

ある正則概均質ベクトル空間に付随した adelic zeta distributions
について

筑波大学数学系 木村達雄 (Tatsuo Kimura)

筑波大学数学研究科 小本曾岳義 (Takeyoshi Kojiso)

§0: Introduction

k を数体, k_A を k の adèle 環, k_A^\times を k の idele 群とする。このとき, $k^\times = k \setminus \{0\}$ は k_A^\times の離散正規部分群となり, 商群 k_A^\times / k^\times を idele 類群としよう。ここで, $\Omega(k_A^\times / k^\times)$ を k_A^\times / k^\times から \mathbb{C}^\times への連続準同型写像, 即ち, idele 類群上の quasi characters の空間とする。そのとき, ω_A を $\omega_A(x) = |x|_A^s$ for $s \in \mathbb{C}$ と定義すると, ω_A は $\Omega(k_A^\times / k^\times)$ の元となり, $\sigma(\omega)$ を $|\omega(x)|_A = |x|_A^{\sigma(\omega)}$ for $\omega \in \Omega(k_A^\times / k^\times)$ と定義する。さらに, μ を k_A^\times 上の Haar measure とし, $\mathcal{S}(k_A) \subseteq k_A$ 上の Schwartz-Bruhat 空間とする。以上の記号を準備して, 次の話を考える。

$\Phi \in \mathcal{S}(k_A)$ の Fourier 変換 $\hat{\Phi}$ を次の様に定義する。

$$\hat{\Phi}(x) = \int_{k_A} \Phi(y) \psi(xy) d\mu(y)$$

ただし, μ は k_A の不変測度で, ψ は k_A 上の指標で, $\psi(x) = \prod_p \psi_p(x_p)$ for $x = (x_p)_p$ とする。ただし, $\psi_p(x_p)$ は p が有限素点のとき, $x_p = \sum_m C_m p^m$ ($C_m = 0, 1, 2, \dots, p-1$) と書けるが, $\psi_p(x_p) = \exp(2\pi i (-\sum_{m=0}^{\infty} C_m p^m))$ とする。(以下では $\psi(xy) = \langle x, y \rangle$ と k_A と k_A^* の内積とみて, k_A と k_A^* と同一視する)

このとき, $\widehat{\psi} \in \mathcal{S}(k_A)$ となり, $\widehat{\psi}(x) = \overline{\psi(-x)}$ となり, 次の関係式が成立する。

$$(PF) : \sum_{\xi \in k} \overline{\psi(\xi)} = \sum_{\xi \in k^*} \widehat{\psi}(\xi) \quad (\text{両辺絶対収束の下で})$$

このとき, Tate 理論 (c.f. [T]) より, 以下のことが言える。

$Z(\omega)(\overline{\psi}) = \int_{k_A^*} \overline{\psi}(x) \omega(x) \mu(x)$ とし $\tau = \tau$ とし, 任意の $\xi \in k^*$ に対し, $\omega(x\xi) = \omega(x)$ より, $Z(\omega)(\overline{\psi})$ は次の様にも書ける。

$Z(\omega)(\overline{\psi}) = \int_{k_A^*/k^*} (\sum_{\xi \in k^*} \overline{\psi}(x\xi)) \omega(x) \mu(x)$ 。ここで, $Z(\omega)(\overline{\psi})$ は, $\sigma(\omega) > 1$ で holomorphic であり, 全 $\Omega(k_A^*/k^*)$ に meromorphic に解析接続される。また, adelic Poisson formula より, 次が成立する。

$$Z(\omega)(\widehat{\psi}) = Z(\omega_1 \omega^{-1})(\overline{\psi}), \quad \text{ここで, } \omega_1 = 1 \text{ 以上。}$$

ここで, k_A^* を $G = GL_1$ の adèle 化, 即ち $G_A = k_A^*$ とみなし, 今までの事を既約正則概均質ベクトル空間上に拡張するのが本章理論である。 $V = A^m$ とし, (G, ρ, V) を数体 k 上で定義された既約正則概均質ベクトル空間, f を固定されたその基本相対不変式とし, $\deg f = m$ とするとき, $Z(\omega)(\overline{\psi})$ は, 次の 2通りに拡張される。(c.f. [I])

Case 1 : $\sigma(\omega) > \frac{m}{m}$ のとき, $Z_m(\omega)$ を $Z_m(\omega)(\overline{\psi}) = \int_{Y_A} \overline{\psi}(x) \omega(f(x)) \mu(x)$ と定義する。ここで, $\overline{\psi} \in \mathcal{S}(V_A)$ で, μ は Y_A 上の G_A -不変な測度, Y_A は V_A の中の open G_A -orbits 全体とする。この時, 特に, $V = A^1$, $G = GL_1$, $f(x) = x$ とすると, $Z(\omega)(\overline{\psi}) = \int_{k_A^*} \overline{\psi}(x) \omega(x) \mu(x)$ とはさる。

Case 2 : $Z(\omega)(\overline{\psi}) = \int_{k_A^*/k^*} (\sum_{\xi \in k^*} \overline{\psi}(x\xi)) \omega(x) \mu(x)$ の拡張として。

$Z_A(\omega) = \int_{G_A/G_k} (\sum_{\xi \in Y_k} \overline{\psi}(g\xi)) \omega(\chi(g)) dg$ と考へる。ここで, dg は。

G_A 上の Haar measure である。また、有理指標 χ は、 $f(g\chi) = \chi(g)f(\chi)$ とみたす χ のとする。この時、特に、 $\chi = A\chi'$, $G = GL_1$, $f(\chi) = \chi$ の場合、 $Z(\omega)(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}^A/\mathbb{R}^\times} (\sum_{\xi \in \mathbb{R}^\times} \chi(\xi)) \omega(\xi) \mu(\xi)$ となる。

Z_m は Euler 積と見られ、その Euler 積の Euler factors のほとんど全てが、Igusa local zeta であり、また、 Z_a は Siegel-Weil-formula で定義された automorphic form の Mellin 変換とみなせることから、 $Z_a(\omega)$ と $Z_m(\omega)$ の間の関係と調べることは自然である。以下では、[I] 中の Main theorem に関するある注意と、[I] で扱われていない、既約ではない、あるタイプの概自覚ベクトル空間について、 Z_a と Z_m の関係を調べたい。

§1: 井草の定理 (c.f. [I]) の紹介

§0 で用意した P.V. (G.P.V) について、次の2つの条件を考える。

(F): $|G_A \backslash Y_A| < \infty$, 即ち、 Y_A が有限個の G_A -orbits に分かれる。

(HW): \mathfrak{o}_L (G.P.V) が、 \mathbb{R} 上 $(P(G_0 \times GL_d), M_d)$ ([I] の type (1)) と同値ならば、 $G_0 = SL_d$ 。ここで、 G_0 は SL_d の単位元を含む連結成分とする。

このとき、次の定理が成立する。

定理 (井草) (c.f. [I])

\mathbb{k} を数体、(G.P.V) を固定された1つの基本相対不変式 $f(\chi) \in \mathbb{k}[V]$ をもつ、 \mathbb{k} 上定義された既約正則概自覚ベクトル空間とし、(F), (HW) をみたすとする。このとき、 $\xi \in Y_{\mathbb{k}}$ の isotropy 群 G_{ξ} は、

Connected semisimple であり, Tamagawa number $\tau(G_i)$ は ξ_i に よる (1)。また,
 $Z_A(\omega) = \tau(G_i) Z_m(\omega)$ が 成 立 する。

[証明の アウトライン]

次の 3 つ の 条件 を 考 える。

- (C1): 任意の Y_A の 中 の G_A -orbit は Y_R と 交 わる。
 (C2): $G_A \xi_1 = G_A \xi_2, \xi_1, \xi_2 \in Y_R \implies G_R \xi_1 = G_R \xi_2$
 (C3): ξ の Tamagawa number $\tau(G_i)$ は, $\xi \in Y_R$ の と 同 じ に よ る (1)。

