

不変超函数のみたす微分方程式系について

立教大理 落合 啓之 (Hiroyuki Ochiai)

§

V を \mathbb{R} 上の有限次元線型空間、 H を $GL(V)$ の連結閉部分群とする。 V 上の超函数 $u(x)$ が H -不変 であるとは、

$$u(hx) = u(x) \quad (\forall h \in H)$$

のときをいう。 V 上の H -不変な超函数全体を $B^H(V)$ と書く。

$H_1 < H_2 < GL(V)$ を 2 つの連結閉部分群とすると、一般に

$$B^{H_2}(V) \subset B^{H_1}(V)$$

が、成り立つ。

問 $B^{H_2}(V) = B^{H_1}(V)$ が、成り立つか。

例 $V = \mathbb{R}^{2n}$

$$H_2 = SO_0(n, n) = \left\{ h \in GL(V) ; {}^t h \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1_n \end{pmatrix} h = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1_n \end{pmatrix} \right\}.$$

$$H_1 \cong GL^+(n, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \det g \cdot 1_n \end{pmatrix} \in GL(V) ; g \in GL(n, \mathbb{R}), \det g > 0 \right\}.$$

但し $\{ \quad \}$ は単位元連結成分。

上の問は、 H_1 と H_2 が、不変超函数のレベルで近いかどうかを

聞いていることになる。上の例の場合は、 $n=1$ のときは、

$H_1 = H_2$ なので、問題は自明に成立するが、 $n \geq 2$ のときは、
 $\dim H_1 = n^2 \leq 2n^2 - n = \dim H_2$ なので、 $H_1 \subseteq H_2$ である。

ここでは、この問題を微分方程式系の言葉で書いて、
 その定式化でわかることを記す。また、後半では、いくつかの
 例を記すことにする。

§

まず、記号の準備から。

H の Lie 環を \mathfrak{h} と書く。 $Y \in \mathfrak{h}$ に対し、 V 上のベクトル場 L_Y を

$$(L_Y f)(x) = \frac{d}{dt} f(\exp(-tY)x) \Big|_{t=0} \quad (\forall x \in V, \forall f \in C^\infty(V))$$

で定義する。このとき、

$$u \in \mathcal{B}^H(V) \iff L_Y u = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{h}$$

が成り立つ。 V 上の (線型偏) 微分作用素の成す環の層を \mathcal{D} 、

その大域切断を $D = \Gamma(V, \mathcal{D})$ と書く。(代数的カテゴリー

で考える)。 D は階数が $\dim V$ の Weyl 代数になる。 L_Y は自然に D

の元と考えるのでそう思うことにする。さて $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ に対して

$$M = D / \sum_{Y \in \mathfrak{h}} DL_Y$$

と定義し、この \mathfrak{h} 加群 M を H -不変と定義する微分方程式系

と (仮に) いうことにする。このとき、名前の通り、

$$\mathcal{B}^H(V) = \text{Hom}_D(M, \mathcal{B}(V))$$

が成り立つ。

2つの閉部分群 $H_1 < H_2 < GL(V)$ に対しては、Lie環 $\mathfrak{h}_1 < \mathfrak{h}_2$ を経由して、やはり左 D 加群 M_1, M_2 を得る。一般に $\mathfrak{h}_1 < \mathfrak{h}_2$ から、全射準同型 $M_1 \rightarrow M_2$ を得るが、

問 いつ $M_1 = M_2$ が成り立つか。

ということが考えられる。実際、 $M_1 = M_2$ が成り立てば、

$\mathcal{B}^{H_2}(V) = \mathcal{B}^{H_1}(V)$ が成り立つ。さて、

$$M_1 = M_2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{Y \in \mathfrak{h}_1} DL_Y = \sum_{Y \in \mathfrak{h}_2} DL_Y$$

$$\Leftrightarrow L_{Y'} \in \sum_{Y \in \mathfrak{h}_1} DL_Y \quad \forall Y' \in \mathfrak{h}_2$$

であるから

$$[\mathfrak{h}] := \left\{ Y' \in \mathfrak{gl}(V) \ ; \ L_{Y'} \in \sum_{Y \in \mathfrak{h}} DL_Y \right\}$$

