tau^{E_0}(M\mid N)$ はスカラーで（但し、$+\infty$ を含む）、明らかに、$I_\tau^{E_0}(M\mid N)=$ indexE_0 である。この時、この値は $M\supset N$ に対してのみ定まるから、Jones[J-1] の記号を用いて、$[M:N]$ と表す事にする。

2. 基本公式と構造

包含関係の有限型に関する性質とそれに付随した指数型微分の公式等について列挙する。

公式 2-1（同型公式）

フォンノイマン環の組 $M\supset N$ (on H) 以外にもう1つの組 $M_1\supset N_1$ (on K) があり、normal 同型 α により、$\alpha(M)=M_1$ かつ $\alpha(N)=N_1$ であるとする。この時、α は、次の同型 (あるいは対応) を誘導する。

$$\alpha_*:E_1(M,N)\ni E\longmapsto\alpha_*(E)=\alpha\circ E\circ\alpha^{-1}\in E_1(M_1,N_1)$$

$$\alpha:N'\cap M\longrightarrow N_1'\cap M_1$$

$$\overline{\alpha}:\overline{Z(N'\cap M)}^{+}\longrightarrow\overline{Z(N_1'\cap M_1)}^{+}\ \text{s.t.}\ \overline{\alpha}|_{Z(N'\cap M)}=\alpha$$
$$\alpha_*:E_1(N'\cap M)\ni\tau\longmapsto\tau\circ\alpha^{-1}\in E_1(N_1'\cap M_1)$$

以上の状況にある時、

$$R(M,N)\ \text{が有限型}\iff R(M_1,N_1)\ \text{が有限型}$$

であり、この時、$(E,\tau)\in ET(M,N)$ に対し、

$$I^{\alpha_*(E)}_{\alpha_*(\tau)}(M_1\mid N_1)=\overline{\alpha}(I^E_\tau(M\mid N))$$

従って、有限型という包含関係は、作用する空間に依らない事が判る。

公式 2-2（可換子環公式）

フォンノイマン環の組 $M\supset N$ に対し、

$$R(M,N)\ \text{が有限型}\iff R(N',M')\ \text{が有限型}$$

であり、この時、$(E,\tau)\in ET(M,N)$ に対し、

$$I^E_\tau(M\mid N)=I^{E'}_\tau(N'\mid M')$$

公式 2-3（テンサー公式）

２つのフォンノイマン環の組 $M_1\supset N_1$ と $M_2\supset N_2$ に対し、

$$R(M_1\otimes M_2,N_1\otimes N_2)\ \text{が有限型}\iff \begin{array}{l}R(M_1,N_1),R(M_2,N_2)\ \text{が}\\ \text{ともに有限型}\end{array}$$

であり、この時、$(E_i,\tau_i)\in ET(M,N)\quad(i=1,2)$ に対し、

$$I^{E_1\otimes E_2}_{\tau_1\otimes\tau_2}(M_1\otimes M_2\mid N_1\otimes N_2)=I^{E_1}_{\tau_1}(M_1\mid N_1)\otimes I^{E_2}_{\tau_2}(M_2\mid N_2)$$

公式 2-4（チェインルール公式）

フォンノイマン環の組 $M\supset N$ に対し、$Z(N'\cap M)$ の部分環 A を用いて、$L=M\cap A'$ または $L=N\vee A$ とする。この時、$M\supset L\supset N$ で、

$$R(M,N)\ \text{が有限型}\iff R(M,L)\text{、}R(L,N)\ \text{がともに有限型}$$

となる。更にこの時、$(E,\tau) \in ET(M,N)$ に対し、$E = E_2 \circ E_1$ を満たす $E_1 \in E_1(M,L)$ $(\tau \circ E_1^c = \tau)$ と $E_2 \in E_1(L,N)$ $(\tau \circ E_2^c = \tau)$ がそれぞれ唯一つ存在し、

$$I_\tau^E(M \mid N) = I_\tau^{E_1}(M \mid L)\, I_\tau^{E_2}(L \mid N)$$

が成立する。

公式 2-5（還元公式 I）

$M \supset N$ をフォンノイマン環の組とする。$Z(M) \cap Z(N)$ の可換部分環 B に対し、standard 測度空間 (Γ, μ) が存在して、

$$M \cong \int_\Gamma^\oplus M(\gamma) d\mu(\gamma)\ ,\quad N \cong \int_\Gamma^\oplus N(\gamma) d\mu(\gamma)\ ,\quad B \cong L^\infty(\Gamma, \mu)$$

と直積分分解ができる。この時、

$R(M,N)$ が有限型 $\Longleftrightarrow$ ほとんどいたる所の$\gamma \in \Gamma$に対し、$R(M(\gamma), N(\gamma))$ が有限型

更に、$(E,\tau) \in ET(M,N)$ に対しては、測度 μ はトレース τと両立する確率測度にとれ、かつ

$$E \cong \int_\Gamma^\oplus E^\gamma d\mu(\gamma)\ ,\ \tau \cong \int_\Gamma^\oplus \tau^\gamma d\mu(\gamma)$$

と分解でき、

$$I_\tau^E(M \mid N) \cong \int_\Gamma^\oplus I_{\tau^\gamma}^{E^\gamma}(M(\gamma) \mid N(\gamma)) d\mu(\gamma)$$

