

概均質ベクトル空間の理論 (筑波大学での集中講義の
補足)

行者明彦 大阪大学教養部
(GYOJA AKIHIKO)

以下、1988年10月25日から28日まで、筑波大学の集中講義で、話したことに、少し補足を加えます。この集中講義の、木村達雄氏のノートが、この講究録の中に収録されていますので、定義、記号等の説明は、くり返さず、必要な場合には [Tsukuba; …] という形で、木村達雄氏のノートを引用することにします。

この場で、木村達雄氏に感謝したく思います。木村氏には、集中講義という形で、私に話す機会を与えていただき、熱心に聞いて、すばらしいノートをもとめていただき、いくつかの有益な指摘をされ、また、宿泊のこと等々……何から何までお世話になりました。心から感謝致します。

また、筑波大学のスタッフ・大学院生の方々、そして、わざわざ他大学から聴講に来られた方々のおかげで、筑波滞在が、実り豊かな、楽しい時になりました。ありがとうございました。

§7. [Tsukuba; 定理 B] は、 $\Omega^r(\mathbb{R})$ 上の等式を与えるにすぎないこと、 ω_j が、十分、具体的には、与えられていること

と、等しくつか弱点が、あります。ここでは、これらの点を改良します。

$\alpha \in \mathbb{C}$, $k=0, 1, 2, \dots$ に対して, $D(V^\vee)$ -module $D(V^\vee)u_{\alpha, k}$ を、次の方程式系により定める。

$$(1) \left(\sum_{\lambda, \mu=1}^n (-a_{\lambda, \mu}) y_\mu \frac{\partial}{\partial y_\lambda} - (\phi_0 + \alpha \phi)(A) \right) u_{\alpha, k} = 0$$

$$(A \in \text{Lie}(G), \quad \rho(A) = (a_{\lambda, \mu}), \quad \phi_0(A) = \text{trace } \rho(A))$$

$$(2) \quad \forall \varphi \in \mathbb{C}[V^\vee] \quad \varphi \equiv 0 \text{ on } O_1^\vee \Rightarrow f^{\vee k} \varphi u_{\alpha, k} = 0.$$

ここで、記号・約束については、[Tsukuba; §3, lemma 8]に従う。

Lemma 1. k が十分大きければ、

$$D(V^\vee)u_{\alpha, k} [f^{\vee^{-1}}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(D(V)f^\alpha) [f^{\vee^{-1}}]$$

$$u_{\alpha, k} \longmapsto \mathcal{F}(f^\alpha)$$

\therefore) $\mathbb{C}[V^\vee]$ のイテアル $\{ \varphi \in \mathbb{C}[V^\vee] \mid \varphi \equiv 0 \text{ on } O_1^\vee \}$ の生成系を $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ とすると [Tsukuba; §3, lem. 7] より、

$$\forall_j \exists k_j \geq 0 \quad f^{\vee k_j} \varphi_j \mathcal{F}(f^\alpha) = 0.$$

$k = \max \{ k_1, \dots, k_N \}$ とすると

2.

$$\forall \varphi \in \mathbb{C}[V^v] \quad \varphi \equiv 0 \text{ on } O_1^v \Rightarrow f^{v-k} \varphi \mathcal{F}(f^\alpha) = 0.$$

すなわち、 $\mathcal{F}(f^\alpha)$ は、方程式系 (2) をみたす。[Tsukuba; §3.

lem. 8] より、 $\mathcal{F}(f^\alpha)$ は、方程式系 (1) もみたすから

D -module homomorphism (onto)

$$D u_{\alpha, k} \longrightarrow \mathcal{F}(Df^\alpha)$$

$$u_{\alpha, k} \longmapsto \mathcal{F}(f^\alpha)$$

を得る。この homomorphism は、 f^v で局所化すると、同型写像になる。▣

記号 $A_+ = \{ \alpha \in \mathbb{C} \mid b(\alpha+j) \neq 0, \quad \forall j=0, 1, 2, \dots \}$

$$A_- = \{ \alpha \in \mathbb{C} \mid b(\alpha-j) \neq 0, \quad \forall j=1, 2, 3, \dots \}$$