と定義すると、

$$M_1 = M_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{h}_2 < [\mathfrak{h}_1]$$

がわかる。(この定義と下の補題の一部は、小林俊行氏による)

補題 ($[\cdot]$ の性質)

(0) $\mathfrak{h} < [\mathfrak{h}]$ であって、 $[\mathfrak{h}]$ は Lie 環。

(1) (単調性) $\mathfrak{h}_1 < \mathfrak{h}_2$ ならば、 $[\mathfrak{h}_1] < [\mathfrak{h}_2]$

(2) (安定性) $[[\mathfrak{h}]] = [\mathfrak{h}]$

(3) (交わり) $\mathfrak{h}_1 = [\mathfrak{h}_1], \mathfrak{h}_2 = [\mathfrak{h}_2]$ ならば、 $[\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2] = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$

(4) $V_{\mathbb{C}}$ を V の複素化とし、 $\mathfrak{gl}(V_{\mathbb{C}})$ の複素部分 Lie 環 \mathfrak{h} について上と同様に定義したものを $[\mathfrak{h}]_{\mathbb{C}}$ と書く。このとき、

$$[f \otimes C]_{\mathbb{C}} = [f] \otimes \mathbb{C} .$$

(5) $V = V_1 \oplus V_2$ とする。[] が $\mathfrak{gl}(V)$ に対し定義されているのを明記するときは $[\cdot]_V$ と書くことにする。

このとき、 $f_1 \in \mathfrak{sl}(V_1)$, $f_2 \in \mathfrak{sl}(V_2)$ ならば、

$$[f_1 \oplus f_2]_V = [f_1]_{V_1} \oplus [f_2]_{V_2}$$

(6) $\theta(Y) = -{}^t Y$ ($Y \in \mathfrak{gl}(V)$) とし、

$\theta f = \{ \theta(Y) ; Y \in f \}$ とおく。このとき、

$f \in \mathfrak{sl}(V)$, $\theta f = f$ ならば $\theta[f] = [f]$.

(7) $[f] = \bigcap \{ f' ; f \text{ を含む } \mathfrak{gl}(V) \text{ の部分空間で, } f' = [f'] \}$.

(8) V の開集合 Ω 上の超函数 u に対して、 $\text{Ann}(u)$ を

$$\text{Ann}(u) := \{ Y \in \mathfrak{gl}(V) ; L_Y u = 0 \}$$

と定義すると、 $[\text{Ann}(u)] = \text{Ann}(u)$.

注 (5), (6) で、 $\mathfrak{sl}(V)$ に入るという仮定をはずすと、一般には不成立。また (8) のように表わせる $f = \text{Ann}(u)$ を、(仮に) 函数による特徴付けをもつという。

(2) の証明 $L : \mathfrak{gl}(V) \rightarrow D$ を展開環 $U(\mathfrak{gl}(V))$ に延ばして、代数準同型 $L : U(\mathfrak{gl}(V)) \rightarrow D$ を得る。 L は単射ではないが、 $\mathfrak{gl}(V)$ は単射に入っているので、 $\mathfrak{gl}(V)$ を D の部分空間と思うことにすると、 $[f]$ は次の定義から、

$$[f] = \left(f \text{ で生成される } D \text{ の左イデアル } \sum_{Y \in f} D L_Y \text{ の } \mathfrak{gl}(V) \text{ での切り口} \right)$$

と思える。このことから (2) $[[f]] = [f]$ が出る //

冒頭の例の場合には、 $f_1 \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, $f_2 = \mathfrak{so}(n, n)$.