を得る。

公式 2-6（還元公式 II）

$N' \cap M$ が原子的とする。この時、$Z(M)$ の原子達を $\{e_i\}_{i \in I}$, $Z(N)$ の原子達を $\{f_j\}_{j \in J}$, $Z(N' \cap M)$ の原子達を $\{p_k\}_{k \in K}$と表す。この時、次の (1),(2),(3) は同値。

(1) $R(M,N)$ が有限型

(2) $\forall i \in I,\ \forall j \in J$ に対し、$R(M_{e_i f_j}, N_{e_i f_j})$ が有限型

(3) $\forall k \in K$ に対し、$[M_{p_k} : N_{p_k}] < +\infty$

この時、$(E,\tau) \in ET(M,N)$ に対し、$M_{e_if_j} = M_{ij}, N_{e_if_j} = N_{ij}$ とし、τ_{ij} を $N'_{ij} \cap M_{ij}$ 上の τ の正規化トレース、E_{ij} は $\tau_{ij} \circ E^c_{ij} = \tau_{ij}$ を満たす M_{ij} から N_{ij} の上への期待値とする時、

$$I^E_\tau(M \mid N) = \sum_{i,j} (\tau(e_i)\tau(f_j)/\tau(e_if_j)^2) I^{E_{ij}}_{\tau_{ij}}(M_{ij} \mid N_{ij}) e_i f_j \ .$$

但し、i,j は $e_if_j \neq 0$ 上を走る。更に、Mが因子環で Nがその部分因子環の時は、

$$I^E_\tau(M \mid N) = \sum_{k\in K} ([M_{p_k} : N_{p_k}]/\tau(p_k)^2) p_k \ .$$

構造定理 2.7.

(i) M 又は Nが因子環とする。この時、$R(M,N)$ が有限型である必要十分条件は、$N' \cap M$ が原子的かつ $Z(N' \cap M)$ の任意の原子 p に対し、$[M_p : N_p] < +\infty$ が成立する事である。

(ii) 一般に $R(M,N)$ が有限型の時、$N' \cap M$ は有限型かつ I 型。

3. 指数、エントロピーとの関係

幸崎さんの定義 [Ko] に従い、$E \in E_1(M,N)$ に対し、E の指数を index$E$ $= E^{-1}(1)$ として、$Z(M)$ の extended positive part $\overline{Z(M)}^+$ の元として定義する。また、$M \supset N$ に対し、index$E$ が有界作用素、つまり、index$E \in Z(M)^+$ を満たす $E \in E_1(M,N)$ が存在する時、$R(M,N)$ は指数有限型と呼ぶ事にする。他方、エントロピーに関しては、Pimsner-Popa が有限型フォンノイマン環の組 $M \supset N$ と、$\tau \in E_1(M)$ に対し、その相対エントロピー $H_\tau(M \mid N)$ を古典的な条件付エントロピーの拡張として定義した。その中で彼等は次の重要な結果：指数とエントロピーの関係：を示している。

定理 B. (Pimsner-Popa[PP-1])

$M \supset N$ を II_1型因子環の組で $N' \cap M = \mathbb{C}$ とする。この時、$H_\tau(M \mid N)$ $= \log[M : N]$ 。

他方、我々は、[Ka-Y], [Ka-1] において一般に $H_\tau(M \mid N) < +\infty$ となる $M \supset N$ の構造に関して考察し、$H_\tau(M \mid N)$ の還元論を完成させてい

る。有限型のフォンノイマン環の組 $M \supset N$ に対し、ある $\tau \in E_1(M)$ で $H_\tau(M \mid N) < +\infty$ となる時、$R(M,N)$ はエントロピー有限型と呼ぶ事にする。

次の定理は、形の上では上の定理 B の一般化であるが、他方、指数型微分が指数とエントロピーの両者を制御している事を示している。

定理 3.1.

(a) $M \supset N$ をフォンノイマン環の組とする。$R(M,N)$ が指数有限型であれば、$R(M,N)$ は有限型である。$R(M,N)$ が有限型の時は、$(E,\tau) \in ET(M,N)$ に対し、$\mathrm{index}E = E'(I_\tau^E(M \mid N))$.

(b) $M \supset N$ を II_1型のフォンノイマン環の組とする。$R(M,N)$ がエントロピー有限型であれば、$R(M,N)$ は有限型である。$R(M,N)$ が有限型の時は、$(E,\tau) \in ET(M,N)$ に対し、$H_\tau(M \mid N) = \tau(\log I_\tau^E(M \mid N))$.