とおく。

定理 B (D-module version) $\alpha \in A_+$ ならば、

$$\mathcal{F}(Df^\alpha) \simeq D u_{\alpha, k} [f^{v-1}] \quad (\forall k \gg 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore) & (b(\alpha) b(\alpha+1) \cdots b(\alpha+m-1))^{-1} f^v \left(\frac{1}{\sqrt{-1}} y \right)^m f \left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \text{grad} \right)^m \mathcal{F}(f^\alpha) \\ & = \mathcal{F} \left((b(\alpha) b(\alpha+1) \cdots b(\alpha+m-1))^{-1} f^v (\text{grad})^m f(x)^m f(x)^\alpha \right) \\ & = \mathcal{F}(f^\alpha) \end{aligned}$$

$$\therefore (b(\alpha) b(\alpha+1) \cdots b(\alpha+m-1))^{-1} f(-\text{grad})^m \mathcal{F}(f^\alpha) = f^{v-m} \mathcal{F}(f^\alpha)$$

故に、自然な準同型写像 $\mathcal{F}(Df^\alpha) \rightarrow \mathcal{F}(Df^\alpha)[f^{v-1}]$ は、onto.

Df^α は holonomic であるから, $\mathcal{F}(Df^\alpha) \in \mathcal{F}(Df^\alpha)[f^{v^{-1}}]$ も holonomic になる。従って, $\mathcal{F}(Df^\alpha)$ の characteristic cycle と, $\mathcal{F}(Df^\alpha)[f^{v^{-1}}]$ の characteristic cycle が, 一致するのは, $\mathcal{F}(Df^\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(Df^\alpha)[f^{v^{-1}}]$ となり, lem. 1 とあわせて, 定理を得る。

一般に, D -module M に対して, (有限生成は, 仮定する) χ の characteristic cycle を $\underline{ch}(M)$ と書くことにする。 \underline{ch} については,

V. Ginsburg: *Inventiones Math.* 84 (1986), 327-402

に詳しく書いてある。R. Hotta - M. Kashiwara: *Invent. Math.* 75 (1984), §3 より

$$\underline{ch} \mathcal{F}(Df^\alpha) = \underline{ch} Df^\alpha,$$

$$\underline{ch} \mathcal{F}(Df^\alpha)[f^{v^{-1}}] = \underline{ch} Du_{\alpha,k}[f^{v^{-1}}] \quad (k \gg 0)$$

であるが, $\underline{ch} Df^\alpha$ の計算法は, [Ginsburg] に与えられてい

る。また, $\underline{ch}(Du_{\alpha,k}|_{\Omega^v})$ は, 簡単に求まるから, 再び,

[Ginsburg] に与えられた計算法を用いれば, $\underline{ch}(Du_{\alpha,k}[f^{v^{-1}}])$

が, 求まる。この結果を見くらべて,

$$\underline{ch} Df^\alpha = \underline{ch} Du_{\alpha,k}[f^{v^{-1}}] \quad (k \gg 0)$$

を得る。 $\therefore \underline{ch} \mathcal{F}(Df^\alpha) = \underline{ch} \mathcal{F}(Df^\alpha)[f^{v^{-1}}]$. \square

$v \in \Omega$ に対し、 $v^\vee = F(v)$ とおくと、 $F: \Omega \rightarrow V^\vee$ は接空間の上に、線形写像

$$F_{*v}: T_v \Omega \longrightarrow T_v V^\vee$$

$$\begin{array}{ccc} & \parallel & \parallel \\ & V & V^\vee \end{array}$$

を、ひきおこす。 $T_v \Omega$ 上の双一次形式 B_v を、次式で定める:

$$B_v(p, q) = \langle F_{*v}(p), q \rangle \quad (p, q \in T_v \Omega)$$

Lemma 2. (i) $G_v = \{g \in G \mid gv = v\}$ とおくと、 B_v は、 G_v -invariant symmetric bilinear form になる。

(ii) さらに、 $v \in O_1$ であれば、 $B_v|_{T_v O_1}$ は非退化になる。

\therefore (i) B_v に対応する行列は $\left(\frac{\partial^2 \log f}{\partial x_i \partial x_j}(v) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ であるから、主張は、簡単な計算で、たしかめられる。