この (C1), (C2), (C3) が 成 立 する とき, (C1) より, $|G_A \backslash Y_A| \leq |G_R \backslash Y_R|$, (C2) より, $\lambda = |G_A \backslash Y_A| \geq |G_R \backslash Y_R|$ と な り, 従 っ て, $\lambda = |G_A \backslash Y_A| = |G_R \backslash Y_R|$ と 成 る。

即 ち, (A1): $Y_A = \bigsqcup_{i=1}^l G_A \xi_i$, (A2): $Y_R = \bigsqcup_{i=1}^l G_R \xi_i$ が 成 立 する。 ξ

(2) (C3) より,

$$(1-1): Z_A(\omega)(\Phi) = \sum_{i=1}^l \int_{G_A/G_R} \left(\sum_{\xi \in G_R \xi_i} \Phi(\xi) \right) \omega(\nu(\xi)) \mu_G(\xi)$$

$$\begin{aligned} (1-2): & \int_{G_A/G_R} \left(\sum_{\xi \in G_R \xi_i} \Phi(\xi) \right) \omega(\nu(\xi)) d\mu_G(\xi) \\ &= \int_{G_A/(G_R)_R} \Phi(\xi_i) \omega(f(x)) d\mu_G(\xi) \\ &= \int_{G_A \xi_i} \left\{ \int_{(G_R)_A/(G_R)_R} \Phi(\xi h \xi_i) \omega(\nu(\xi h)) dh \right\} \mu_Y(x) \\ &= \int_{G_A \xi_i} \Phi(x) \omega(f(x)) \left(\int_{(G_R)_A/(G_R)_R} dh \right) \mu_Y(x) \\ &= \tau(G_i) \int_{G_A \xi_i} \Phi(x) \omega(f(x)) \mu_Y(x) \end{aligned}$$

(1-1) を (1-2) に 代 入 (7, $\tau(G_i)$ が ξ_i に よ る (1) に よ り), $\tau(G_i) = \tau$

と お く。 此 の と き,

$$Z_A(\omega)(\Phi) = \sum_{i=1}^l \tau(G_i) \int_{G_A \xi_i} \Phi(x) \omega(f(x)) \mu_Y(x) = \tau \int_{Y_A} \Phi(x) \omega(f(x)) \mu_Y(x)$$

$= \tau Z_n(\omega)(\bar{\pi})$ となる。それゆえ、 G_3 の連結性と、(C1), (C2), (C3) と (F), (HW) を使った証明は"よし"。

①: G_3 の連結性に ついて

これは次の lemma (in [I]) によりわかる。

Lemma

k を数体とし、 (G, ρ, V) を k 上 定義された 相対不変式 $\rho(x)$ をもつ、 $P.V.$ で条件 (F) をみたすものとする。このとき、Simply connected covering $\pi: H \longrightarrow \mathcal{D}(G)$ で、次の性質をもつものが存在する。 H_3 は、Connected simply connected で、 $\tau(H_3) = G_3$ をみたす。

(この Lemma の証明は、略す。[I] では、P.5, P.6 の 9-types と Case by Case でチェックして証明していることに注意してください。)

② (C1) と (F) を使った、 G_3 の連結性の証明

(F) により、 k の places 全体 Σ について、 Σ の有限部分集合 S が存在して、任意の $V \in S$ について、 G_V は Υ_V に transitive に作用する。--- (a)

このとき、elementary approximation theorem より、 $\forall \chi = (\chi_V) \in \Upsilon_A$ について、 $\exists \xi \in V_k$ s.t. $\forall \varepsilon > 0, |\chi_V - \xi| < \varepsilon$ for all $V \in S$ となる。

実は、 $\xi \in \Upsilon_k$ である。何故なら、 $\forall V \in S$ について、

$$\begin{array}{ccccc} G_V \cdot \chi_V & \xrightarrow{\varphi: \text{canonically embedding}} & \Upsilon_A & \xrightarrow{\quad} & V_A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \chi_V & \xrightarrow{\quad} & (1, 1, \dots, 1, \chi_V, 1, \dots, 1) = \bar{\chi}_V & & (1, 1, \dots, 1, \xi, 1, \dots, 1) = \bar{\xi} \end{array}$$

が存在して、 $\bar{\chi} = (1, 1, \dots, 1, \chi_V, 1, \dots, 1)$ の ε -近傍 $U_\varepsilon(\bar{\chi}_V) \subset \Upsilon_A$ は $\bar{\xi}$ を

含むから、 $\varphi^{-1}(U_\varepsilon(\bar{\chi}_V)) \ni \xi$ となり、 $\xi \in G_V \chi_V \cap \Upsilon_k$... (b) となる。

次に, $\xi = f\alpha \in G_A \times \prod Y_k$ であることと主張する。 $\forall v \in S$ ならば, \mathbb{Q} より, $\xi = g_v \alpha_v$ とあり, $\forall v \in S$ ならば, \mathbb{Q} より, G_v は Y_v に transitive に作用し, $Y_v \ni \xi$ より $G_v \cdot \xi = Y_v$ とある。従って, $\xi = g_v \alpha_v$, $\forall v \in S$ とある。即ち, $(\xi, \dots, \xi) = \xi = f\alpha$ for $f \in \prod_{v \in S} G_v$, $\alpha = (\alpha_v) \in Y_A$ 。このとき, $f \in G_A$ とある。

⊙

$1 \rightarrow G_3 \rightarrow G \rightarrow Y = G/\xi \rightarrow 1$ の Galois cohomology をとる。

$$\begin{array}{ccccccc} G_3(\mathbb{F}_p) & \rightarrow & G(\mathbb{F}_p) & \rightarrow & Y(\mathbb{F}_p) & \rightarrow & H^1(\mathbb{F}_p, G_3) \\ \parallel & & \parallel & & & & \parallel \leftarrow \text{Lang's theorem} \\ H^0(\mathbb{F}_p, G_3) & & H^0(\mathbb{F}_p, G) & & & & 1 \end{array}$$

$$\therefore Y(\mathbb{F}_p) = G(\mathbb{F}_p) \cdot \bar{\xi} = G(\mathbb{F}_p) / G_3(\mathbb{F}_p) \quad \dots \dots \quad (\#)$$

この (#) を使って, $f \in G_A$ と証明しよう。

ある有限部分集合 S' が存在して, $\forall v \in S'$ に $\alpha_v, \alpha'_v \in Y_v^\circ, \xi \in Y_v^\circ$ 。

ここで, $Y_v^\circ = G(O_v)\xi \cup G(O_v)\xi' \cup \dots$ とあり,

mod π とすると, $Y(\mathbb{F}_p) = G(\mathbb{F}_p)\bar{\xi} \cup (G(\mathbb{F}_p)\bar{\xi}') \cup \dots$ とある。

(#) より, $Y_v^\circ = G(O_v)\xi$ とある。 $\therefore g_v \in G(O_v)$ の中からとれる。

$\therefore f \in G_A$

③ (F), (HW) を使った (C2) の証明

次の diagram を考える。

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \rightarrow & (G_3)_R & \rightarrow & G_R & \rightarrow & Y_R & \rightarrow & H^1(k, G_3) & \rightarrow & H^1(k, G) \\ & & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ (* *) & & & & & & & & & & & \\ 1 & \rightarrow & (G_3)_A & \rightarrow & G_A & \rightarrow & Y_A & \rightarrow & \prod_{v \in S} H^1(k_v, G_3) & \rightarrow & \prod_{v \in S} H^1(k_v, G) \end{array}$$