ここで、$(E,\tau) \in ET(M,N)$ に対し、

$$K_\tau^E(M \mid N) = \begin{cases} \tau(\log d(\tau \circ E^{-1})/d\tau) & : R(M,N) \text{ が有限型の時} \\ +\infty & : \text{その他} \end{cases}$$

とおく。これは、一般化された operator calculus の意味で、

$$K_\tau^E(M \mid N) = \tau(\log d(\tau \circ E^{-1})/d\tau)$$

と定義するのと同値である。

上の定理 3.1 の主張 (b) は、今の所、内在的な証明を与えた訳ではなく、双方のエントロピーの還元の各ステップにおいて、等式 $H_\tau(M \mid N) = K_\tau^E(M \mid N)$ をチェックして得られたものである。

ここで、前節の各公式に対応して、それぞれ同一の状況、同一の記号の下で、指数 $\mathrm{index}E$ とエントロピー $K_\tau^E(M \mid N)$ に関する公式を列挙しておく。

公式 3-1 (同型公式)

(a) $\mathrm{index}\alpha_*(E) = \overline{\alpha}(\mathrm{index}E)$

(b) $K_{\alpha_*(\tau)}^{\alpha_*(E)}(M_1 \mid N_1) = K_\tau^E(M \mid N)$

公式 3-2（可換子環公式）

(a) $\mathrm{index}E' = E(I_\tau^{E'}(N' \mid M'))$

(b) $K_\tau^E(M \mid N) = K_\tau^{E'}(N' \mid M')$

公式 3-3（テンサー公式）

(a) $\mathrm{index}E_1 \otimes E_2 = \mathrm{index}E_1 \otimes \mathrm{index}E_2$

(b) $K_{\tau_1\otimes\tau_2}^{E_1\otimes E_2}(M_1 \otimes M_2 \mid N_1 \otimes N_2) = K_{\tau_1}^{E_1}(M_1 \mid N_1) + K_{\tau_2}^{E_2}(M_2 \mid N_2)$

公式 3-4（チェインルール公式）

(b) $K_\tau^E(M \mid N) = K_\tau^{E_1}(M \mid L) + K_\tau^{E_2}(L \mid N)$

公式 3-5（還元公式 I）

(a) $\mathrm{index}E \cong \int_\Gamma^\oplus \mathrm{index}E^\gamma d\mu(\gamma)$

(b) $K_\tau^E(M \mid N) \cong \int_\Gamma K_{\tau^\gamma}^{E^\gamma}(M(\gamma) \mid N(\gamma))d\mu(\gamma)$

公式 3-6（還元公式 II）

(a-1) $\mathrm{index}E = \sum_{i,j}((\tau(f_j)/\tau(e_i f_j))\mathrm{index}E_{ij})e_i$

(b-1) $K_\tau^E(M \mid N) = \sum_{i,j}\{(\tau(e_i f_j)K_{\tau_{ij}}^{E_{ij}}(M_{ij} \mid N_{ij}) + 2\eta(\tau(e_i f_j))\}$
$- \sum_i \eta(\tau(e_i)) - \sum_j \eta(\tau(f_j))$

(a-2) $\mathrm{index}E = \sum_k([M_{p_k} : N_{p_k}]/\tau(p_k))$

(b-2) $K_\tau^E(M \mid N) = \sum_k\{(\tau(p_k)\log[M_{p_k} : N_{p_k}] + 2\eta(\tau(p_k))\}$

注意 3.7.

公式 3-6 の (a-2) は、良く知られている local index の公式 [J-1]-Lemma 2.2.2, [Ko]-Theorem4.4 であり、公式 3-6 の (b-2) は、Pimsner-Popa による $H_\tau(M \mid N)$ に関する公式 [PP-1]-Theorem4.4 と同一である。しかも、両者とも公式 2-6 に定理 3.1 を適用して直ちに導かれる。他方、公式 3-6 の (b-1) は、$H_\tau(M \mid N)$ に関する公式 [Ka-1]-Corolary4 と、また、公式 3-5 の (b) は [Ka-Y]-Theorem1.1 における $H_\tau(M \mid N)$ に関する公式と同一である。

4. 還元法

ここでは、任意のフォンノイマン環の組 $M \supset N$ を既約なケースに還元する方法を述べる。

[その1]

$M \supset N$ に対し、$L_1 = M \cap Z(N' \cap M)'$, $L_2 = N \vee Z(N' \cap M)$ をとり、$M \supset L_1 \supset L_2 \supset N$ の方法で還元する。公式2-4をこのケースに適用すると、$R(M,N)$ が有限型であれば、$R(M,L_1)$, $R(L_1,L_2)$, $R(L_2,N)$ も有限型であり、この時、$(E,\tau) \in ET(M,N)$ に対し、期待値 E_i $(i = 1,2,3)$ が

$$M \xrightarrow{E_1} L_1 \xrightarrow{E_2} L_2 \xrightarrow{E_3} N$$

$$E = E_3 \circ E_2 \circ E_1, \quad \tau \circ E_i^c = \tau$$

を満たすようにとれ、更に、

$$(1) \quad I_\tau^E(M \mid N) = I_\tau^{E_1}(M \mid L_1) I_\tau^{E_2}(L_1 \mid L_2) I_\tau^{E_3}(L_2 \mid N)$$

が成立している。ここで、公式2-5を適用すると $I_\tau^{E_1}(M \mid L_1)$ に関しては、$Z(M)$ に対応する $M \supset L_1$ の直積分分解が可能で、その分解に顕われる各成分 $M(\gamma)$ はほとんどすべて因子環であるから、構造定理2.7及び公式2-6を適用して既約のケースに還元できる。$I_\tau^{E_3}(L_2 \mid N)$ に関しても同様である。$I_\tau^{E_2}(L_1 \mid L_2)$ に関しては、$Z(N' \cap M) \cong L^\infty(\Gamma,\mu)$ に対応する直積分分解により、

$$I_\tau^{E_2}(L_1, L_2) \cong \int_\Gamma^\oplus [L_1(\gamma) : L_2(\gamma)] \, d\mu(\gamma)$$

$$Z(L_2(\gamma)' \cap L_1(\gamma)) = \mathbb{C} \quad \text{for } \mu - a.a. \ \gamma \in \Gamma$$