(ii) $B_v(T_v O_1, q) = 0$, $q \in T_v O_1$ とすると、

$$0 = B_v(T_v O_1, q) = \langle F_{*v}(T_v O_1), q \rangle = \langle T_v O_1^\vee, q \rangle$$

([Tsukuba; 定理 A] より) また、同じ定理より

- $(T_v O_1^\vee)^\perp$ は $F: \Omega \rightarrow O_1^\vee$ の fibre の接空間
- O_1 は $F: \Omega \rightarrow O_1^\vee$ の cross section. 従って、 $T_v O_1$ は、cross section の接空間.

$$\therefore q \in (T_v O_1) \cap (T_v O_1^\vee)^\perp = \{0\}. \quad \square$$

$v \in O_1$ とし、 $\{z_1, \dots, z_n\}$ を、 v における V の局所座標で、次の条件をみたすものとする：

$$(1) O_1 = \{(z_1, \dots, z_n) \mid z_{m+1} = \dots = z_n = 0\}$$

(2) $z'_i = z_i|_{O_1}$ とすると $\{z'_1, \dots, z'_m\}$ は、 v における O_1 の局所座標

(3) $z''_i = z_i|_{F^{-1}(v'')}$ とすると、 $\{z''_1, \dots, z''_n\}$ は、 v における $F^{-1}(v'')$ の局所座標。但し $v'' = F(v)$ 。

v' における V' の局所座標 $\{z'_1, \dots, z'_n\}$ も、同様に定める。

Lemma 2 により、 O_1 の接空間上には、non-degenerate, symmetric bilinear form が、与えられたから、リーマン幾何学における種々の概念が、形式的に真似られる。ここでは、volume form の類似物を考えた：

$$\omega(v) := \left(\det B_v \left(\frac{\partial}{\partial z'_i}, \frac{\partial}{\partial z'_j} \right)_{1 \leq i, j \leq m} \right)^{\frac{1}{2}} dz'_1 \wedge \dots \wedge dz'_m$$

とおくと、 ω は O_1 上の G -invariant m -form で、どのような $v \in O_1$ に対しても $\omega(v) \neq 0$ となる。 ω は、二価になるが、以下では $|\omega|_{O_1(\mathbb{R})}$ のみか、必要となるので、気にする必要はない。

以下、 (G, ρ, V) の real structure を、ひとつ固定する。(cf. [Tsukuba; §4]. 以下、 ρ の記号を使う。) $\Omega^m(\mathbb{R})$ 上の hyperfunction $|h^v|$ を、次式で定める：

6.

$$|h^v| = \left| \frac{F^{v*} \omega \wedge \delta(z_{m+1}^v, \dots, z_n^v) (dz_{m+1}^v \wedge \dots \wedge dz_n^v)}{dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n} \right|$$

但し $|\delta| = \delta$ と約束する。 $|F^{v*} \omega|$ は $\Omega^v(\mathbb{R})$ 上で *real analytic* であるから、上式は、意味を持つ。

Lemma 3. $|f^v|^{-\alpha} |h^v| \in \mathcal{B}(\Omega^v(\mathbb{R}))$ は、 $Du_{\alpha, k}$ (を定義する方程式系 (1), (2)) の、解である。

$\therefore |f^v|^{-\alpha}$ は $\Omega^v(\mathbb{R})$ 上で、*real analytic* だから、積は、意味を持つ。 $|h^v|$ の $G(\mathbb{R})^+$ ($= G(\mathbb{R})$ の単位連結成分) に関する相対不変性を考えよう。 $|h^v|$ の定義式の分子は、 $G(\mathbb{R})^+$ に関し絶対不変であり、分母は、相対不変で、対応する指標は

$$|dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n|^{-1} \leftrightarrow (\det P(g))^{-1} = \det P(g) \quad (g \in G(\mathbb{R})^+)$$

$$\therefore |f^v|^{-\alpha} |h^v| \leftrightarrow \det P(g) \times \phi(g)^\alpha$$

故に、方程式系 (1) が、みたされる。 $|h^v|$ が、 $\int(z_{m+1}, \dots, z_n)$ を *factor* にもつから、方程式系 (2) もみたされる。 \square

Remark.