① $\begin{cases} n \geq 3 & \text{ならば } [f_1] = f_2 \quad (\text{ゆえに特に } \mathfrak{B}^{\mathbb{H}_2}(V) = \mathfrak{B}^{\mathbb{H}_1}(V)) \\ n = 2 & \text{のときは } [f_1] = f_1 \end{cases}$

である。

② V の座標を $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ ととると、 f_1, f_2 の L による像はそれぞれ

$$f_1 : x_i \partial x_j - y_j \partial y_i \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

$$f_2 : x_i \partial x_j - y_j \partial y_i, x_i \partial y_j - x_j \partial y_i, y_i \partial x_j - y_j \partial x_i \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

で生成される。

③ $n \geq 3$ のとき、 $1 \leq i, j, k \leq n$ が相異なるならば、

$$\begin{aligned} x_i \partial y_j - x_j \partial y_i &= (x_j \partial y_k - x_k \partial y_j)(x_i \partial x_k - y_k \partial y_i) \\ &\quad + (x_k \partial y_i - x_i \partial y_k)(x_j \partial x_k - y_k \partial y_j) \\ &\quad + (x_i \partial y_j - x_j \partial y_i)(x_k \partial x_k - y_k \partial y_k) \end{aligned}$$

であるから、 $[f_1] \subset f_2$ がわかる。逆に $\omega = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

とすると、 $f_2 = \mathfrak{so}(\omega) = \text{Ann}(\omega)$ だから (8) より $[f_2] = f_2$ 。

合わせて $[f_1] = f_2$ 。

④ $n = 2$ のとき、

実は、更に $\mathfrak{B}^{\mathbb{H}_2}(V) \neq \mathfrak{B}^{\mathbb{H}_1}(V)$ であるが、 $=$ については別の(似た)

方法を用いる。まず上と同じく $[f_1] \subset f_2$ は、既知。

さらに (8) で、 $\Omega = \{x_1 \neq 0\}$, $u = \delta(x_1 y_1 + x_2 y_2) \Upsilon(x_1 y_2)$ とすると、

$$(x_1 \partial y_2 - x_2 \partial y_1) u = \delta(y_1) \delta(y_2) \neq 0 \quad \text{で}$$

$\text{Ann } u = \langle f_1, y_1 dx_2 - y_2 dx_1 \rangle$ となるから (6) と合わせて

$[f_1] = f_1$ を得る。 //

注 今の例で、 V の H_2 -, H_1 -軌道分解はそれぞれ、

$$H_2 \begin{cases} \omega^{-1}(t) ; t \in \mathbb{R}^x \\ \{0\} \\ \omega^{-1}(0) - \{0\} \end{cases}, \quad H_1 \begin{cases} \omega^{-1}(t) ; t \in \mathbb{R}^x \\ \{0\} \\ \omega^{-1}(0) - \{x=0 \text{ 又は } y=0\} \\ \{x=0, y \neq 0\} \\ \{x \neq 0, y=0\} \end{cases} \quad (*)$$

(*) $n=2$ のときは、この軌道は、さらに2つの連結成分に分かれる) となっていて、異なる。一般には、軌道分解が一致することと、 $[f_1] = [f_2]$ となることの間には、包含関係はない。

概均質ベクトル空間 $(GL(1) \times GL(n), \square \circ (\Lambda_1 \oplus \Lambda_1^*), V(n) \oplus V(n)^*)$ と、

$(SO(2n), \Lambda_1, V(2n))$ は、相対不変式が等しいので、それから定義される \mathfrak{A} -加群 $\pi_\alpha = \mathfrak{A} / \mathfrak{A} f[\alpha]$ は一致する。 ($\alpha \in \mathbb{C}$)

(但し、 $f[\alpha] = \{P(\alpha); P(s) \in \mathfrak{f}\}$, $\mathfrak{f} = \{P(s) \in \mathfrak{A}[s]; P(s) f(x)^s = 0, s \in \mathbb{C}, x \in V - \mathfrak{S}\}$)

\mathfrak{S} は p.v. の特異集合、 f は相対不変式) (記号は [SKKO])。

一方、 $\pi'_\alpha = \mathfrak{A} / \sum_{A \in \mathfrak{A}} \mathfrak{A} (\langle \text{op}(A)x, D_x \rangle - \alpha \text{tr}(A))$ の方は、 $n \geq 3$