を得る。

以上を、$R(M,N)$ が有限型で $M \supset N$ が因子環の組のケースに観察する。構造定理2.7より、この時、$Z(N' \cap M)$ は原子的となるから、その原子達を $\{p_k\}_{k \in K}$ とすると、

$$(2) \begin{cases} I_\tau^{E_1}(M \mid L_1) &= \displaystyle\sum_{k \in K} \frac{1}{\tau(p_k)} p_k \\ I_\tau^{E_2}(L_1 \mid L_2) &= \displaystyle\sum_{k \in K} [M_{p_k} : N_{p_k}] p_k \\ I_\tau^{E_3}(L_2 \mid N) &= \displaystyle\sum_{k \in K} \frac{1}{\tau(p_k)} p_k \end{cases}$$

となる。従って、(1) により、

$$I_\tau^E(M \mid N) = \sum_{k\in K} \frac{[M_{p_k}: N_{p_k}]}{\tau(p_k)^2} p_k$$

が直ちに導かれる。ここで、再度、公式 2.6, 公式 3.6 を確認するとその実体が浮き上がってくる。尚、蛇足であるが、上の (2) に 3 節の定理 3.1 の (a) を適用すると直ちに次が成立している事も確認しておく。

$$\text{(a)} \begin{cases} \mathrm{index}E_1 &= \mid K \mid \\ \mathrm{index}E_2 &= \sum_{k\in K} [M_{p_k} : N_{p_k}] p_k \\ \mathrm{index}E_3 &= \sum_{k\in K} \frac{1}{\tau(p_k)} p_k \end{cases}$$

ここで、$\mathrm{index}E = E'(I_\tau^{E_1} I_\tau^{E_2} I_\tau^{E_3})$ は成立しているが、

$$\mathrm{index}E \neq \mathrm{index}E_1 \mathrm{index}E_2 \mathrm{index}E_3$$

である事に注意する。他方、定理 3.1 の (b) により、エントロピーに関しては、次が成立する。

$$\text{(b)} \begin{cases} K_\tau^{E_1}(M \mid L_1) &= \sum_{k\in K} \eta(\tau(p_k)) \\ K_\tau^{E_2}(L_1 \mid L_2) &= \sum_{k\in K} \tau(p_k) \log[M_{p_k} : N_{p_k}] p_k \\ K_\tau^{E_3}(L_2 \mid N) &= \sum_{k\in K} \eta(\tau(p_k)) \end{cases}$$

ここでは、$K_\tau^E = K_\tau^{E_1} + K_\tau^{E_2} + K_\tau^{E_3}$ が成立している。

[その 2]

$M \supset N$ に対し、中間の部分環 L を $L = N \vee Z(M)$ にとり、$M \supset L \supset N$ の方法で還元する。$Z(M) \subset Z(L)$, $Z(L) \supset Z(N)$ に注意すると、上の説明と同じ理由で還元できる。この還元方法によって、M が有限型の時、我々は、[Ka-1] において

$$H_\tau(M \mid N) = H_\tau(M \mid L) + H_\tau(L \mid N)$$

が成立することを確認した。他方、Pimsner-Popa のエントロピーに関する還元論 [Ka-Y] を適用する事で、$H_\tau(M \mid L)$, $H_\tau(L \mid N)$ に関しては、M が II_1 型の時は、$K_\tau(M \mid L) = H_\tau(M \mid L)$, $K_\tau(L \mid N) = H_\tau(L \mid N)$ が一般に成立する事が示される。従って、この還元法によって、3 節の定理 3.1 の (b) の証明がはじめて可能となる点注意しておく。しかし、I 型では一般に定理 3.1 の (b) は成立しない。これは、次の原因による。公式 3-6 の (b-2) の典型的なケースでは、

$$(*)\quad Z(N' \cap M) = \mathbb{C} \text{の時、} K_\tau(M \mid N) = \log[M : N]$$

となる。M が II_1型の時には、公式 3.6 の (b-2) も成立するので上の $(*)$ も正しいのだが、Mが I 型の時には、$(*)$ は一般には成立しないからである。M が I 型の時は、$(*)$ の仮定は $M = M(m) \otimes M(n)$, $N = M(m) \otimes \mathbb{C}$ のケースに相当するが、この時、

$$K_\tau(M \mid N) = \log n^2$$

$$H_\tau(M \mid N) = \begin{cases} \log n^2 & (m \geq n \text{ の時}) \\ \log mn & (m < n \text{ の時}) \end{cases}$$

となっている。この事実のみが、一般に I 型で等式 $K_\tau(M \mid N) = H_\tau(M \mid N)$ の成立しない原因である点を付記しておく。従って、I 型のケースでも、多くの場合、(粗く云って、N の非可換部分が $N' \cap M$ の非可換部分より相対的に小さくなる場合を除いて) その等式は成立している。例えば、後述の 6 節の例等を参照して欲しい。

