数理解析研究所講究録
717巻 1990年 29-32

ステップ関数，フィルタ関数，デルタ関数の分数式近似

筑波大学電子・情報工学系　池辺　八洲彦

1．まえがき：本稿はY.Ikebe, M. Kowalski & F. Stenger, Rational Approximation of the Step, Filter, and Impulse Functions (to appear)に基づく．この近似法のdigital filterへのimplementionを目下研究中である(analogue filterとしては実現しにくい)．

2．単位ステップ関数の近似

Stenger[1]によると

(1) $$\chi(z)\equiv \frac{1}{1+k}\ \{1+k\cdot \mathrm{sn}[\frac{2K}{\pi i}\log\left(\frac{z-1}{z+1}\right)-K+iK';\ k]\}$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty}\{\frac{r_m}{z-\alpha_m}+\frac{\overline{r_m}}{z-\overline{\alpha_m}}\}$$

は(-1, 1)を[1, 2/(1+k)]上に，(-∞, -1)∪(1, ∞)を[0, (1-k)/(1+k)]上にmapし，$\chi(z)=0(1/z^2)(|z|\to\infty)$である．ただし，

(2)
$$\begin{cases} z=\mathrm{sn}(u;k)\longleftrightarrow u(z)=\displaystyle\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}, \quad 0<k<1, \\ K=K(k)=u(1), \quad K'=K(\sqrt{1-k^2}), \\ \alpha_m=\dfrac{1+iq^m}{1-iq^m},\ r_m=-\dfrac{\pi}{(1+k)K}\dfrac{q^m}{(1-iq^m)^2}, \\ q=\exp(-\pi K'/K) \end{cases}$$

そして k↑1のとき，$\chi(z)$は(-1, 1)の特性関数$\chi^*(z)$に近づく：

(3) $$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\chi(z)-\chi^*(z)|^{p'}dz\right)^{1/p'}\leqq a^{1/p}\cdot b^{1/p'},$$

ここに

$$(4)\quad \begin{cases} 1\leqq p\leqq\infty,\ (1/p)+(1/p')=1, \\ a=(1-k)/(1+k),\ b=4E/(1+k)-2=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|\chi(x)|dx-2, \\ E=\displaystyle\int_0^1\sqrt{(1-k^2t^2)/(1-t^2)}\,dt \end{cases}$$

また，$k\uparrow 1$のとき，

$$K'\to\pi/2,\ K\to\infty$$

だから，$-\pi K'/K=h$とおくと（ゆえに$q=e^{-h}$），
$\chi(z)$と少し異なる式

$$(5)\qquad \tilde{\chi}(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}\{\frac{r_m}{z-\alpha_m}+\frac{\overline{r_m}}{z-\alpha_m}\},$$

ただし

$$(6)\quad \begin{cases} \alpha_m=(1+iq^m)/(1-iq^m), \\ r_m=-(h/\pi)q^m/(1-iq^m)^2 \\ q\ =e^{-h}(\pi/(1+k)K\approx\pi/(2K)\approx(h/\pi)\text{に注意}) \end{cases}$$

が導かれる．(6)を実際に(5)に代入し，変換$z=(1-w)/(1+w)$を行なえば，
$\tilde{\chi}((1-w)/(1+w))\equiv\phi(w)$は単位ステップ関数に似ている筈である．実数値のみで扱えるために$\phi(w)$のodd part $(\phi(w)-\phi(-w))/2$はsgn w，ゆえに
$1/2+\{\phi(w)-\phi(-w)\}/2$はふたたび単位ステップ関数に似てくるであろう．この関数を$H(w)$と呼ぶ．結果的に

$$(7)\qquad H(w)\equiv\frac{1}{2}+\frac{hw}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{kh}}{w^2+e^{2kh}}$$

と定義し，そのtruncated series

(8) $$H_N(w)=\frac{1}{2}+\frac{hw}{\pi}\sum_{k=-N}^{N}\frac{e^{kh}}{w^2+e^{2kh}}\quad,\ N=1,2,\cdots$$

で単位ステップ関数

(9) $$H(w)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}\ w$$

を近似することを考える.

定理1．1　$h>0$, $w\in\mathbb{R}$に対し,

(a) $$|\tilde{H}(w)-H(w)|\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\cosh(n\pi^2/h)}<\frac{2e^{-\pi^2/h}}{1-e^{-\pi^2/h}}\ ;$$

(b) $h=\pi/(N+1)^{1/2}$ のとき,

$$|H_N(w)-\tilde{H}(w)|<\frac{1}{\pi}\left[|w|+2\pi+\frac{1}{|w|}\right]e^{-\pi\sqrt{N+1}}$$

(c) $\varepsilon>0$ とすれば, $(-1/\varepsilon,\ -\varepsilon)\cup(\varepsilon,\ 1/\varepsilon)$上で

$$|H_N(w)-\tilde{H}(w)|<\left(\frac{2a+2\pi}{\pi}\right)e^{-\pi\sqrt{N+1}},$$

ここに

$$a=\frac{1}{2}\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$H_N(w)$のグラフをFig.1に示す.