ならば一致し、 $n=2$ ならば、 $\alpha = -2$ の時一致しない、という

ことを左で言っている。 $n \geq 3$ の時も、両者の $V_{\mathbb{C}}$ の軌道分解は

異なり、 $\pi_\alpha = \pi'_\alpha$ となることは、一般論からは出ない。

(なお、 $n=2$ でも $\alpha \neq -2$ ならば、 $\pi_\alpha = \pi'_\alpha$ である)

§

他に $[\cdot]$ の計算をしたものを挙げる。

① $V = \mathbb{R}^n$ $f = \mathfrak{sl}(V)$

このとき、 $[f] = f$ であり、 V の原点のテール関数 δ に
よって $f = \text{Ann}(\delta)$ と書ける。

② $V = \mathbb{R}^n$ $f = \mathfrak{so}(p, n-p)$ $(0 \leq p \leq n)$

このとき $[f] = f$ であり、 f に附随した 2 次形式 ω を
用いて、 $f = \text{Ann}(\omega)$ と書ける。

③ $V = \mathbb{R}^{2n}$ $f = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$

このとき $[f] = \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{R})$

⊙ V の座標を $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ とし、 $f = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} ; \begin{matrix} {}^t B = B \\ {}^t C = C \end{matrix} \right\}$
に対し、p5 の証明と同様に $\begin{pmatrix} 0 & E_{ij} \\ E_{ji} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{R})$ を作る。

$$\begin{cases} x_i^2 \partial x_i = x_i (x_i \partial x_i - y_i \partial y_i) + y_i x_i \partial y_i \\ x_i^2 \partial y_j = x_i (x_i \partial y_j + x_j \partial y_i) - x_j x_i \partial y_i \\ x_i \partial y_j = \frac{1}{2} (\partial x_i \cdot x_i^2 \partial y_j - \partial y_j \cdot x_i^2 \partial x_i) \end{cases}$$

同様に、 $y_i \partial x_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & E_{ji} \\ E_{ij} & 0 \end{pmatrix}$ も作れる。あとは性質(0)より
 $[f] \supset \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{R})$ を得る。一方 $\mathfrak{sl}(2n, \mathbb{R})$ は $[\cdot]$ で安定な
ので、 $[f] = \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{R})$ を得る。 //

④ $V = \mathbb{R}^{nm} = M(n, m; \mathbb{R})$, $f = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$

f の作用は、左からの $SL(n, \mathbb{R})$ のかけざんから来るもの。
このとき $[f] = f$ 。

7

この証明のために.

補題 u を V の開集合 Ω 上定義された超函数で, その台の閉包 $C = \overline{\text{supp}(u)} \subset V$ が, 代数的集合なるものとする.

このとき, $H_1 = \{ h \in GL(V) ; hC = C \}$, \mathfrak{f}_1 を H_1 の Lie 環とすると, $\text{Ann}(u) \subset \mathfrak{f}_1$

証明 $\text{Ann}(u)$ に対応する $GL(V)$ の連結 Lie 部分群を H と書く.

任意の $x \in \text{supp}(u)$ に対して, x の Ω 内の近傍 U と, H の単位元 e の近傍 V を $VU \subset \Omega$ かつ $Vx \subset U$ なるようにとる.

このとき, H の定義から $(h^*u)|_U = u|_U$ (但し $(h^*u)(x) = u(hx)$)

が, $\forall h \in V$ に対し成立する. 故に $hx \in \text{supp}(u) \subset C$. 仮定より $hx \in C$ というのは $h \in H$ に関する代数的関係だから.

$\forall h \in H$ に対して, $hx \in C$ を得る. 故に $h(\text{supp}(u)) \subset C$.