$$|f_j^v|^{-\alpha} |h^v| = \begin{cases} |f^v|^{-\alpha} |h^v| & \text{on } \Omega_j^v \\ 0 & \text{on } \Omega_k^v \quad (k \neq j) \end{cases}$$

($j=1, 2, \dots, l$)

とおくと、これらも、 $Du_{\alpha, k}$ の解になる。

Lemma 4. $\alpha \in A^-$ であるならば、

$$\begin{aligned} & \Gamma(V^v(\mathbb{R}), \text{Hom}_D(\mathcal{F}(Df^\alpha), \mathcal{B})) \\ &= \Gamma(\Omega^v(\mathbb{R}), \text{Hom}_D(\mathcal{F}(Df^\alpha), \mathcal{B})) \end{aligned}$$

但し、 \mathcal{B} は hyperfunctions のなす sheaf.

Remark. 一般に、可換環 A に対して、 A -modules の category と、 $\text{Spec}(A)$ 上の quasi-coherent sheaves の category は、同型であるので、 A -module と、 $\text{Spec}(A)$ 上の quasi-coherent sheaf は、特に区別しない。

Remark. 上の lemma は、次のようにも云える： $\mathcal{F}(Df^\alpha)$ の $\Omega^v(\mathbb{R})$ 上の hyperfunction 解は、一意的に $V^v(\mathbb{R})$ 上の解にのびせる。以下、両者を、区別しない。

証明 holonomic D -module M に対し $\mathbb{D}(M)$ を M の dual とする。すなわち

$$\mathbb{D}(M) = \left(\mathbb{R} \text{Hom}_D(M, D) \otimes_{\mathbb{C}[V]} \mathbb{C}[V](dx_1 \cdots dx_n)^{\otimes -1} \right) [n].$$

すると、

$$Df^\alpha = \mathbb{D}(Df^{-\alpha+k'}) \quad (\alpha \in A^-, k' \in \mathbb{Z}, k' \gg 0)$$

が、わかる。(cf. §7 Appendix.)

$$\begin{aligned} \therefore \mathcal{F}(Df^\alpha) &= \mathcal{F} \mathbb{D}(Df^{-\alpha+k'}) = \mathbb{D} \mathcal{F}(Df^{-\alpha+k'}) \\ &= \mathbb{D}(D u_{\alpha, k'} [f^{v-1}]) \quad (k' \gg 0) \end{aligned}$$

最後の等式は、定理 B (D-module version) による。定義より、

$$\begin{aligned} B &= \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}\Gamma_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{C}), \mathbb{R}\Gamma_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{O}^{\mathrm{an}})) \\ &\cong \mathbb{R}\Gamma_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{O}^{\mathrm{an}})[n] \end{aligned}$$

但し、 $\mathcal{O}^{\mathrm{an}}$ は、holomorphic functions の sheaf, 最後の同型は canonical ではない。

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}\Gamma_{(V^{\vee}-\Omega^{\vee})(\mathbb{R})} \mathbb{R}\mathrm{Hom}_D(\mathcal{F}(Df^d), B) \\ &\cong \mathbb{R}\Gamma_{(V^{\vee}-\Omega^{\vee})(\mathbb{R})} \mathbb{R}\mathrm{Hom}_D(\mathcal{F}(Df^d), \mathcal{O}^{\mathrm{an}}[n]) \\ &= \mathbb{R}\Gamma_{(V^{\vee}-\Omega^{\vee})(\mathbb{R})} \mathbb{R}\mathrm{Hom}_D(D(Du_{d,k}[f^{\vee-1}]), \mathcal{O}^{\mathrm{an}}[n]) \\ &= \mathbb{R}\Gamma_{(V^{\vee}-\Omega^{\vee})(\mathbb{R})} \mathbb{R}\mathrm{Hom}_D(\mathcal{O}^{\mathrm{an}}, D^{\mathrm{an}}u_{d,k}[f^{\vee-1}])[n] \\ &= \mathbb{R}\Gamma_{(V^{\vee}-\Omega^{\vee})(\mathbb{R})} \mathbb{R}\Gamma_{\Omega^{\vee}} \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\mathrm{an}}}(\mathcal{O}^{\mathrm{an}}, D^{\mathrm{an}}u_{d,k}[f^{\vee-1}])[n] \\ &= 0. \quad (D^{\mathrm{an}} := \mathcal{O}^{\mathrm{an}} \otimes_{\mathbb{C}[V^{\vee}]} D) \end{aligned}$$

