数理解析研究所講究録
717 巻 1990 年 139-143

単一のパラメタを求めて準最良近似式を得る方法について

電通大　　浜田 穂積 (HAMADA, Hozumi)

1. はじめに

最良近似式に近い式を比較的簡単な方法で求めたい．$f(x)$ を被近似式，$g(x)$ を近似式とする．$g(x)$ は多項式に限らず，連分数，多項式と連分数の 1 段の演算要素を組合せた混合式，有理式にも適用できるものである．式の複雑さの尺度として，求めるべき係数の個数 n を用い，自由度と呼ぶ．多項式の場合 $n-1$ 次式である．

最良近似式の計算は，ごく稀な場合を除いて，繰返し収束計算によるほかない．最良近似の目標として考える誤差を，$g(x)-f(x)$ あるいはそれに適当な重み関数を掛けた関数 $E(x)$ で評価するものとする．計算法の概略は次の通りである．

（i）$E(x)$ が極値をとる x の値 (偏差点)$x_j (j=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ を適切に定める．また n 個の係数 $c_i (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$ を適切に定める (不明の場合すべて 0 とする).

（ii）隣合う偏差点における $E(x)$ の値が，絶対値が等しく符号が逆になるように，係数 c_i を修正するための修正量 Δc_i を計算して係数 c_i を修正する．そして x_j を計算し直す．

（iii）$|E(x_j)|$ のばらつきが大きく，収束したと見なせないときは，（ii）に戻る．

繰返しの回数が少く，計算が能率的に進行するか否かの主要な鍵は，初期近似式と初期偏差点のとり方にかかっている．（i）において，x_j と c_i を適切に定めるといっても，その決定的な方法は知られていないと思われる．容易に考えられる方法は，Chebyshev 補間である．すなわち，近似式の適用区間を $-1\leqq x\leqq 1$ に一次変換したとして，n 次の Chebyshev 多項式が 0 になる x の値で $E(x)=0$ となるように係数 c_i を定め，またその場合の $E(x)$ が極値をとる x の値 x_j を求めるものである．しかし経験によると，これでは近似式の適用区間が広いなど，計算が困難な状況では収束しない場合が多いことも知られている．そこでここでは，Chebyshev 補間を自然な形で拡張し，良い初期近似式を得る方法を見つけたので紹介する．

2. Chebyshev 補間の拡張

この章では，最良近似式 $g(x)$ が計算できたとして考察を行う．

近似式の適用区間を $\sigma-\rho\leqq x\leqq\sigma+\rho$ として，誤差 $E(x)$ が次のように表わせると仮定する．

$$x=\rho\cos\zeta+\sigma \qquad (1)$$

$$E(x)=\varepsilon\cos n\xi \qquad (2)$$

ζ は ξ の関数であり，$(0,\ 0)$ と $(\pi,\ \pi)$ を通り，$0\leqq\xi\leqq\pi$ で $0\leqq\zeta\leqq\pi$ の単調増加関数である．本来の Chebyshev 補間では $\zeta=\xi$ として，(2) で $E(x)=0$ となる ξ すなわち

$$\xi=(j-0.5)\pi/n \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{3}$$

を (1) に適用して，これから得られる x で E(x)＝0 となるように，g(x) を定めるものである．しかしながら偏差点の方に着目しても同様の結果が得られるはずである．

一般には Chebyshev 補間が必ずしも最良近似式を与えないから，$\zeta=\xi$ とは限らない場合を考察する．偏差点番号は，偏差点が

$$\xi=j\pi/n \quad j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{4}$$

のときであることから，この ξ における ζ に対応する x を x_j とする．このとき $\varepsilon=E(x_0)$ と定める ($\varepsilon>0$ とは限らない)．そして区間 $[\sigma-\rho,\ \sigma+\rho]$ を，一つの偏差点から次の偏差点までの n 個の小区間に分割する．これは ξ について

$$[(j-1)\pi/n,\ j\pi/n] \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{5}$$