5. チェインルール

フォンノイマン環の組 $M \supset N$の中間部分環 L に対し、いつ、指数型微分のチェインルール：

$$I_\tau^E(M \mid N) = I_\tau^{E_1}(M \mid L) I_\tau^{E_2}(L \mid N)$$

が成立するのかを調べる。これは、有限型フォンノイマン環における Pimsner-Popa のエントロピーに関するチェインルール：

$$H_\tau(M \mid N) = H_\tau(M \mid L) + H_\tau(L \mid N)$$

と深く関係するだけでなく、実は、因子環における日合の最小指数 [Hi] に関するチェインルール：

$$[M:N]_0 = [M:L]_0[L:N]_0$$

とも深く関連している点に注意しておく。なお、Pimsner-Popa の論文 [PP-1] も含め、各種エントロピーの公式を導く折には、それぞれの状況において上記のチェインルールの成立が本質的であった事も注意する。

さて、チェインルールを調べる折、その前提となる仮定の設定が難しい。1つには、我々の考察の対象としてきた期待値の unimodular というカテゴリーを逸脱するか否かという事、2つ目は、

$$R(M,L) \text{ と } R(L,N) \text{ が有限型} \Longleftrightarrow R(M,N) \text{ が有限型}$$

の期待される自然な命題が成立するか否かという両者が、チェインルールの成立に微妙に関係してくるからである。

フォンノイマン環の組 $M \supset L \supset N$ に対し、$E_1 \in E_1(M,L)$, $E_2 \in E_1(L,N)$ をとり、$E = E_2 \circ E_1$ とおくと、E は M から N への期待値であるが $\sigma_t^E = id$ とは限らない。当面、我々は、次を仮定する。

(1) $E_1(M,N)$, $E_1(M,L)$, $E_1(L,N)$ は有限型
(2) $E = E_2 \circ E_1 \in E_1(M,N)$

ここで、$\tau \circ E^c = \tau$ を満たす $\tau \in E_1(N' \cap M)$ を1つとり、固定する。この時、$(E,\tau) \in ET(M,N)$, $(E_1,\tau) \in ET(M,L)$, $(E_2,\tau) \in ET(L,N)$ である。ここで、τ に関する E, E_1, E_2 の standard 対応を E', E_1', E_2' とすると、一般に、$E' = E_1' \circ E_2'$ が成立するとは限らない。また、E_2' は、$N' \cap L$ 上のトレース τ を保存するが、一般に、$N' \cap M$ 上のトレース τ を保存するとは限らない。そこで、$\rho = \tau \circ E_2'$ on $N' \cap M$ とおくと、ρ は $N' \cap M$ 上の state であり、ρ の τ に関する相対エントロピー $\tau(\log(d\tau/d\rho))$ を $S(\rho \mid \tau)$ と表す。

補題 5.1.

以上の状況のもと、一般に次が成立する。

$$I_\tau^E(M \mid N)\left(\frac{d\tau}{d\rho}\right) = I_\tau^{E_1}(M \mid L) I_\tau^{E_2}(L \mid N)$$

$$K_\tau^E(M \mid N) = K_\tau^{E_1}(M \mid L) + K_\tau^{E_2}(L \mid N) - S(\rho \mid \tau)$$

したがって、$\rho = \tau$ となる条件が、チェインルールの成立する同値条件となるから次の定理を得る。

定理 5.2.
以上の状況のもとで、次は同値である。

(1) $I_\tau^E(M \mid N) = I_\tau^{E_1}(M \mid L) I_\tau^{E_2}(L \mid N)$
(2) $K_\tau^E(M \mid N) = K_\tau^{E_1}(M \mid L) + K_\tau^{E_2}(L \mid N)$
(3) $\rho = \tau$ つまり、$N' \cap M$ 上 $\tau \circ E_2' = \tau$
(4) $E' = E_1' \circ E_2'$
(5) $E' = (E'|_{L'}) \circ F$ をみたす $F \in E(N', L')$ が存在する。
(6) ある $\varphi \in P(M')$ で、$\sigma_t^{\varphi \circ E'}(L') = L'$ が成立する。
(7) すべての $\varphi \in P(M')$ で、$\sigma_t^{\varphi \circ E'}(L') = L'$ が成立する。

この定理の (6) により公式 2-4 が得られている事をここで注意しておく。

6. エントロピー再考

エントロピーに関する本 [UO] を参照すると、実にさまざまなエントロピーの概念があるが、本稿と関連する所を整理すると次のようになる。

古典 (可換)		非可換化
① (分割の) 条件付エントロピー	⟶	Connes-Størmer, Pimsner-Popa $H_\tau(M \mid N)$
② (状態の) 相対エントロピー	⟶	荒木, Uhlmann $S(\varphi \mid \psi) = \varphi(\log \frac{d\varphi}{d\psi})$
③ Boltzmann-Gibbs-Shannon のエントロピー	⟶	von Neumann, Segal 梅垣, 大矢 $S_\psi(\varphi) = \varphi(\log \frac{d\psi}{d\varphi})$

ここで、単純なケースでは、$S_\psi(\varphi) = -S(\varphi \mid \psi)$ [③ = − ②] である事も注意されている。本稿に顕われるエントロピー $K_\tau^E(M \mid N)$ は、