∴ $K^{\circ} = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_D(\mathcal{F}(Df^d), B)$ とおくと

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}\Gamma_{(V^{\vee}-\Omega^{\vee})(\mathbb{R})} K^{\circ} & \rightarrow & K^{\circ} & \rightarrow & \mathbb{R}\Gamma_{\Omega^{\vee}(\mathbb{R})} K^{\circ} & \xrightarrow{+1} & \text{distinguished} \\ \parallel & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{array}$$

$$\therefore K^{\circ} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{\Omega^{\vee}(\mathbb{R})} K^{\circ}$$

$$\therefore \mathbb{R}\Gamma(V^{\vee}(\mathbb{R}), \mathbb{R}\mathrm{Hom}_D(\mathcal{F}(Df^d), B))$$

$$\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma(V^{\vee}(\mathbb{R}), \mathbb{R}\Gamma_{\Omega^{\vee}(\mathbb{R})} \mathbb{R}\mathrm{Hom}_D(\mathcal{F}(Df^d), B))$$

$$= \mathbb{R}\Gamma(\Omega^{\vee}(\mathbb{R}), \mathbb{R}\mathrm{Hom}_D(\mathcal{F}(Df^d), B))$$

Grothendieck のスペクトル列

$$E_2^{i,j} = H^i(V^{\vee}(\mathbb{R}), \mathrm{Ext}_D^j(\mathcal{F}(Df^d), B))$$

$$\Rightarrow H^{i+j}(\mathbb{R}\Gamma(V^{\vee}(\mathbb{R}), \mathbb{R}\mathrm{Hom}_D(\mathcal{F}(Df^d), B)))$$

及び、 $V^v(\mathbb{R})$ を $\Omega^v(\mathbb{R})$ におきかえたものの E_2^{00} -terms を比べて、上記 lemma を得る。 \square

Remark. 上の証明で、derived category の理論における記号を、ことわりなく使った。derived category については：

J.L. Verdier : *Catégories dérivées (Etat 0)* SLN. 569

ただし、私には p268 の次の行が、わかりません：

- La somme de deux triangles distingués est distinguée.

$(X_i, Y_i, Z_i, u_i, v_i, w_i)$ ($i=1, 2$) が distinguished であれば、

$(X_1+X_2, Y_1+Y_2, Z_1+Z_2, u_1+u_2, v_1+v_2, w)$ が distinguished に

なるように、 w をえらぶことはできますか、 $w = w_1 + w_2$ と

とれるかどうか、私にはわかりません。なお、[Beilinson -

Bernstein - Deligne : *Astérisque 100*] の Remark 1.1.13 の

axiom を (TR1) ~ (TR4) につけ加えれば、 $w = w_1 + w_2$ と、と

れることは、証明できます。(この項、読者への質問)

lem. 1 と lem. 4 をあわせて

Lemma 5. $\mathcal{F}(Df^d)$ の $B(V^v(\mathbb{R}))$ -solutions の全体は、 $\{ |f_j^v|_h^v \mid$
 $j=1, 2, \dots, l \}$ ではられる l 次元ベクトル空間。ただし、
 $d \in A_-$ とする。

Lemma 6. $\alpha \in A_+$ であれば.

$$\dim \text{Hom}_D(Df^\alpha, \mathcal{B})_0 = l$$

ここで $(\dots)_0$ は V の原点 0 における stalk を意味する。

\therefore $j: \Omega \rightarrow V = \mathbb{C}^n$ } を inclusion mappings とする。
 $j_{\mathbb{R}}: \Omega(\mathbb{R}) \rightarrow V(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ }

$$\begin{aligned} & \mathbb{R} \text{Hom}_D(Df^\alpha, \mathcal{B}) \\ & \cong \mathbb{R} \text{Hom}_D(Df^\alpha, \mathbb{R}\Gamma_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{O}^{\text{an}})) [n] \\ & = \mathbb{R}\Gamma_{\mathbb{R}^n} \mathbb{R} \text{Hom}_D(Df^\alpha, \mathcal{O}^{\text{an}}) [n] \\ & = \mathbb{R}\Gamma_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}j_* (\mathbb{C}f^\alpha)) [n] \quad (\text{Appendix 参照}) \end{aligned}$$