である (区間の境界が重複するが，気にしなくてよい)．j の小の方から，x については大の方から順にこの小区間毎に，ξ を定めて (2) から E(x)，さらに E(x) から x を定める．次に (1) から ζ を定める．この方法によって ξ と ζ が関係付けられる．この ξ を横軸に，ζ を縦軸にとってプロットしてみると，最良近似式の計算が容易な場合にはほぼ直線的で，困難な場合には弓なりになつている (図 1)．しかしさらに子細に分析すると，ξ と $\zeta-\xi$ の関係がサインカーブの半分のような形をしている (図 2)．そこで

$$\phi=(\zeta-\xi)/\sin\xi \tag{6}$$

とおいて，ξ と ϕ の関係をプロットしてみると (図 3)，ほぼ定数となることが分る．そこで 1 つのパラメタ α を導入して，

$$\phi\sim\alpha \tag{7}$$

さらに，よりあてはめの精度を高めるため，第二のパラメタ β を導入し，

$$\phi\sim\alpha+\beta\cos\xi \tag{8}$$

また第三のパラメタ γ も導入し，

$$\phi\sim\alpha+\beta\cos\xi+\gamma\sin\xi \tag{9}$$

とすると，ますます ξ と ζ の関係を良くあてはめることができることが分った．実例によると

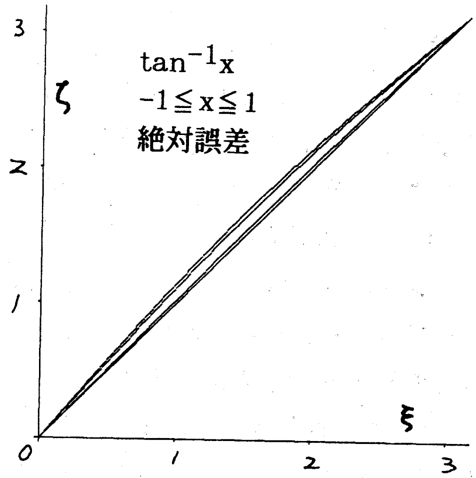

図 1. ξ と ζ

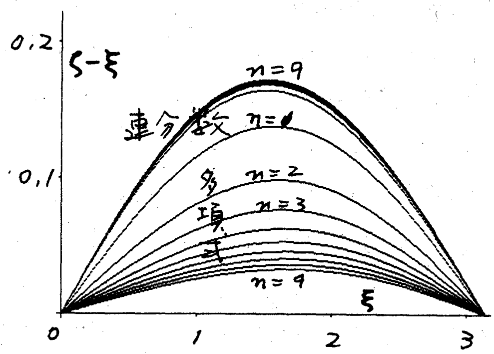

図 2. ξ と $\zeta-\xi$

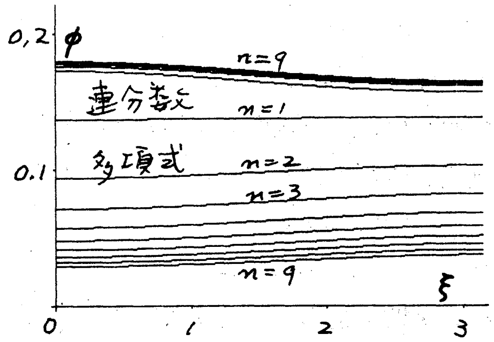

図 3. ξ と ϕ

$|\alpha| \gg |\beta| \gg |\gamma|$ となる．この程度でかなり良い結果が得られるので，フーリエ解析まで持ち出す必要はなかろう．

なお，f(x) が偶関数か奇関数で，近似式の適用区間も原点に対称である場合，その対称性から区間の半分，原点の右側だけで上述の議論が成り立つので，上の (1)，(2)，(7)～(9) の ξ を 2ξ で，ζ を 2ζ で置き換えた式が成立する．また (3)～(5) では n を，E(x) が偶関数の時は 2n に，奇関数の時は 2n+1 に置き換えた式が成立する．なお ξ と ζ はいずれも $[0, \pi/2]$ を考察する．

3．数値例

パラメタ α，β，γ が具体的にどのような値となるかを観察するために，なじみのある関数の内，最良近似式の計算が比較的困難な，$\tan^{-1}x$ を，[-1, 1] で，多項式および連分数の形の近似式を，自由度についてはそれぞれ 1～9 について計算した．計算の精度は IEEE の 64 ビット浮動小数点である．