$\xi = \xi_1, \xi_2 \in G_A \xi \subset Y_A$ とする。

$$\xi_1 \xrightarrow{\delta'} 1 \in H^1(k_v, G_3), \quad \xi_2 \xrightarrow{\delta'} 1 \in H^1(k_v, G_3) \quad \text{for all } v \in \Sigma$$

また, $(*)$ の可換性より, $\delta\xi_1, \delta\xi_2 \in \alpha_G^{-1}(1)$, しかし, Hasse 原理より, $\alpha_G^{-1}(1) = 1$ となり, $\xi_1, \xi_2 \in G_k$ となる。

④: (F) と (HW) を使った (C3) の証明

[I] の P.S.P.6 の 9-types を Case by Case で check して, 次の diagram を得ることが出来る。

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{D}(G) = [G, G] & \xleftarrow{P} & GL(V) \\ \cup & & \cup & & \cup \\ H_3 & \longrightarrow & G_3 & \longrightarrow & P(G_3) \end{array}$$

ここで, H_3 は Connected semisimple simply connected, このとき, [I] の lemma 3 より, $\tau(H_3) / \tau(P(G_3))$ は ξ による。また, Tamaya-number に関する Weil conjecture より, $\tau(H_3) = 1$ 。

$\therefore \tau(P(G_3))$ は ξ のとりおに よる。

従って, (G, ρ, V) は, (C1), (C2), (C3) を同時にし, $Z_a = \tau Z_m$ なる関係式をみたす。

Q.E.D. //

§2: 井草の定理に対するある注意

§1の中で, (C2), (C3) を証明するのに (F) と (HW) を使ったが, (C1) は (F) と G_3 の連結性だけで証明できた。この事実は, この § で説明することとおおりに関係ある。我々の得た結果として, 次のものがある。

Proposition A

k を数体, (G, P, V) を (F) をみたす, reductive k -regular P.V. とする。このとき
 (A1): $\Upsilon_k = G_k$ (A2): G_k は連結の条件をみたすとき, Z_m は
 4次元. 関係式 $Z_a(\omega) = \tau(G_k) Z_m(\omega)$ が成立する。

⊙ 仮定 (A2) と (F) より, (A1) を得る。また仮定 (A1) と (C1) より,

$$| \leq |G_A \setminus \Upsilon_A| \leq |G_k \setminus \Upsilon_k| = 1 \quad \therefore |G_A \setminus \Upsilon_A| = 1 \text{ となり, } \Upsilon_A = G_A \text{ となる.}$$

このとき, (C2), (C3) は自動的に成立し, 関係式 $Z_a(\omega) = \tau Z_m$ が成立する。 //

この Proposition A の Corollary として次が与えられる。

Corollary b : 井草の定理の中で, 条件 (HW) は不要である。

⊙ [I] の type (1) においては, $\Upsilon_k = GL_d(k) = G_0(k) I_d + GL_d(k) = G_k I_d$
 であり, Proposition A より, 関係式 $Z_a(\omega) = \tau Z_m(\omega)$ が成立する。 //

§3 : [I] で扱われていない P.V. に関する Z_a と Z_m の関係について。

ここで, Universally transitive という概念を導入する。

定義 : k を数体とし, (G, P, V) を k 上定義された P.V. とする。

このとき, (G, P, V) の open orbit Υ が universally transitive とは。

$\rho = |G \setminus \Upsilon| = 1$ for all $V \in \Sigma$ が成り立つことを言う。 //

以下では, [KKH] の Type I が全て, k -rational points Υ_k が 1つの G_k -orbit であることを示す。

I : Non-irreducible simple P.V.s with universally transitive open orbit の場合

Example 1

$G = GL_1 \times GL_m \ni g = (\alpha, A)$, $V = V(m) \oplus V(m)^* \ni x = (x_1, x_2) \in \mathbb{A}^{2m}$.

$\rho(g)x = (Ax_1, \alpha^* A^* x_2)$ とする。このとき, (G, ρ, V) の相対不変式は.

$f(x) = f(x_1, x_2) = \alpha^* x_1 x_2$ とする。 (G, ρ, V) の open orbit $Y = \{f(x_1, x_2) \neq 0\}$

の k -rational point τ の orbit 分解を以下で考える。

generic point $\tau \in Y$, $\xi = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ が τ である, $\forall (x, y) \in Y(k) \Rightarrow$

$(x, y) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right)$ としたとき, $(x, y) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right)$ としたとき,

$x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$ としたとき.

先ず, G_k の作用で, $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right) \mapsto \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{pmatrix} \right)$, $y_1' \neq 0$ となる。

$$\text{さらに, } \left(\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \vdots & * \\ \hline 0 & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right), \quad \alpha \left(\begin{array}{c|c} 1 & \circ \\ \vdots & \\ \hline -\frac{1}{y_1'} & I_{m-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{array} \right) = \alpha \left(\begin{array}{c} y_1' \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right)$$

こゝで, $\alpha = \frac{1}{y_1'}$ とすれば,

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right) \sim_{G_k} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ が得られる.}$$

$\therefore Y_k$ は 1 の G_k -orbit τ である。 //

Example 2

$(GL_1^m \times SL_m, \Lambda_1 \oplus \dots \oplus \Lambda_1)$ は, 次の Example 3 に帰着される。 //

Example 3

$G = GL_1^m \times GL(m) \ni g = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, A)$, $M(m, m+1) \ni X = (x_1, x_2, \dots, x_{m+1})$

に於いて, $p(g)X = (\alpha_1 A x_1, \alpha_2 A x_2, \dots, \alpha_m A x_m, A x_{m+1})$ とする.

この (G, p, V) の基本相対不変式は, $f_i(x) = \det(x_1, x_2, \dots, \check{x}_i, \dots, x_{m+1})$

($i=1, 2, \dots, m+1$) の $m+1$ 個より, (G, p, V) は既約で非1. とこぞで, $[G, G] = SL(m)$

は. Simply connected であり, generic point とし, $\xi = (\underbrace{e_1, e_2, \dots, e_m}_{I_m}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix})$ がとれる.

$M_{m+1}(k) \supset Y(k) \ni \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1})$ をとる. その中の $\det(x_1, \dots, x_m) \neq 0$ なる (x_1, x_2, \dots, x_m) に於いて, $A = (x_1, x_2, \dots, x_m)^{-1}$ とし, $Ax = (I_m | y), y \neq 0$

とできる. こゝで, $y = {}^*(y_1, y_2, \dots, y_m)$ とする. (\odot) $\neq 0$ 且 $y_1 = 0$ ならば, $f_1 = 0$ とは異なる.

同様にし, $y_i \neq 0$ ($2 \leq i \leq m$) とできる. よて, $B = (y_1, y_2, \dots, y_m, \begin{pmatrix} y_1^{-1} \\ \vdots \\ y_m^{-1} \end{pmatrix})$

とおくと, $BAx = (I_m, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}) = \xi$ とあり, $Y_k = G\xi$ となる. //

Example 4

$(GL^3 \times SL_{2m}, \Lambda_2 \otimes \Lambda_1^{(2)} \otimes \Lambda_1^{(2)})$ に於いて, 先づ $(GL_{2m}, \Lambda_2, Alt_{2m})$ の場合

を考へよう. $m=1$ のとき, $\begin{bmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{bmatrix} = X$ に於いて, $p_f(X) = x$,

$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & abx \\ -abx & 0 \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とおければ,

$\begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ となる.

一般の場合

$m-1$ まで J_{m-1} としたとす. 即ち, $X = \left[\begin{array}{c|c} J_{m-1} & X_2 \\ \hline -X_2 & X_3 \end{array} \right]$

(こゝで, $X \in Y$ に於いて, $X = \left[\begin{array}{c|c} X_{m-1} & X_2 \\ \hline -X_2 & X_3 \end{array} \right]$ としたとき, $rank X_{m-1} = m-1$ とは. PERSTJII

が, G_k の作用は, 行や列の permutation と引き起すので $rank X_{m-1} = m-1$ の場合に帰着してよい.)