ここで $\mathbb{C}f^\alpha$ は Ω 上の locally constant sheaf.

$$\begin{aligned} & = \mathbb{R}j_{\mathbb{R}*} \mathbb{R}\Gamma_{\Omega(\mathbb{R})}(\mathbb{C}f^\alpha) [n] \\ & \cong \mathbb{R}j_{\mathbb{R}*} \left(\bigoplus_{j=1}^l \mathbb{C}_{\Omega_j} \right) \end{aligned}$$

ここで \mathbb{C}_{Ω_j} は Ω_j 上の定数層 \mathbb{C}_{Ω_j} を $\Omega(\mathbb{R})$ 全体に zero extension したものである。

$$\therefore \text{Ext}_D^p(Df^\alpha, \mathcal{B})_0 \cong \bigoplus_{j=1}^l \varinjlim_U H^p(\Omega_j \cap U, \mathbb{C})$$

ここで U は 0 の近傍。

$$\therefore \text{Hom}_D(Df^\alpha, \mathcal{B}) \cong \bigoplus_{j=1}^l \varinjlim_U \Gamma(\Omega_j \cap U, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^l \quad \square$$

Remark. 上記 lemma は f を任意の多項式としても成立する。

$\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) > 0$ の時.

$$|f|_j^s(x) = \begin{cases} |f(x)|^s & (x \in \Omega_j) \\ 0 & (x \notin \Omega_j) \end{cases}$$

とすると、連続関数が定まる。s について解析接続する：

$\operatorname{Re}(\Delta) > -m$ ならば

$$|f|_j^s := (b(\Delta) b(\Delta+1) \cdots b(\Delta+m-1))^{-1} f^\vee (\operatorname{grad})^m |f|_j^{s+m} \times (\operatorname{sgn}(f|_{\Omega_j}))^m$$

$|f|_j^s$ は、s について、全平面上、一価有理型関数になり、

$\Delta \in A_+$ では、正則になる。 $\left(\operatorname{sgn}(*) = \begin{cases} 1 & (* > 0) \\ -1 & (* < 0) \end{cases} \right)$

Lemma 7. $\Delta \in A_+$ であれば、 Df^Δ の $(\mathcal{B}(V(\mathbb{R})))$ -solutions の全体は、 $\{|f|_j^\Delta \mid j=1, 2, \dots, l\}$ によって張られる l 次元ベクトル空間。

∴) f が、同次多項式であるから、

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Df^\Delta, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Df^\Delta, \mathcal{B}).$$

従って、lem. 6 より、上記 lemma を得る。▣

定理 B (hyperfunction version)

(i) $|f|_j^{-\Delta} |h^\vee|$ は、解析接続により、 Δ について全平面で一価有理型になり、 A_- 上では、正則になる。

(ii) ある有理型関数 $c_{ij}(\Delta)$ が存在して、

$$\mathcal{F}(|f|_i^\Delta) = \sum_{j=1}^l c_{ij}(\Delta) |f|_j^{-\Delta} |h^\vee| \quad (i=1, 2, \dots, l)$$

さらに $c_{ij}(\Delta)$ は、 A_+ 上では、正則。

\therefore) $\alpha \in A_+ \cap A_-$ であれば, Lem. 5 と Lem. 7 より, ある函数 $C_{ij}(\alpha)$ があって,

$$(*) \quad \mathcal{F}(|f|_i^\alpha) = \sum_{j=1}^{\ell} C_{ij}(\alpha) |f^v|_j^{-\alpha} |h^v| \quad (i=1, 2, \dots, \ell)$$

$(C_{ij}(\alpha))$ は, 2つの bases の間の変換行列であるから, その行列式は $\neq 0$. $(*)$ を $\Omega^v(\mathbb{R})$ に制限して考えよう. $|f|_i^\alpha$ 従って $\mathcal{F}(|f|_i^\alpha)$ は, α について, 全平面一価有理型で, A_+ 上では正則. $|f^v|_j^{-\alpha} |h^v| \Big|_{\Omega^v(\mathbb{R})}$ は, 全平面で正則で, $\mathcal{F}(Df^\alpha)$ の

$B(\Omega^v(\mathbb{R}))$ -solutions 全体がなすベクトル空間の basis になる.