$Tr = \tau \circ E^{-1}$ とおくと、

$$K_\tau^E(M \mid N) = \tau\left(\log \frac{dTr}{d\tau}\right) = S_{Tr}(\tau)$$

と表され、形の上では、③のケースに該当するエントロピーという事になる。また、視点を変えると、二つの作用素値 weight E^{-1} と E' の作用素値エントロピー

$$S_{E^{-1}}(E') = E'\left(\log \frac{dE^{-1}}{dE'}\right)$$

の平均（トレース τ による値）が $K_\tau^E(M \mid N)$ であるとも考えられる。いずれにしても、$K_\tau^E(M \mid N)$ は③の一種の拡張である。我々の定理 3.1 の主張は、$H_\tau(M \mid N) = K_\tau^E(M \mid N)$ であった。この主張を古典的なケースに適用すると、「条件付エントロピー」は、非可換の世界で考えると、（具体的には、Haggerup 対応を介すると）ある種の「相対エントロピー」である事を述べており、「エントロピー」というものに対して、一つの新しい統一的な視点を提供するように思われる。この辺の事情を、1つの典型的なケースにおいて少し観察してみる。

$M = \ell^\infty(I)$ （但し I は高々可算の離散集合）とし、その原子達を $\{e_i\}_{i\in I}$ とする。更に、N は M の部分環で、$N \cong \ell^\infty(J)$ でその原子達を $\{f_j\}_{j\in J}$ とする。M 上のトレース τ $(\tau \in E_1(M))$ を一つ固定し、このトレース τ を保つ M から N の上への期待値を E とする。M が空間 $\ell^2(M,\tau)$ に作用しているとする。この時、E の Haagerup 対応 E^{-1} は、$e_i f_j \neq 0$ の時 $E^{-1}(e_i f_j) = f_j$ で与えられ、$Tr = \tau \circ E^{-1}$ は、$e_i f_j \neq 0$ の時 $Tr(e_i f_j) = \tau(f_j)$ により決定される。従って、次が確認できる。

$$I_\tau^E(M \mid N) = \frac{dTr}{d\tau} = \sum_{i,j} \frac{\tau(f_j)}{\tau(e_i f_j)} e_i f_j$$

但し、i,j は $e_if_j \neq 0$ 上を走る。故に、次が観察される。

$$\begin{aligned} K_\tau^E(M \mid N) &= \tau\left(\log \frac{dTr}{d\tau}\right) = \sum_{i,j} \tau(e_if_j) \log \frac{\tau(f_j)}{\tau(e_if_j)} \\ &= \sum_j \tau(f_j) \left[-\sum_i \frac{\tau(e_if_j)}{\tau(f_j)} \log \frac{\tau(e_if_j)}{\tau(f_j)} \right] \\ &= H_\tau(M \mid N) \ \text{：古典的な条件付エントロピー} \end{aligned}$$

更に、$N = \mathbb{C}$ のケースでは、

$$E(e_i) = \tau(e_i),\ E^{-1}(e_i) = 1,\ Tr(e_i) = 1$$

$$I_\tau^E(M \mid N) = \sum_i \frac{1}{\tau(e_i)} e_i = \mathrm{index} E$$

$$K_\tau^E(M \mid N) = \sum_i -\tau(e_i) \log \tau(e_i) = H_\tau(M \mid N)$$

が成立している。

7. 一様有限性

指数が最小となるケース（日合）、エントロピーが最大となるケースは、我々の視点に立つと指数型微分がスカラーとなるケースとして把握できる。したがって、この特別なケースをフォンノイマン環の組 $M \supset N$ の包含関係が（あるいは M から N の上への期待値 E が）一様有限型であると呼ぶ。この概念は、群構造の一様性（ Peter-Weyl の定理等）と両立する。したがって、$N' \cap M = \mathbb{C}$ のケースの解析（その basic construction における Ocneanu[O], Popa[Po] 等の量子化群の考え）や、コンパクト群の群作用の解析（ A.J.Wassermann [Wa] 等の仕事）にも重要な役割を果す事が期待できる。

定義 7.1.

$M \supset N$ を、$R(M,N)$ が有限型のフォンノイマン環の組とする。ここで、$(E,\tau) \in ET(M,N)$ に対し、$I_\tau^E(M \mid N)$ が有限のスカラー作用素となる時 (E,τ) を一様有限型と呼ぶ。特に、$M \supset N$ が有限因子環の組の

時は、その標準トレース τ を保存する期待値 E が一様有限型となる時、$R(M,N)$ が一様有限型と呼ぶ。

定理 7.2.

$M \supset N$ が因子環の組の時、次は同値。

(1) (E,τ) が一様有限型 (i.e. $I_\tau^E(M \mid N) = \lambda$, i.e. $E^{-1} = \lambda E'$)

(2) $E = E_0$, i.e. $\mathrm{index}E = [M:N]_0 = \lambda$: 最小指数

(3) $K_\tau^E(M \mid N) = K_0(M \mid N) = \log\lambda$: 最大エントロピー

(4) $K_\tau^E(M \mid N) = \tau(\log(\mathrm{index}E))$

(5) (E',τ) が一様有限型

系 7.3.