このとき,

$$2 \left\{ \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c|c} J_{m-1} & X_2 \\ \hline -^*X_2 & X \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c|c} {}^*A_1 & {}^*A_3 \\ \hline {}^*A_2 & {}^*A_4 \end{array} \right\} \quad (\text{ここで, } A_i (1 \leq i \leq 4) \text{ を次の様に取る,})$$

$$\left\{ \begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline -^*X_2 J_m & 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c|c} J_m & X_2 \\ \hline -^*X_2 & X_3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c|c} I_m & J_m X_2 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right\} := \left\{ \begin{array}{c|c} J_m & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{smallmatrix} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c|c} J_m & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{smallmatrix} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{array} \right\} = J_{m+1} \text{ と同じ O.K.}$$

$(GL_1 \times GL_{2m}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1^{(*)} \oplus \Lambda_1^{(*)})$ については、作用の任意より、 $(SL_2 \times Sp_m, \Lambda_1 \oplus \Lambda_1)$ と同型より、Example 7 の場合 に帰着される。

Example 5

$(GL_1 \times GL_{2m+1}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1)$ については、 $\xi = \left(\begin{array}{c|c} J_m & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}, \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right)$ が generic point であり、表現空間の任意の k -rational point $X = \left\{ \begin{array}{c|c} X & y \\ \hline -^*y & 0 \end{array} \right\}$ については、

これは、 $X = \left\{ \begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline -^*X_2 & 0 \end{array} \right\}$ と書いたとき、 $\text{rank } X_1 = 2m$ とする。このとき、

$$\left\{ \begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline -^*X_2 J_m & 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c|c} J_m & X_2 \\ \hline -^*X_2 & 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c|c} I_m & J_m X_2 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} J_m & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\}. \text{ また, } \xi \text{ の isotropy 群 } H_\xi \text{ は,}$$

$$\left\{ \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & \alpha \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c|c} J_m & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\}^* \left\{ \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & \alpha \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} J_m & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\} \text{ より, } H_\xi = \left\{ \begin{array}{c|c} Sp_m & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right\}$$

と同じ、このことより $\left\{ \begin{array}{c|c} I_{2m} & -\lambda \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} x \\ 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \lambda - x \\ 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\}$ と同じ、 $G_k \xi = \gamma_k$ と同じ。 //

Example 6

$(GL_1^3 \times GL_{2m+1}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1^* \oplus (\Lambda_1 \oplus \Lambda_1)^*)$ に \supset 117, 表現空間は $V = V(\Lambda_1(2m+1)) \oplus V^*(\Lambda_2(m+1)) \oplus (V(\Lambda_2(m+1))^* \oplus V(\Lambda_2(m+1))^*)$ 2", $V \ni \tilde{x} = (\tilde{X}, \gamma_1, (\gamma_2, \gamma_3)) = (\tilde{X}, X)$ と \supset 33.

$J' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & J \end{array} \right)_{2m}$ に \supset 117 の $\tilde{G} = GL_1^3 \times GL_{2m+1}$ の isotropy 群 H は,

$H = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline A' & A \end{array} \right) \in GL_{2m+1} : A \in Sp_m \right\}$. \supset 2. $\forall X = \begin{pmatrix} \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \\ Z \end{pmatrix} \in M(2m+1, 3)_k$

$A \in Sp_m(k)$ に \supset 117. $\left(\begin{array}{c|c} \alpha' & B \\ \hline 0 & A \end{array} \right) X \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha' \lambda_1, \alpha' \lambda_2, \alpha' \lambda_3) + BZ \\ AZ \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

と \supset 33 か", \supset [KKH] の Proposition 2.9 \supset 117,

$X \underset{G_h}{\sim} \begin{pmatrix} z_1, z_2, z_3 \\ Z_0 \end{pmatrix} = X_0, (z_1, z_2, z_3) \in k^3, \supset$ 2" $Z_0 = \left(\begin{array}{c|c|c} \vdots & 0 & \vdots \\ \hline 0 & & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right)_{\leftarrow m+1}$

$B = (b_1, b_2, \dots, b_{2m})$ s.t. $b_1 = -z_1, b_2 = z_1 + z_2 - z_3, b_{m+1} = -z_2, b_j = 0$ for $\forall j \neq 1, 2, m+1$

このとき, $\left(\begin{array}{c|c} 1 & B \\ \hline 0 & I_{2m} \end{array} \right) X_0 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ Z_0 \end{pmatrix}$. \supset 2. $(X, \tilde{X}) \underset{G_h}{\sim} \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & J \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ Z_0 \end{array} \right)$

Example 7

$(GL_1^2 \times Sp_m, \Lambda_1 \oplus \Lambda_1, V(\Lambda_1) \oplus V(\Lambda_1))$ に \supset 117, \supset 2 P.V. (G.P.V) の open orbit \supset L. \supset k \supset \supset の k-rational points \supset \supset 33.

$V(\Lambda_1) \oplus V(\Lambda_1) \ni X = (X_1, X_2)$ に \supset 117.

$$\begin{pmatrix} 0 & f(x) \\ -f(x) & 0 \end{pmatrix} = {}^*X J X = \begin{pmatrix} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2m} \\ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^*x \\ {}^*y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Jx & Jy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^*Jy \\ {}^*y Jx & 0 \end{pmatrix}$$

より, $f(x) = {}^*x J y$ か, (G, p, V) の相対不変式.

$$\textcircled{\ominus} \quad {}^*X J X \xrightarrow{\quad} \underbrace{{}^*X {}^*A J A X}_{\substack{\text{J} \\ \text{J}}} = {}^*X J X$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ により, } f(\xi) = 1 \neq 0 \text{ . } \therefore \xi \text{ は generic point に選べる.}$$

$$\text{このとき, } \mathfrak{f} = \{ \tilde{A} \in \mathfrak{g} \mid \tilde{A} \xi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + A \xi = 0 \} = \mathfrak{gl}_1 \oplus \mathfrak{sp}(m-1)$$

$$\textcircled{\ominus} \quad A \in \mathfrak{sp}(m) \text{ は, } A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & -{}^*A_1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = {}^*B_1, \quad C_1 = {}^*C_1 \text{ と置ける.}$$

$$(A_1 \in \mathfrak{GL}(m), B, C \in M(m))$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1m} & b_1 b_{11} \dots b_{1m} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2m} & b_{12} b_{22} \dots b_{2m} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} a_{m2} \dots a_{mm} & b_{m1} b_{m2} \dots b_{mm} \\ \hline c_1 c_{12} \dots c_{1m} & -a_{11} -a_{21} \dots -a_{m1} \\ c_{12} c_2 \dots c_{2m} & -a_{12} -a_{22} \dots -a_{m2} \\ \vdots & \vdots \\ c_{m1} c_{m2} \dots c_m & -a_{1m} -a_{2m} \dots -a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{21} & b_{12} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & b_{m1} \\ c_1 & -a_{11} \\ c_{12} & -a_{12} \\ \vdots & \vdots \\ c_m & -a_{1m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore a_{ii} = -\alpha = \beta$$

$$\mathfrak{f} \ni \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & A_1 & \vdots & B_1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & C_1 & \vdots & {}^*A_1^{-1} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \alpha \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 1 \end{array} \right) \text{ により } \mathfrak{f} \cong \mathfrak{gl}_1 \oplus \mathfrak{sp}(m-1)$$

以下, このとき, Lie環から, 1-parameter subgroup を作り, ξ が \mathfrak{k} の generic point であることを示す.