パラメタ α，β，γ の値は，ϕ と (7)，(8)，(9) のいずれかの右辺について，0 から π までの積分で最小 2 乗近似によって求める．(9) の場合は次の連立方程式を解けば得られる．

$$\pi\alpha + 2\gamma = \int_0^{\pi} \phi \, d\xi \tag{10}$$

$$\frac{\pi}{2}\beta = \int_0^{\pi} \phi \cos\xi \, d\xi \tag{11}$$

$$2\alpha + \frac{\pi}{2}\gamma = \int_0^{\pi} \phi \sin\xi \, d\xi \tag{12}$$

もちろん (7) の場合は，(10) の γ の項のない式であるし，(8) の場合は同じく (10) と (11) である．表 1 に，多項式の相対誤差に関する最良近似式の場合のパラメタの値を示す．ここで添字 3 はパラメタ 3 個の場合のそれである，等であることを示す．これから，被近似関数 f(x) と近似式の適用区間を固定して，自由度 n を変化させた場合の，パラメタ α，β，γ の値は，n の 1 だけの変化ではあまり変化しないことも分る．

次に，これらのパラメタを用いて計算した ζ の値が，どの程度よい推定値であるかを確認するため，最良近似式の計算の初期値として用い，収束の具合いを調べたのが表 2 である．ここに示すのは，連分数の絶対誤差に関する最良近似式計算の過程を示すものであり，それぞれの自由度の場合について，上から下に向って (ii) の繰返しを行うたびの収束の度合を示している．計算は，収束度が 10^{-8} 以下になるまで繰返しを行なった．また最も左の列から順に，それぞれパラメタを 0 個 (純粋の Chebyshev 補間)，1 個，2 個，3 個の場合である．また収束度は，各偏差点における誤差の絶対値のうち最大のものを ε_1，最小のものを ε_0 とするとき，

$$\kappa = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_1 \tag{13}$$

で定義されるものである．この場合，自由度 8 と 9 では，純粋の Chebyshev 補間では収束しないことが分かる．

表 1. パラメタの値（多項式の相対誤差の場合）

自由度	$\alpha_1,\ \alpha_2$	$\beta_2,\ \beta_3$	α_3	γ_3
1	0.090607814	-0.003904114	0.090758721	-0.000237044
2	0.064354992	-0.004905368	0.064684541	-0.000517655
3	0.049942545	-0.004821281	0.050354265	-0.000646729
4	0.040829863	-0.004504426	0.041271188	-0.000693233
5	0.034541107	-0.004155757	0.034986694	-0.000699927
6	0.029936899	-0.003828847	0.030374620	-0.000687570
7	0.026418994	-0.003536308	0.026843188	-0.000666323
8	0.023642828	-0.003278328	0.024051098	-0.000641309
9	0.021395796	-0.003051486	0.021787419	-0.000615160

表 2. 計算されたパラメタによる収束状況（連分数の絶対誤差）

n = 1	n = 6
1.7e-02 1.4e-07 1.9e-09 4.1e-12	4.3e-01 3.7e-04 8.7e-07 3.0e-08
5.7e-06 2.9e-16	2.3e-02 5.8e-09 4.5e-12 2.0e-12
6.7e-13	2.8e-05
n = 2	1.3e-10
6.5e-02 5.6e-05 2.7e-07 9.2e-09	n = 7
3.3e-05 6.7e-11 1.8e-15	5.2e-01 4.6e-04 1.2e-06 3.6e-08
1.1e-11	4.6e-02 9.7e-09 5.4e-12 5.7e-12
n = 3	1.5e-04
1.6e-01 6.6e-05 1.5e-07 3.7e-09	1.4e-09
9.7e-04 9.7e-11 3.0e-15	n = 8
2.3e-08	1.7e+00 5.9e-04 1.6e-06 5.4e-08
1.8e-15	1.4e+00 2.5e-08 1.4e-10 4.5e-11
n = 4	4.1e+00 7.1e-11
2.4e-01 1.3e-04 3.6e-07 1.2e-08	1.2e+01
3.3e-03 9.6e-10 2.7e-14 3.3e-14	n = 9
4.4e-07	2.0e+00 8.0e-04 2.1e-06 2.8e-07
5.9e-14	4.0e+00 4.6e-08 1.4e-10 1.4e-10
n = 5	1.8e+01 3.9e-10
3.2e-01 2.6e-04 6.2e-07 1.6c-08	1.6e+03
1.1e-02 5.0e-09 2.4e-13 4.3e-13	
5.5e-06	
1.7e-12	