閉包をとって $hC \subset C$. これが $\forall h \in H$ について成り立つから $H \subset H_1$ 即ち $\text{Ann}(u) \subset \mathfrak{f}_1$ //

注 $C = \overline{\text{sing-supp}(u)}$ としてもよい. 」

これを用いて, 元にもとめる. $1 \leq i < j \leq m$ に対して, u として $\{i$ 列めと j 列めが平行} という所に台をもつ, V の開集合上の \mathfrak{f} -不変な超函数 (実は測度) をとる. (存在する). このとき,

$$\mathfrak{f} \subset [\mathfrak{f}] = [\text{Ann}(u)] = \text{Ann}(u) \subset \mathfrak{f}_1$$

i, j を動かした \mathfrak{f} の交わりは $\mathfrak{gl}(n)$ になり, これと $\mathfrak{sl}(V)$ との交わりが \mathfrak{f} なので, $\mathfrak{f} \subset [\mathfrak{f}] \subset \mathfrak{f}$ 即ち $[\mathfrak{f}] = \mathfrak{f}$ を得る //

$$\textcircled{\ast} V = \mathbb{R}^{nm} = M(n, m; \mathbb{R}) \quad f = \text{gl}(n, \mathbb{R})$$

$$\text{このとき} \quad [f] = \begin{cases} f & m \geq n \\ \text{gl}(V) & m < n \end{cases}$$

証明 $m \geq n$ のとき、 V の n 次小行列式は、 f -相対不変式である。このとき、次の補題がある。

補題 f を V 上の実係数多項式で、次の2つをみたすとする。

- 1) f は f -相対不変
- 2) $\{f=0\}$ 上、消える V 上の多項式は、 f で割り切れる。

$$\text{このとき、} \quad [f] \subset f + \text{Ann}(f)$$

証明 f が f -不変のときは $[f] \subset \text{Ann}(f)$ より ok 。

f が f -不変でないときは、 $f_1 := \{Y \in \text{gl}(V); L_Y f = C_Y f, C_Y \in \mathbb{C}\}$ とおくと、 $[f] = f_1 + \text{Ann}(f)$ 。ゆえに $[f] = f_1$ をいえばよい。

$u(x) = Y(f(x))$ とおくと、 $f_1 \subset \text{Ann}(u)$ 。ゆえに、以下。

$\text{Ann}(u) \subset f_1$ をいえばよい。 $\text{Ann}(u)$ に対応する $GL(V)$ の連結 Lie 部分群を H_2 とすると、 $\forall x \in \text{sing supp}(u) = \{y \in V; p(y)=0\}$

に對し $hx \in \text{sing supp}(u) \quad (\forall h \in H_2)$ 。即ち、 $p(hx) = 0$ 。

仮定2) より $p(hx)$ は p で割れて、次数をみれば、 $p(hx) = C_h p(x)$

と、ある $C_h \in \mathbb{C}$ を用いて書けることがわかる。即ち

$$\text{Ann}(u) \subset f_1 \quad //$$

これをを用いると、 $m \geq n$ のとき、 $[f] = f$ がわかる。

一方 $m < n$ のときは少々面倒で、局所化して帰納法を用いる。

補題 $V = M(n, m; \mathbb{R})$, ($n > m$) とする。D の左イデアル I_λ を

$$I_\lambda = \sum_{1 \leq i, j \leq n} D \left(\sum_{k=1}^m x_{ik} d_{jk} + \lambda d_{ij} \right), \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

と定義する。このとき、

(1) $\lambda \notin \{0, 1, \dots, m\}$ ならば、 $I_\lambda = D$

(2) $\lambda = 0$ ならば、 $I_\lambda = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} D d_{ij}$

(3) $\lambda = m$ ならば、 $I_\lambda = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} D x_{ij}$

証明 m に関する帰納法

• $m=1$ のとき、

$$\begin{cases} d_i \cdot x_i d_j - d_j (x_i d_i + \lambda) = (1-\lambda) d_j & (i \neq j) \\ x_j (x_i d_i + \lambda) - x_i \cdot x_j d_i = \lambda x_j \\ d_j x_j - x_j d_j = 1 \end{cases}$$

より ok.