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^*A \end{pmatrix}; {}^*B=B, {}^*C=C \right\} \text{ により.}$$

$$\exp \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & {}^*A \end{array} \right) \longrightarrow \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & {}^*A \end{array} \right); A \in GL_m \right\} \subset Sp_m$$

$$\exp \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left\{ \left(\begin{array}{c|c} I_m & B \\ \hline 0 & I_m \end{array} \right); {}^*B = B \right\} \subset Sp_m$$

$$\exp \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline c & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left\{ \left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline c & I_m \end{array} \right); {}^*c = c \right\} \subset Sp_m$$

このとき, これらを用いて Υ_k の generic point を λ として $f(x) = {}^*xJx$,
 $X = (x_1 | x_2) \in \Upsilon_k$, $x \neq 0$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ が基本相対不変式の1つである。

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & {}^*A \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 \\ {}^*A x_2 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{c|c} I_m & B \\ \hline 0 & I_m \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + Bx_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{B=I} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とし, } x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_{2m} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とおくと, } \left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline -x_{m+1} \dots -x_{2m} & I_m \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_{2m} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって, 先の generic point は, } X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_{2m} \\ 0 \end{pmatrix} \in \Upsilon_k, \quad f(X) = (1, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_{2m} \\ 0 \end{pmatrix} = y_{m+1}$$

$\therefore f(X) = y_{m+1} \neq 0 \quad \therefore y_{m+1} = 1$ とおける。

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & -x_{m+1} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & -x_{m+2} \dots -x_{2m} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_{2m} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda$$

とほり, 作用させた各行列は, G_k の元より, $\Upsilon_k = G_k \lambda$ とおける。

Example 8

$(Spin_{10} \times GL_1^2, (\text{half-spin rep.}) \oplus (\text{the vector rep.}))$ について。

$A \in \mathcal{O}(10) = Lie(Spin_{10})$ の \mathbb{R} スピン表現と $d\rho_1(A)$ と $t = t$ のとき, $\mathcal{O}(10) \oplus \mathfrak{gl}(1)$

$= \text{Lie}(\text{Spin}_{10} \times \text{GL}_1) \ni (A, \lambda)$ の表現は. [S-k] P.119~P.121 より,

$$dP_i(A) + \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & -a_{15} \\ -a_{21} & a_{22} + \lambda & a_{23} & a_{24} & a_{25} & -b_{12} & 0 & b_{23} & b_{24} & -a_{25} \\ -a_{31} & a_{32} & a_{33} + \lambda & a_{34} & a_{35} & -b_{13} & -b_{23} & 0 & b_{34} & -a_{35} \\ -a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} + \lambda & a_{45} & -b_{14} & -b_{24} & -b_{34} & 0 & -a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & \lambda & a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & 0 \\ \hline 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & a_{51} & \lambda - a_{11} & -a_{21} & -a_{31} & -a_{41} & -a_{51} \\ -c_{12} & 0 & c_{23} & c_{24} & a_{52} & -a_{12} & \lambda - a_{22} & -a_{32} & -a_{42} & -a_{52} \\ -c_{13} & -c_{23} & 0 & c_{34} & a_{53} & -a_{13} & -a_{23} & \lambda - a_{33} & -a_{43} & -a_{53} \\ -c_{14} & -c_{24} & -c_{34} & 0 & a_{54} & -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & \lambda - a_{44} & -a_{54} \\ -c_{51} & -a_{52} & -a_{53} & -a_{54} & 0 & -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & & & & & -a_{15} \\ a_{21} & d_2 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & & & & & -a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & d_3 & a_{34} & a_{35} & & & & & -a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & d_4 & a_{45} & & & & & -a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & d_5 & a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & 0 \\ \hline & & & & & a_{51} & a_{11}' - a_{21} & -a_{31} & -a_{41} & -a_{51} \\ & & & & & a_{52} & -a_{12} & d_2' - a_{32} & -a_{42} & -a_{52} \\ & & & & & a_{53} & -a_{13} & -a_{23} & d_3' - a_{43} & -a_{53} \\ & & & & & a_{54} & -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & d_4' - a_{54} \\ & & & & & -a_{51} & -a_{52} & -a_{53} & -a_{54} & d_5' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & & & & 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & 0 \\ & & & & & -b_{12} & 0 & b_{23} & b_{24} & 0 \\ & & & & & -b_{13} & -b_{23} & 0 & b_{34} & 0 \\ & & & & & -b_{14} & -b_{24} & -b_{34} & 0 & 0 \\ \hline & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} & & & & & 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 \\ & & & & & -c_{12} & 0 & c_{23} & c_{24} & 0 \\ & & & & & -c_{13} & -c_{23} & 0 & c_{34} & 0 \\ & & & & & -c_{14} & -c_{24} & -c_{34} & 0 & 0 \\ & & & & & c_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right], \quad z = z', \quad \lambda = \frac{d_i + d_i'}{2} \quad (1 \leq i \leq 5)$$

$z = z', \left(\begin{smallmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)^2 = 0$ より, 1-parameter subgroup は.

$$\exp t \left(\begin{smallmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) = I + t \left(\begin{smallmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} I & tB \\ 0 & I \end{smallmatrix} \right), \quad \text{同様に (7)}$$

$\alpha = \tau$, $1 \leq k < l < m < n \leq 5$ τ あり, $\{s, k, l, m, n\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset \{3\}$.

この列, 次のような表現を得る.

$$d\ell_1(A) = \begin{pmatrix} A_1 & -C_2 & -C_3 & -C_4 & -C_5 & -C_2 & -C_4 & -C_5 & -C_2 & -C_3 & -C_5 & -C_2 & -C_3 & -C_5 & -C_2 & -C_3 & -C_5 \\ b_{12} & A_2 & A_{23} & A_{24} & A_{25} & -A_{13} & -A_{14} & -A_{15} & -C_2 & -C_3 & -C_5 & -C_2 & -C_3 & -C_5 & -C_2 & -C_3 & -C_5 \\ b_{23} & A_{32} & A_3 & & & -A_{14} & -A_{15} & C_{24} & C_{25} & -C_{45} & & & & & & & \\ b_{14} & A_{42} & & A_4 & & A_{13} & -A_{15} & -C_{23} & C_{25} & C_{35} & & & & & & & \\ b_{15} & A_{52} & & & A_5 & A_{13} & A_{14} & -C_{23} & -C_{24} & -C_{34} & & & & & & & \\ b_{23} & -A_{31} & & & & -A_{24} & -A_{25} & -C_{14} & -C_{15} & & -C_{45} & & & & & & \\ b_{24} & -A_{41} & & & & A_{23} & -A_{25} & -C_{13} & -C_{15} & C_{35} & & & & & & & \\ b_{25} & -A_{51} & & & & A_{23} & A_{24} & C_{13} & C_{14} & -C_{34} & & & & & & & \\ \hline b_{34} & -A_{41} & A_{31} & -A_{42} & A_{32} & A_9 & A_{45} & -A_{35} & -C_{12} & -C_{15} & -C_{25} & & & & & & \\ b_{35} & -A_{51} & A_{31} & -A_{52} & A_{32} & A_{54} & A_{10} & A_{34} & C_{12} & C_{14} & C_{24} & & & & & & \\ b_{45} & & -A_{51} & A_{41} & -A_{52} & A_{42} & -A_{53} & A_{43} & A_{11} & -C_{12} & -C_{13} & -C_{23} & & & & & \\ & b_{34} & -b_{24} & b_{23} & b_{14} & -b_{13} & b_{12} & & A_{12} & A_{45} & -A_{35} & A_{25} & -A_{15} & & & & \\ & b_{35} & -b_{25} & b_{23} & b_{15} & -b_{13} & b_{12} & & A_{14} & A_{15} & A_{34} & -A_{44} & A_{14} & & & & \\ & b_{45} & & -b_{25} & b_{24} & b_{15} & -b_{14} & & b_{12} & -A_{13} & A_{42} & A_{14} & A_{23} & -A_{13} & & & \\ & & b_{45} & -b_{35} & b_{34} & & & & b_{15} & -b_{14} & b_{13} & A_{52} & A_{42} & A_{32} & A_{15} & a_{12} & \\ & & & & & b_{45} & -b_{35} & b_{34} & b_{25} & -b_{24} & b_{23} & -A_{51} & A_{41} & -A_{31} & A_{21} & A_{16} & \end{pmatrix}$$