3. フィルタ関数の近似

$H(w)$, $H_N(w)$中のwを$(1+w)/(1-w)$で置換すると, フィルタ関数$\tilde{\chi}(w)$ (=0, $w<-1$; =1/2, $w=-1$; =1, $-1<w<1$; =1/2, $w=1$; =0, $w>1$)の近似が得られる. $\chi_N(w)$のグラフをFig.2に示す. 誤差解析の詳細は省略する.

4．デルタ関数の近似

$H_N'(w)$（$'$=wに関する微分）でデルタ関数の近似を行う．その様子をFig.3に示す．

5．コメント

$H_N(w)$中のwをiwで置換すると，$H_N(iw)=(1/2)+$ pure imaginary の形となり，このままの形ではアナログ・フィルタとしては実現しにくい．目下，いろいろの実現手段を研究中である．

Reference: [1] F. Stenger, SIAM. J. Num. Anal. 12, 235-254 (1975).

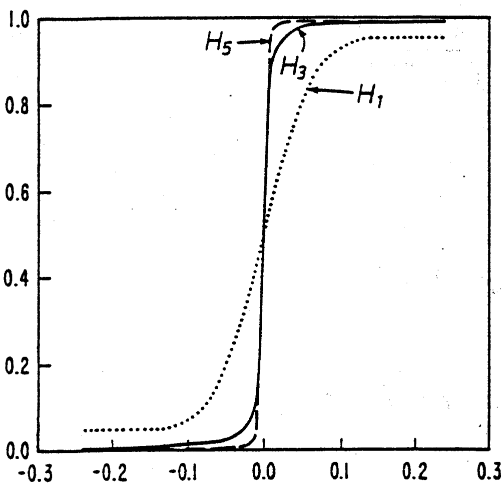

Fig.1. H_N によるステップ関数近似

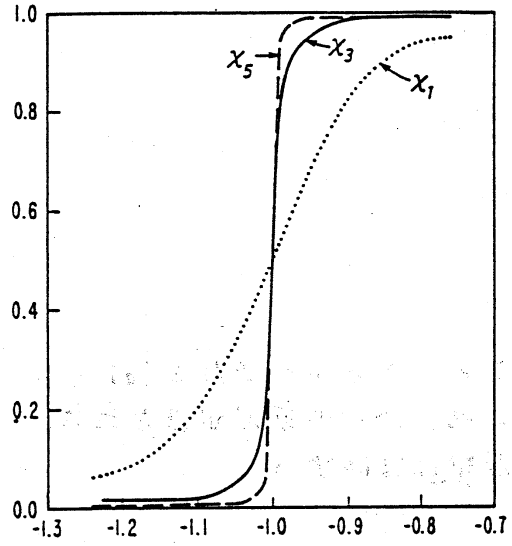

Fig.2. χ_Nによるフィルタ関数近似

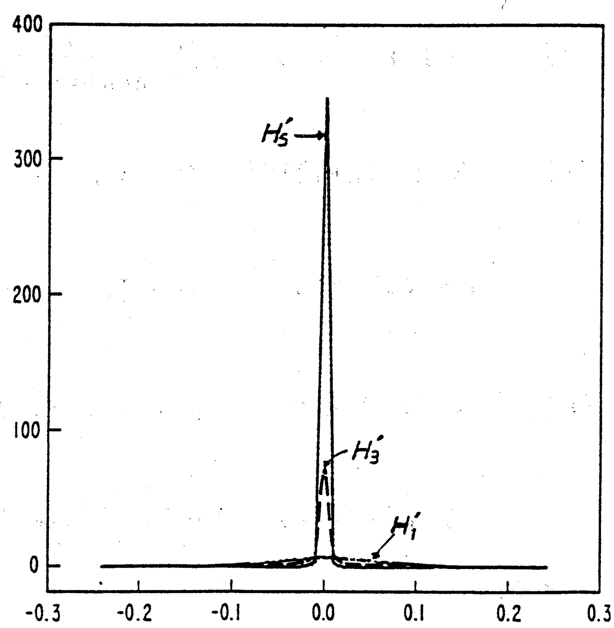

Fig.3. H_N' によるデルタ関数近似