$M \supset N$ が II_1型因子環の組の時、次は同値。

(1) $R(M,N)$ が一様有限型

(2) $[M:N] = [M:N]_0$: 最小指数

(3) $H(M \mid N) = H_0(M \mid N)$: 最大エントロピー

(4) $H(M \mid N) = \tau(\log[M:N])$　但し、τ は M の標準トレース

(5) $\tau' \circ E' = \tau'$　但し、τ' は N' のトレース

(6) $R(N',M')$ が一様有限型

(7) $R(M_1,M)$ が一様有限型。　但し、M_1 は $M \supset N$ からの first basic construction

上の定理及び系は、一部、日合氏による最小指数に関する研究結果 [Hi] と日合氏との討論に基いて得られた。

例 7.4.

有限群 G に対し、$W^*(G)$ を G の正則表現 λ から生成される正則環とする。$B(\ell^2(G))$ 上の普通のトレースを Tr とする時、その正規化トレースを τ $(\tau = (1/\mid G\mid)Tr)$ とする。それぞれのケースで τ を保存する期待値を E とすると、(E,τ) に関し、$R(B(\ell^2(G)),W^*(G))$,　$R(W^*(G),\mathbb{C})$ 等は一様有限型である。一般に、(u,H) を G のユニタリー表現とし、その因子分解を

$$u \cong \sum_{\chi\in\hat{G}}{}^{\oplus} m_\chi u^\chi \quad (m_\chi : \text{重複度})$$

とする時、上述と同様の (E,τ) に関し、$R(B(H),u(G)'')$ が（あるいは $R(u(G)'',\mathbb{C})$ が）一様有限型となる必要十分条件は任意の $m_\chi \neq 0$ を満たす $\chi \in \hat{G}$ に対し、$\dim\chi/m_\chi =$ 定数　が成立する事である。従って上述の結果は、正則表現 λ に関する Peter-Weyl の定理に依っている。尚、以上と同様の事実がコンパクト群のユニタリー表現についても成立している。

例 7.5.

以下で述べる例は自明の例であるが、これを群作用とその不変測度の観点から一般化する事は興味深いと思われる。

有限集合 $X = \{1,2,\cdots,n\}$ 上の確率測度を μ とする。この時、$M = \ell^\infty(X,\mu) \supset N = \mathbb{C}$ のケースにおいて、μ から定まる M のトレースを τ とし、$E = \tau$ で考えると次は同値。

(1) (E,τ) が一様有限型

(2) $\mu(\{1\}) = \mu(\{2\}) = \cdots = \mu(\{n\}) = 1/n$

(3) $H_\tau(M \mid N) = \log n$　（最大エントロピー）

例 7.6.

$N' \cap M = \mathbb{C}$ から定まる basic construction の列

$$N = M_{-1} \supset M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n \supset \cdots$$

において、任意の $i,j \ (i > j)$ に対し、$R(M_i,M_j)$ は一様有限型である事が Pimsner-Popa の Iteration に関する結果 [PP-2] に上の系 7.3 を適用して判明する。

以上の例により、粗く云うと、包含関係の一様 (有限) 性は、群構造及び群作用の一様性を一般化したようなものであるから、既約な包含関係の解析に Ocneanu の考えた paragroup (の一様性) との関連性が出てくると更に興味深いと思われる。

8. 群作用の分類

G を第二可算公理を満たす局所コンパクト群、M を因子環とする。本節では、G の M への作用 α で $R(M,M^\alpha)$ が有限型となる作用達 α の共役

類について考察する。G の M への作用 α に対し、$K(\alpha)=\{k\in K;\alpha_k\in \mathrm{Int}M\}$ とおく。この時、構造定理 2.7 により次が成立する。

補題 8.1.
$R(M,M^\alpha)$ が有限型である必要十分条件は、$G/K(\alpha)$ が有限群でかつ $(M^\alpha)'\cap M$ が原子的かつ有限 I 型の環である事である。

ここで、$\mathrm{Act}_f(G,M)=\{G$ から M への作用 α で $R(M,M^\alpha)$ が有限型となるもの全体$\}$ とおく。この時、Jones [J-2] と同様にして、$\mathrm{Act}_f(G,M)$ の共役類が、その不変量で決定される。以下、その不変量の説明を行なう。$NS_f(G)=\{G$ の正規部分群 K で G/K が有限群となるものの全体$\}$ とおく。また、$K\in NS_f(G)$ に対し、[J-2] と同様に、Borel category で、ある種のコホモロジー群 $\Lambda(G,K)$ が定義される (詳しくは [Ka-2] を参照)。更に、$[\lambda,\mu]\in\Lambda(G,K)$ に対し、$X(\mu)=\{K$上の有限次元既約 μ-表現全体の同値類全体$\}$ とし、G の $X(\mu)$ への作用 $\hat\lambda$ を $(\hat\lambda_g(u))_k=\lambda(g,gkg^{-1})u_{gkg^{-1}}$ ($g\in G,\ k\in K,\ [u]\in X(\mu)$) により定義し、$P(\lambda,\mu)=\{X(\mu)$ 上の $\hat\lambda$-不変確率測度全体$\}$ とおく。そこで、$H^1(K)^G$ の $P(\lambda,\mu)$ への自然な作用 η による同値類全体を $I(\lambda,\mu)$ と表す。