但し,

$$A_1 = \frac{1}{2}(-a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3 - a_4 - a_5)$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - a_5)$$

$$A_4 = \frac{1}{2}(a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5)$$

$$A_5 = \frac{1}{2}(a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + a_5)$$

$$A_6 = \frac{1}{2}(-a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5)$$

$$A_7 = \frac{1}{2}(-a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5)$$

$$A_8 = \frac{1}{2}(-a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5)$$

$$A_9 = \frac{1}{2}(-a_1 - a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$$

$$A_{10} = \frac{1}{2}(-a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5)$$

$$A_{11} = \frac{1}{2}(-a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5)$$

$$A_{12} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5)$$

$$A_{13} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5)$$

$$A_{14} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5)$$

$$A_{15} = \frac{1}{2}(a_1 - a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$$

$$A_{16} = \frac{1}{2}(-a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$$

$\alpha = \tau$.

$$\lambda = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_1 e_2 + \lambda_3 e_1 e_3 + \lambda_4 e_1 e_4 + \lambda_5 e_1 e_5 + \lambda_6 e_2 e_3 + \lambda_7 e_1 e_4$$

$$+ \lambda_8 e_2 e_5 + \lambda_9 e_3 e_4 + \lambda_{10} e_3 e_5 + \lambda_{11} e_4 e_5 + \lambda_{12} e_1 e_2 e_3 e_4 + \lambda_{13} e_1 e_2 e_3 e_5$$

$+ \lambda_{14} e_1 e_2 e_4 e_5 + \lambda_{15} e_1 e_3 e_4 e_5 + \lambda_{16} e_1 e_3 e_4 e_5$ とおく。

$X_0 = (1 + e_1 e_2 e_4 e_5) = \ast(1.0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i_2}, 0000) \in V(16)$ が generic point

で、isotropy algebra \mathcal{G}_{X_0} は、 $\mathcal{G}_{X_0} = \mathcal{H}(1) \oplus \mathcal{O}(7) \oplus V(8)$ 、 $= \tau^* V(8)$

は Vector 群の Lie 環で 8 次元のもの。よって isotropy 群は、 $(GL(1) \times Spin_7)(G_a)^8$

$$P(GL(1) \times Spin_{10}) X_0 = GL(1) \times Spin_{10} / (GL(1) \times Spin_7)(G_a)^8$$

以下で、 $\forall \lambda \in Y$ が、 $GL(1, k) \times Spin_n(k)$ の作用で、 $\ast(1.0.0 \dots, 1.0000)$ にうつることを示そう。このとき、 $(\lambda_{12} \neq 0, \lambda_{13} \neq 0, \lambda_7 \neq 0)$ と仮定する。

$$\ast \left[\left[I + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{12}} \right) \right] \left[E_{1,1} + E_{2,12} + E_{5,15} + E_{8,16} \right] \left[I + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_7} \right) \left(-E_{3,1} + E_{5,11} \right) \right] \left[I + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_{13}} \right) \left(-E_{4,12} - E_{5,13} \right) \right] \left[I + \frac{\lambda_4}{\lambda_9} \left(-E_{1,9} - E_{2,9} \right) \right] \right. \\ \left. \times \left[I + \frac{\lambda_5}{\lambda_7} \left(-E_{7,7} - E_{8,10} \right) \right] \left[I + \frac{\lambda_6}{\lambda_{11}} \left(-E_{2,2} - E_{5,13} \right) \right] \right]$$

による変形を経て、

$$\ast(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{16}) \longrightarrow \ast(\lambda_{10}, \dots, 0, \lambda_9, \lambda_{10}, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{15}, \lambda_{16})$$

$$\text{これに、} \left[I + \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \left(-E_{9,1} - E_{12,2} - E_{15,5} - E_{16,8} \right) + \frac{\lambda_5}{\lambda_1} \left(-E_{6,1} - E_{10,2} - E_{14,4} - E_{16,7} \right) + \frac{\lambda_{11}}{\lambda_1} \left(-E_{1,1} - E_{14,5} - E_{15,3} - E_{16,7} \right) \right]$$

を作用させると、 $\ast(\lambda, 000000000000 \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{15}, \lambda_{16})$ を得る。

$$\text{さらに、} \left[I + \frac{\lambda_{15}}{\lambda_{11}} \left(-E_{5,2} - E_{15,11} \right) + \frac{\lambda_{16}}{\lambda_{12}} \left(-E_{8,2} - E_{16,12} \right) + \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12}} \left(-E_{10,9} - E_{13,12} \right) + \frac{\lambda_{14}}{\lambda_{12}} \left(-E_{11,9} - E_{12,12} \right) \right]$$

を作用させると、 $\ast(\lambda_1, 000000000000 \lambda_{12}, 0000)$ を得る。

このとき、 $a_4 = \log \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1}$ 、 $a_5 = \log \frac{1}{\lambda_1 \lambda_{11}}$ とおけば、

$$e^{\frac{-a_4 - a_5}{2}} = \frac{1}{\lambda_1}, \quad e^{\frac{a_4 - a_5}{2}} = \frac{1}{\lambda_{11}}$$

$$\therefore \text{diag} \left[\frac{1}{\lambda_1}, e^{\frac{-a_4 - a_5}{2}}, e^{\frac{-a_4 - a_5}{2}}, e^{\frac{-a_4 - a_5}{2}}, e^{\frac{-a_4 - a_5}{2}}, e^{\frac{-a_4 - a_5}{2}}, e^{\frac{-a_4 - a_5}{2}}, e^{\frac{-a_4 + a_5}{2}}, \right. \\ \left. e^{\frac{-a_4 + a_5}{2}}, e^{\frac{a_4 - a_5}{2}}, e^{\frac{-a_4 + a_5}{2}}, e^{\frac{a_4 + a_5}{2}}, e^{\frac{a_4 - a_5}{2}}, \frac{1}{\lambda_{11}}, e^{\frac{a_4 + a_5}{2}}, e^{\frac{a_4 + a_5}{2}}, e^{\frac{a_4 + a_5}{2}} \right]$$

($= 1$ に表われる e^x は全 7 の k の π とした) を作用させると、

$$\ast(1.0.000000000000 1.0000)$$

以上のことより，決が成り立つ。

Theorem C

Universally transitive open orbits $Z \in \mathfrak{g}$ 既約 Z は 1) 単純正則根空間
ベクトル空間は，決の $\mathfrak{g} \supset Z$ ，それらは全て open orbit γ の
 k -rational point γ_k が 1つの G_k -orbit より，関係式 $Z_a(\omega) = \tau Z_m(\omega)$
をみたす。

$$(1) (GL_1 \times GL_m, \Lambda_1 \oplus \Lambda_1^*)$$

$$(2) (GL_1^m \times GL_m, \Lambda_1 \oplus \overbrace{\dots \oplus \Lambda_1}^m)$$

$$(3) (GL_1^m \times GL_m, \Lambda_1 \oplus \overbrace{\dots \oplus \Lambda_1}^m \oplus \Lambda_1^{(*)})$$

$$(4) (GL_1^2 \times GL_{2m}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1^{(*)} \oplus \Lambda_1^{(*)})$$

$$(5) (GL_1 \times GL_{2m+1}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1)$$

$$(6) (GL_1^3 \times GL_{2m+1}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1 \oplus (\Lambda_1 \oplus \Lambda_1)^{(*)})$$

$$(7) (GL_1^2 \times Sp_m, \Lambda_1 \oplus \Lambda_1)$$

$$(8) (GL_1^2 \times Spin_m, (\text{a half-spin rep.}) \oplus (\text{the vector rep.})) \text{ with } m=8,10$$

$$(9) (GL_1^2 \times Spin_{10}, \Lambda \oplus \Lambda) \text{ with } \Lambda = \text{the even half-spin rep.}$$