表 3. 繰返し回数，計算結果からの α，β と，より正確な α，β（連分数の絶対誤差）

自由度	回数	計算結果からの		より正確な	
		α	β	α	β
1	3	0.137844567	-0.000584393	0.137846784	-0.000668040
2	3	0.164578119	0.007882728	0.164578153	0.007883423
3	2	0.168804018	0.007277793	0.168804018	0.007277794
4	2	0.170404539	0.007325662	0.170404539	0.007325662
5	2	0.171169370	0.007366238	0.171169370	0.007366238
6	2	0.171597566	0.007394509	0.171597566	0.007394509
7	2	0.171862005	0.007413643	0.171862005	0.007413643
8	2	0.172037009	0.007426994	0.172037009	0.007426994
9	2	0.172158619	0.007436389	0.172158619	0.007436389

4. パラメタの値の決定

これまで得られた結果を最良近似式の初期値の決定に利用することを考える．特にパラメタ2個の場合が簡単である．

パラメタの値が，隣接する自由度であまり大幅には異ならないという現実を用いて，一つの自由度の場合に計算された最良近似式の結果からパラメタの値を計算し，これらを自由度の1だけ大の近似式の計算に用いることにする．自由度1の場合から計算を始め，この場合だけはパラメタの値は不明なので，すべて0(純粋のChebyshev補間)とする．

そこで，最良近似式の計算ができた後でのパラメタの値の計算法を述べる．(10)，(11)の積分を台形則で計算することにする．偏差点の x(あるいは ζ) の計算は高精度が得にくいし，端点の ϕ の値も求められない．そこで $E(x)=0$ となる(あるいは ζ) を求めて，中点則によって積分することにする．すなわち，積分の区間を偏差点から次の偏差点まで

$$[(j-1)\pi/n,\ j\pi/n],\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{14}$$

とする．$E(x)=0$ となる x(あるいは ζ) に対する ξ は

$$\xi=(j-0.5)\pi/n,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{15}$$

であるから，中点則を用いることになる．なお，奇関数の絶対誤差に関する最良近似の場合だけは，偏差点から次の偏差点までの区間は

$$[(j-1)\pi/(n+0.5),\ j\pi/(n+0.5)],\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{14$'$}$$

となるので，最後の半欠けの区間 $[\pi n/(n+0.5),\ \pi]$ については，ϕ の $\xi=\pi$ における極限値を0.5倍して加えることにする．幸いなことに ϕ の $\xi=\pi$ における極限値は

$$1+(-1)^n(2n+1)\varepsilon/\{\rho dE(x)/dx|_{x=0}\} \tag{16}$$

であることが簡単に分かり，$dE(x)/dx|_{x=0}$ は，計算された最良近似式の最低次の展開係数から容易に計算できる．

表3に，表2と同じ場合について，この章で述べた計算法による場合の，収束までの繰返しの回数，パラメタ α，β の値，その右に積分の区間をより多くした場合の α，β の値を添えた．これを見ると，0点のみからの計算でかなり良く α，β の値を推測できていることが分かる．

5. おわりに

表題を厳密に解釈すると，パラメタとして α のみを用いることを意味するが，2つ位は用いる方が良さそうである．この程度の簡単な推定でもかなりよい結果を得ることができる．実験に用いた被近似関数は $\tan^{-1}x$ で，近似式を適用する区間は $-1\leqq x\leqq 1$，絶対誤差と相対誤差に関する最良化を行った．完全なChebyshev補間では自由度が大になると収束しないことが多いが，パラメタを1つ用いると収束する．ここで述べたパラメタを用いて，計算しにくい最良近似式を簡単に計算できるようになる．

参考文献

[1] 浜田穂積: 最良近似式計算システム．情報処理学会数値解析研究会資料 6-4(Oct. 1983)