今、$\alpha\in\mathrm{Act}_f(G,M)$ を 1 つとり固定する。この時、補題 8.1 により、まず $K(\alpha)\in NS_f(G)$ が定まる。簡単のため、$K=K(\alpha)$ と書く。ここで、各 $k\in K$ に対し、$\alpha_k=\mathrm{Ad}v_k$ をみたす K の Borel multiplier-表現 ([M] の意味で) v がとれる。その multiplier を μ とする。更に、$(\alpha_g(v_k))_k=\lambda(g,gkg^{-1})v_{gkg^{-1}}$ をみたす $G\times K$ 上の $\mathbf{T}$-値 Borel 関数 λ も定まる。この組 (λ,μ) は、表現 v の取り方に依らず、そして、作用 α の共役類に依らず、$[\lambda,\mu]\in\Lambda(G,K)$ の元として定まる。次に、この表現 v の因子分解 $v\cong\sum_\chi^\oplus v^\chi$ に対応する射影達 $\{f_\chi\}_{\chi\in X(\mu)}$ は、$Z(v(K)'')$ の原子達の集りとして定まる。ここで、M が II_1 型の因子環で、その標準正規化トレースを τ とすると、$\{\tau(f_\chi)\}$ は、$I(\lambda,\mu)$ の元として、作用 α の共役不変量を与える。

以上を総合して、$\alpha\in\mathrm{Act}_f(G,M)$ に対し、G の正規部分群 $K(\alpha)\in NS_f(G)$, α の特性不変量 $\Lambda(\alpha)=[\lambda,\mu]\in\Lambda(G,K(\alpha))$, α の内部的不変量 $\iota(\alpha)=[\{\tau(f_\chi)\}]\in I(\lambda,\mu)$ を、作用 α の共役不変量として定義した。

定理 8.2.

超有限 II_1 型因子環 R に対し、次が成立する。

(1) 上記の共役不変量の三組 $(K(\alpha), \Lambda(\alpha), \iota(\alpha))$ は、$\mathrm{Act}_f(G, R)$ の完全共役不変量である。

(2) $\alpha \in \mathrm{Act}_f(G, R)$ に対し、R の標準トレース τ を保つ R から不動点環 R^α への期待値を E とする。この時、上述の α の完全共役不変量を用いて、次の公式が成立する。

$$I_\tau^E(R \mid R^\alpha) = \sum_\chi \mid G/K(\alpha) \mid \frac{(\dim\chi)^2}{\tau(f_\chi)} f_\chi$$

$$\mathrm{index}E = \mid G/K(\alpha) \mid \sum_\chi (\dim\chi)^2$$

$$H_\tau(R \mid R^\alpha) = \log \mid G/K(\alpha) \mid + \sum_\chi \tau(f_\chi) \log \frac{(\dim\chi)^2}{\tau(f_\chi)}$$

但し、添字 $\chi \in X(\mu)$ は、$\tau(f_\chi) \neq 0$ を走る。

参 考 文 献

[C] Connes, A. : On the spatial theory of von Neumann algebras , J.Funct.Anal., 35(1980), 153-164.

[HO] Herman, R. and Ocneanu, A. : Index theory and Galois theory for infinite index inclusions of factors, Preprint.

[Ha] Haagerup, U. : Operator valued weights in von Neumann algebras, I, II, J.Funct. Anal., 32(1979), 175-206; 33(1979), 339-361.

[Hi] Hiai, F. : Minimizing indices of conditional expectations onto a subfactor, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 24(1988), 673-678.

[J-1] Jones, V. : Index for subfactors, Invent.Math., 72(1983), 1-25.

[J-2] Jones, V. : Actions of finite groups on the hyperfinite type II_1 factor, Memoirs of A.M.S., 237(1980).

[KaY] Kawakami, S. and Yoshida H.: Reduction theory on the relative entropy, Math.Japon., 33(1988), 975-990.

[Ka-1] Kawakami, S. : Reduction theory on the relative entropy II, Bull.Nara Univ. Educ., 38(1989), 1-5.

[Ka-2] Kawakami, S. : Relative entropy of a fixed point algebra, Preprint.

[Ka-3] Kawakami, S. : Some remarks on index and entropy for von Neumann subalgebras, Preprint.

[Ko] Kosaki, H. : Extensions of Jones' theory on index to arbitrary factors, J.Funct. Anal., 66(1986), 123-140.

[M] Mackey, G.W. : Unitary representations of group extensions I, Acta Math. 99 (1958), 265-311.

[O] Ocneanu, A. : Quantized groups, string algebras and Galois theory, Preprint

[PP-1] Pimsner, M. and Popa, S. : Entropy and index for subfactors, Ann.Sci. École Norm.Sup., Sér.4, 19(1986), 57-106.

[PP-2] Pimsner, M. and Popa, S., Iterating the basic construction, Trans. Amer. Math. Soc., 310(1988), 127-133.

[Po] Popa, S. : Classification of subfactors : the finite depth case, Preprint.

[UO] 梅垣壽春＆大矢雅則：確率論的エントロピー，量子論的エントロピー，共立, 1983

[Wa] Wassermann, A.J. : Automorphic actions of compact groups on operator algebras, Ph. D. Dissertation, 1981.

[We] Wenzl, H. : Representations of Hecke algebras and subfactors, Ph. D. Dissertation, 1985.