II: 2-Simple non-irreducible regular P.V. with universally
transitive open orbit property の場合

Example 10

$(GL_1 \times GL_2 \times GL_2, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1 + (\Lambda_1 + \Lambda_1)^{(*)} \oplus 1)$ に $\supset \parallel ?$ ，表現空間は。

$$V = V(1_0) \oplus V(2) \oplus (V(5) \oplus V(5))^* \cong \text{Alt}(5) \oplus \text{Alt}(5) \oplus (\mathbb{K}^5 \oplus \mathbb{K}^5) \text{ 等}$$

作用は. $f = (\alpha, A, B) \in (GL_5 \times GL_5 \times GL_5)$ と $\tilde{x} = ((X, Y), \underbrace{(y, y)}_Z) \in V$
 s.t. ${}^*X = -X, {}^*Y = -Y, y, y \in \mathbb{K}^5$ (= 2112).

$$f(\tilde{x}) = ((AX{}^*A, AY{}^*A) {}^*B, A^{-1}[y, y]) \left(\begin{matrix} 1 \\ \alpha \end{matrix} \right) \text{ と } f \text{ する.}$$

このとき, generic point は. [KKH] の proposition 3 より,

$$\tilde{x}_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} \bigcirc & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{array} \right\} \text{ 等. } \tilde{x}_0 \text{ の isotropy 群 } H_{\tilde{x}_0} = \{1\}$$

$\begin{matrix} \text{X}_0 & \text{Y}_0 & \text{Z}_0 \end{matrix}$

と なる. 以下 2', γ_k の G_k -orbit が 解 と なる.

1st. step

${}^*\tilde{A}_0 Z = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}$ と なる よう に, $\tilde{A}_0 \in GL_5(\mathbb{K})$ と して, $(\tilde{A}_0 X {}^*\tilde{A}_0, \tilde{A}_0 Y {}^*\tilde{A}_0)$ と 改め て, (X, Y) と する.

2nd. step

$$(*) \quad {}^*A^{-1}[y, y] \left(\begin{matrix} 1 \\ \alpha \end{matrix} \right) = (e_4, e_5) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{matrix} \end{array} \right)$$

に 注意 し て, (X, Y) が G_k の 作用 で, (X_0, Y_0) に 移る と 示す.

$$X = \left(\begin{array}{c|c|c} X_1 & 0 & X_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline -{}^*X_2 & 0 & X_4 \end{array} \right) \text{ 等 } * \text{-type の } A_1 \text{ 等 } P(A_1)X = \tilde{A}_1 X {}^*\tilde{A}_1 = X' = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & I_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline -I_2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

と なる. $\tilde{A}_1 Y {}^*\tilde{A}_1 = Y'$ に, X' と 変換 する 13 の 右 側の 作用

と 考へ て, $Y' = \begin{pmatrix} 0 & * & * & 0 & * \\ * & 0 & * & * & 0 \\ * & * & 0 & * & * \\ 0 & * & * & 0 & * \\ * & 0 & * & * & 0 \end{pmatrix}$ と して なる.

このとき, 第 3 行 と, 何倍かして, 第 1, 2 行 に 加え たり, 31112y

ある行列を \tilde{A}_2 とし \tilde{A}_2^{-1} とし、

$$\tilde{A}_2 X'^* \tilde{A}_2^{-1} = X' = X'', \quad \tilde{A}_2 Y'^* \tilde{A}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ ** & 0 & ** & ** & ** \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \end{pmatrix} = Y'' \text{ とする.}$$

このとき、適当な $\tilde{A}_3 = \left(\begin{array}{c|c|c} I_2 & * & 0 \\ ** & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_2 \end{array} \right)$ と作用させ、

$$\tilde{A}_3 X''^* \tilde{A}_3^{-1} = X'' = X', \quad \tilde{A}_3 Y''^* \tilde{A}_3^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = Y^{(4)} \quad (\text{rank } Y = 4 \text{ あり})$$

とす。 \tilde{A}_4 と 2 行と 4 行に 加えられたりして

$$\tilde{A}_4 X'^* \tilde{A}_4^{-1} = X', \quad \tilde{A}_4 Y^{(4)*} \tilde{A}_4^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ とす, } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ と右から}$$

作用させれば、 $(\tilde{A}_4 X'^* \tilde{A}_4^{-1}, \tilde{A}_4 Y^{(4)*} \tilde{A}_4^{-1})^* B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

ここで、今までの $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_4$ は全て $*$ -type あり、

$$^*(\tilde{A}_4 \tilde{A}_3 \tilde{A}_2 \tilde{A}_1)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha'_0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とす. } B = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \text{ とす. } \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha'_0 \\ 0 \end{pmatrix}^* B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とす.}$$

Example 11

$(GL_1 \times Sp_m \times GL_{2m}, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes (\Lambda^{(2)} + \Lambda_1^{(2)}))$ の表現空間は、

$$V = V(2m) \otimes V(2m) \oplus (V(2m)^{(*)} \oplus V(2m)^{(**)}) \cong M(2m, 2m) \oplus (V(2m)^{(*)} \oplus V(2m)^{(**)}),$$

作用は、 $V \ni \tilde{x} = (X, (y_1, y_2))$ と $g = (\alpha, \beta, A, B) \in GL_1 \times Sp_m \times GL_{2m}$ により

$$P(g)\tilde{x} = (AX^*B, \alpha^* y_1^* B, \beta y_2^* B) \text{ とす.}$$

$$\xi = \left\{ \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ "generic point" } z, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 & X_5 \\ X_2 & X_6 \\ X_3 & X_7 \\ X_4 & X_8 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ c & {}^*A_1^{-1} \end{pmatrix} \text{ s.t. } {}^*B = B$$

$${}^*C = C \text{ により } \begin{pmatrix} I_m & B_1 B_2 \\ {}^*B_2 B_1 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ c_1 c_2 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_5 \\ X_2 & X_6 \\ X_3 & X_7 \\ X_4 & X_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & 0 \\ 0 & X_7 \\ 0 & X_8 \end{pmatrix} \text{ とできる。さらに}$$

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 & 0 \\ X_8 & I_m & -X_8 \\ 0 & 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ {}^*A_1 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^{-1} & 0 \\ 0 & {}^*X_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ A_2 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_5 \\ X_2 & X_6 \\ X_3 & X_7 \\ X_4 & X_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ また}$$

$$B = \begin{pmatrix} z_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots \\ z_m & z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ とできるから、最初の段階で } X \text{ と } X^{-1}B \text{ とを直しておけばいい。}$$

Example 12

$(GL_1 \times Sp_m \times GL_{2m+1}, \lambda_1 \otimes \lambda_1 + \lambda_1 \otimes 1)$ の表現空間は $V = V(2m) \otimes V(2m+1) \otimes V(2m)$

で、作用は $V \ni \tilde{x} = (\tilde{X}, y), \tilde{X} \in M(2m, 2m+1), y \in V(2m)$ と