故に $C_{ij}(\alpha)$ は, 全平面一価有理型で, A_+ 上で正則になる.

従って, $(C_{ij}(\alpha))^{-1}$ は, 全平面一価有理型で, $\mathcal{F}(|f|_i^\alpha)$ も,

えうであったことを思い出すと, $(*)$ より, $|f^v|_j^{-\alpha} |h^v|$ も,

全平面一価有理型であることが, わかる. もし, $|f^v|_j^{-\alpha} |h^v|$

が, p 次の極を $\alpha = \alpha_0 (\in A_-)$ で, 持ったとすると,

$$\left(|f^v|_j^{-\alpha} |h^v| \times (\alpha - \alpha_0)^p \right) \Big|_{\alpha = \alpha_0}$$

は, $\mathcal{F}(Df^\alpha)$ の $B(V^v(\mathbb{R}))$ -solution であり, その support

は, $(V^v - \Omega^v)(\mathbb{R})$ に含まれる. (\odot $\Omega^v(\mathbb{R})$ に制限すれば,

正則であった.) これは, Lem. 4 と矛盾する. 故に, $|f^v|_j^{-\alpha} |h^v|$

は, A_- 上で, 正則. \square

Remark. Sato-Shintani : Ann. Math. 100 (1974) では, さらに C_{ij}

が, Γ 函数と, exponential factor の積に示される.

我々の situation では、(解析的な正当化は、少し難にするが)

[Sato-Shintani] の (1.16), (1.17), (1.18) の部分か。以下の形になる:

$$\varepsilon_i = \operatorname{sgn}(f|_{\Omega_i}) \text{ とすると}$$

$$(1.16') \quad f^\vee(\operatorname{grad}_x) t \delta(t - |f(x)|_i) = \varepsilon_i b(-\frac{\partial}{\partial t} t) \delta(t - |f(x)|_i), \quad (t > 0)$$

⊙ $\int_0^\infty (\quad) t^s dt$ なる変換により、左辺 $\mapsto f^\vee(\operatorname{grad}) |f(x)|_i^{s+1}$
右辺 $\mapsto \varepsilon_i b(s) |f(x)|_i^s \quad \square$

$\{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\} =: \mathbb{R}_{>0}$ 上の実解析関数 $F_{ij}(t)$ ($1 \leq i, j \leq l$) が存在して、
(1.17')
$$\mathcal{F}(\delta(t - |f(x)|_i))(y) = \int_{V(\mathbb{R})} (-) e^{\sqrt{-1} \langle x, y \rangle} dx$$

$$\mathcal{F}(\delta(t - |f(x)|_i))(y) = \int_0^\infty F_{ij}(tu) |h^\vee(y)| \delta(u - |f^\vee(y)|_i) \frac{du}{u}$$

($t > 0, y \in \Omega_j^\vee$)

⊙ $\varphi(y) \in \mathcal{C}[V^\vee]$, $\varphi \equiv 0$ on O_i^\vee なら、 $\int_0^\infty (\quad) t^s dt$ により、

$\varphi(y) \mathcal{F}(\delta(t - |f(x)|_i))(y) \mapsto 0$. 故に 変換する前から "0". 一方、

$$\mathcal{F}(\delta(\phi(y)t - |f(x)|_i))(y) = (\phi \phi_0)(y) \mathcal{F}(\delta(t - |f(x)|_i))(y), \quad (\phi \in G(\mathbb{R})^+, \phi_0 =$$

$$\det \phi) \text{ であるから, } \mathcal{F}(\delta(t - |f(x)|_i))(y) = \tilde{F}_{ij}(t, y) |h^\vee(y)| |f^\vee(y)|^{-1},$$

($t > 0, y \in \Omega_j^\vee$)

$$\text{とおくと, } \tilde{F}_{ij}(\phi(y)t, y) = \tilde{F}_{ij}(t, y), \quad (y \in \Omega_j^\vee \cap O_i^\vee).$$