• $m \geq 2$ とする。左 \mathfrak{A} -加群 $\pi_\lambda = \mathfrak{A} \otimes_{\mathbb{D}} \mathbb{P}/I_\lambda = \mathfrak{A}/\mathfrak{A}I_\lambda$ を扱う。

まず開集合 $\{x_{11} \neq 0\}$ で考えることにし、そこで次のような新しい座標系をとる。

$$\begin{cases} \tilde{x}_{11} = x_{11} \\ \tilde{x}_{1i} = x_{1i}/x_{11} & 2 \leq i \leq n \\ \tilde{x}_{ij} = x_{ij}/x_{11} & 2 \leq j \leq m \\ \tilde{x}_{ij} = x_{ij} - x_{1i} x_{1j}/x_{11} & 2 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq m \end{cases}$$

この座標で I_λ の生成元を書くと、

$$\mathcal{D} I_\lambda|_{\{x_{11} \neq 0\}} > \sum_{k=2}^m \mathcal{D} \partial \tilde{x}_{k1} + \sum_{2 \leq i, j \leq n} \mathcal{D} \left(\sum_{k=2}^m \tilde{x}_{ik} \partial \tilde{x}_{jk} + \lambda \delta_{ij} \right).$$

帰納法の仮定より $\lambda \notin \{0, 1, \dots, m-1\}$ ならば、 $\mathcal{D} I_\lambda|_{\{x_{11} \neq 0\}} = \mathcal{D}$

即ち $\text{supp } \mathcal{M}_\lambda < \{x_{11} = 0\}$ となる。対称性より、結局

$\text{supp } \mathcal{M}_\lambda < \{0\}$, $\text{Ch } \mathcal{M}_\lambda < T_{\{0\}}^* V_{\mathbb{C}}$ を得る。(記号は [HK]).

Fourier 変換して $(\mathcal{M}_\lambda)^F = \mathcal{M}_{m-\lambda}$ だから、 $\text{Ch } \mathcal{M}_{m-\lambda} < T_{V_{\mathbb{C}}}^* V_{\mathbb{C}}$

故に $\lambda \notin \{0, 1, \dots, m\}$ ならば $\text{Ch } \mathcal{M}_\lambda < \{(0, 0)\}$ より $\mathcal{M}_\lambda = 0$.

また $\lambda = m$ のときも $\text{Ch } \mathcal{M}_{m-\lambda} < T_{V_{\mathbb{C}}}^* V_{\mathbb{C}}$ より \mathcal{M}_0 は de Rham 系

の直和。しかるに、開集合 $\{x \in V_{\mathbb{C}}; \text{rank } x = n\}$ 上の重複度 1

であるから、 $I_0 = D(\partial)$ 。 I_m はその Fourier 変換で出る。//

上の補題の (2) から、 $[\mathcal{f}] = \text{gl}(V)$ ($m < n$) を得る。//

① $V = M(m, n; \mathbb{R})$ $\mathcal{f} = \text{gl}(m; \mathbb{R}) + \text{gl}(n; \mathbb{R})$

\mathcal{f} の作用は左右からの各々のかけざんからくるもの。

このとき $[\mathcal{f}] = \begin{cases} \mathcal{f} & m=n \\ \text{gl}(V) & m \neq n \end{cases}$

② $m=n$ のとき、相対不変式 $\det x$ ($x \in V$) をもつ。

$m \neq n$ のとき、左から従う。

③ $V = M(m, n; \mathbb{R})$ $\mathcal{f} = \text{sl}(m; \mathbb{R}) + \text{sl}(n; \mathbb{R})$

このとき $[\mathcal{f}] = \begin{cases} \mathcal{f} & m=n \\ \text{sl}(V) & m \neq n \end{cases}$

⊙ $m=n$ のとき、絶対不変式 $\det x$ をもつ。

$m \neq n$ のとき、 $p7$ のようにして示す。 //

他にもいくつかの例はあるが、これでひととおりの方法はできてきたので、止める。

最後に、この問題は rank 1 の半単純対称空間の接空間の不変超関数の一性質に由来している。(cf. 木幡氏)。このことは、集会「群の表現論と特殊関数」に書くつもりです。

[HK] Hotta, R. and M. Kashiwara, The invariant holonomic system on a semisimple Lie algebra, *Invent. Math.*, 75 (1984) 327-358

[SKKO] Sato, M., M. Kashiwara, T. Kimura, and T. Oshima, Micro-local analysis of prehomogeneous vector spaces, *Invent. Math.*, 62 (1980) 117-179