$G = GL_1 \times Sp_m \times GL_{2m+1} \ni (\alpha, A, B) \text{ により } \rho(g)\tilde{x} = (A\tilde{X}^*B, Ay)$

とある。

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} X_1 & X_5 & \text{---} \\ X_2 & X_6 & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ X_3 & X_7 & \text{---} \\ X_4 & X_8 & \text{---} \\ 0 & 0 & \text{---} \end{pmatrix} \text{ と仮定しよう。 (} \odot \tilde{A}_1 \in Sp_m \text{ の作用で、こうできる。)}$$

さらに

$$\begin{pmatrix} A_{m-1} & B_{m-1} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ C_{m-1} & {}^*A'_m & \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_5 & \text{---} \\ X_2 & X_6 & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ X_3 & X_7 & \text{---} \\ X_4 & X_8 & \text{---} \\ 0 & 0 & \text{---} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{m-1} & 0 & \text{---} \\ 0 & 0 & \text{---} \\ 0 & 0 & \text{---} \\ 0 & I_m & \text{---} \\ 0 & 0 & \text{---} \end{pmatrix} \text{ とできる。}$$

$$\tilde{A}_1 \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} \text{ と改めると } \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ q_{2m} \end{pmatrix} \text{ とすると、} \tilde{A}_2 \text{ の } \text{---} \text{ の部分は } \lambda \text{ のようにしてあげればいい}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{m-1} & a & B_{m-1} & b \\ \hline a' & a & *b & b \\ C_m & c & *A_{m-1} & *c \\ \hline *c & c & *a' & -a \end{array} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{m-1}y_1 + a y_2 + B_{m-1}y_3 + b y_4 \\ a'y_1 + a y_2 + b y_3 + b y_4 \\ C_m y_1 + (c y_2 + *A_{m-1}y_3 + *c y_4) \\ c y_1 + c y_2 + *a' y_3 - a y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるように。

a, b, c, a', b, c を整理する。

$$\tilde{A}_2 \tilde{A}_1 X = \begin{pmatrix} I_{m-1} & z_1 & 0 & z_1 z_2 \\ \hline 0 & z_2 & 0 & z_1 z_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & z_3 & I_{m-1} & z_1 z_3 \\ \hline 0 & z_4 & 0 & z_1 z_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

= GL_{2m+1} の右からの作用での別変換

$$\begin{pmatrix} I_{m-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & z_2 & 0 & z_1 z_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{m-1} & 0 \\ \hline 0 & z_4 & 0 & z_1 z_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とできる。さらに、y₀ を変えたい、Sp_m の作用と GL_{2m+1} の作用で。

$$\begin{pmatrix} I_{m-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{m-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_m & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とできる。

Example 13

(GL₁³ × Sp_m × GL_{2m}, λ₁ ⊗ λ₁ + λ₁ ⊗ 1 + 1 ⊗ (λ₁ + λ₁)) の表現空間及び

その元は、V(2m) ⊗ V(2m+1) ⊕ V(2m) ⊕ (V(2m+1) ⊕ V(2m+1))^(*) ≅

M(2m, 2m+1) ⊕ V(2m) ⊕ (V(2m+1) ⊕ V(2m+1))^(*) ⊃ (X, x, (y₁, y₂)) z''

作用は、ρ(g) x̃ = (α A x^{*} B, β A x, (*B y₁, *B y₂) (1, g) z''

generic point は、x̃₀ = { (* [I_m | 0 | 0 | 0], (* [1 | 1], (* [1 | 1 | 0]) }

1st. step.

$$\tilde{B}_0 \in GL_{2m+1} \text{ 227, } \tilde{B}_0 \cdot y = \begin{pmatrix} y_1 & y'_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{s.t. rank} = 2m-2$$

2L. 2h 222k 7 y 2ok.

2nd. step

$$\tilde{A}_0 \in Sp_m \text{ 227, } \tilde{A}_0 \cdot X^* \tilde{B}_0 = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{22ok. 2P3.}$$

$$X = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \quad \text{s.t. rank } [y_2, y_4] = 2m \text{ 22222222.}$$

3rd. step

以下, Example 12 と同様の变形で, $Y_k = Gk^3$ がわかる.

Example 14

$(GL_1 \times Spin_{10} \times GL_2, (a \text{ half-spin rep.}) \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes (\Lambda_1 + \Lambda_1))$ は generic isotropy 群が, SL_2 に含まれることより, I の Example 81 に帰着して $Y_k = Gk^3$ となる.

Example 15

$(GL_1 \times Spin_{10} \times GL_2, (a \text{ half-spin rep.}) \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes (\Lambda_1 + \Lambda_1)) \in$ generic isotropy 群が SL_2 に含まれることより, I の Example 81 に帰着して, $Y_k = Gk^3$ となる.

まとめると.

Theorem b

Universally transitive open orbits をもつ, 既約でない 2-simple 正則 P.V. は, 以下の (1) ~ (6) で, それは, 上記の議論により, $\Upsilon_k = G_k^3$ となるから, Proposition A より, $Z_a(\omega) = \tau(G_3) Z_m(\omega)$ という関係式をもつ。

- (1) $(GL_1 \times GL_5 \times GL_2, \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + (\Lambda_1^* + \Lambda_1^*) \otimes 1)$
- (2) $(GL_1^2 \times Sp_m \times GL_{2m}, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes (\Lambda_1^{(*)} + \Lambda_1^{(*)}))$
- (3) $(GL_1 \times Sp_m \times GL_{2m+1}, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1)$
- (4) $(GL_1^3 \times Sp_m \times GL_{2m+1}, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + 1 \otimes (\Lambda_1 + \Lambda_1)^{(*)})$
- (5) $(GL_1^2 \times Spin_{10} \times GL_2, (a \text{ half-spin rep.}) \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes (\Lambda_1 + \Lambda_1))$
- (6) $(GL_1^3 \times Spin_{10} \times GL_2, (a \text{ half-spin rep.}) \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes (\Lambda_1 + \Lambda_1 + \Lambda_1)) //$

最後に.

木村達雄先生には, この内容を完成させる際, P.V. に関する計算法など数多くの事を教していただきました. いろいろはげましていただきました. ここに感謝の意を表します. //

[参考文献]

- [B]: A. Borel: Some finiteness properties of adèle groups over Number field: I.H.E.S. 1963, 101-12
 [J]: J-I. Igusa: Zeta distributions associated with some invariants
 American. J. Math. 106 (1984), 1013 — 1032

- [K1]: T. Kimura; 根元均質ベクトル空間の研究, 数学 32 (1980), 97-118
- [K2]: = ; 特異点の解消と Igusa local zeta function の計算
(京大数理研講究録 1987)
- [KKH]: T. Kimura, S. Kasai and H. Hosokawa; Universal transitivity of simple and 2-simple prehomogeneous vector spaces,
Extrait des Annales de L'Institut Fourier Tome XXXVIII - Fascicule 2 (1988)
- [Sa 1]: F. Sato; Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces II; A convergence criterion, Tôhoku Math. J. 35 (1983), P. 77-99
- [Sa.2]: = ; 東京大学に於ける根元均質ベクトル空間の講義ノート (1988)
- [S-K]: M. Sato and T. Kimura; A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their invariants, Nagoya Math. J. 65 (1979), 1-55
- [S-S]: M. Sato and T. Shintani; 根元均質ベクトル空間の理論, 数学の歩み 15 (1970)
- [Se]: J. P. Serre; Local fields, Springer GTM 67
- [T]: J. Tate; Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions
Algebraic number theory, Academic Press, 1967, P. 305 ~ P. 342
- [W1]: A. Weil; Adèles and algebraic groups, Institute for advanced study
Princeton, N.J. 1961
- [W2]: = ; Fonction zeta et distributions, collected papers Vol. III. 158-163