\therefore 一変数関数 $F_{ij}(t)$ が存在して、 $\tilde{F}_{ij}(t, y) = F_{ij}(t |f^\vee(y)|_i)$, ($y \in \Omega_j^\vee \cap O_i^\vee$).

$$\therefore \mathcal{F}(\delta(t - |f(x)|_i))(y) = F_{ij}(t |f^\vee(y)|_i) |h^\vee(y)| |f^\vee(y)|^{-1}$$

$$= \int_0^\infty F_{ij}(tu) |h^\vee(y)| \delta(u - |f^\vee(y)|_i) \frac{du}{u}$$

$$(t > 0, y \in \Omega_j^\vee) \quad \square$$

$$\varepsilon_j^\vee = \operatorname{sgn}(f^\vee|_{\Omega_j^\vee}) \text{ とすると}$$

$$(1.18') \quad b(-\frac{\partial}{\partial t} t) F_{ij}(t) = \varepsilon_i \varepsilon_j^\vee (-\sqrt{-1})^d t F_{ij}(t)$$

$$(d = \deg f = \deg f^\vee)$$

⊙ $f^{\vee}(\frac{1}{\sqrt{t}}y) \mathcal{F}(\delta(t-|f^{\vee}(y)|_i)) (y) = \varepsilon_i b(-\frac{\partial}{\partial t} t) \mathcal{F}(\delta(t-|f^{\vee}(y)|_i)) (y)$
 ($y \in \Omega_j^{\vee}$, $t > 0$; (1.16') の Fourier 変換) (1.17') より.

$$\text{左辺} = \int_0^{\infty} \frac{F_{ij}(tu) \varepsilon_j^{\vee} (\frac{1}{\sqrt{t}})^d tu \cdot |h^{\vee}(y)| \delta(u-|f^{\vee}(y)|_i)}{u} du$$

$$\text{右辺} = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_i b(-\frac{\partial}{\partial t} t) F_{ij}(tu) \cdot |h^{\vee}(y)| \delta(u-|f^{\vee}(y)|_i)}{u} du$$

下線分が等しくなり, $u=1$ として (1.18') を得る \square

ここまで [Sato-Shintani] の議論の formal な部分のみを抽出したものである。解析的な正当化は [Sato-Shintani] と同様にしてできる。

このあと, [Sato-Shintani] では, 無限遠に不確定特異点を持つ微分方程式 (1.18') の解析により, F_{ij} の形を決め [S-S; Thm 1] を証明する。

Appendix (§7)、ここでは, D^{an} を D と書く。

f を正則関数とし, ($f \in \mathcal{O}_x^{an}$)

$$N = N_f = D[\Delta] f^{\Delta}, \quad N_{\alpha} = N_f / (\Delta - \alpha) N_f, \quad f^{\alpha} := (f^{\Delta} \bmod (\Delta - \alpha) N)$$

とすると, $N_{\alpha} = Df^{\alpha}$.

$$P_0(\Delta, \alpha, \partial_{\Delta}) f^{\Delta+\alpha} = b_f(\alpha) f^{\Delta} \quad (\text{Bernstein の等式})$$

とし, $P_0(\alpha) = P_0(\Delta, \alpha, \partial_{\Delta})$, $b(\alpha) = b_f(\alpha)$ と略す。 $\mathbb{C}[\Delta, t]$ を

$t\Delta - \Delta t = t$ なる関係式で定まる \mathbb{C} -algebra とし, $D[\Delta t] = D_{\partial_{\Delta}} \mathbb{C}[\Delta t]$
 ($\Leftrightarrow \Delta t = t(\Delta - 1)$)

とする。 N は $t \cdot P(\alpha) f^\alpha = P(\alpha+1) f \cdot f^\alpha$ となる α について $D[\alpha, t]$ -module になる。 §7 におけると同様

$$A_- = \{ \alpha \in \mathbb{C} \mid b(\alpha - j) \neq 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \}$$

$$A_+ = \{ \alpha \in \mathbb{C} \mid b(\alpha + j) \neq 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \}$$

とおく。

Lemma 1. $N' \in D[\alpha, t]$ -module とし。

$$\alpha - \alpha - jk : N'/t^k N' \rightarrow N'/t^k N' \quad (j = 0, 1, \dots, (l-1))$$

が injective であるならば、 $(\alpha - \alpha)N' \cap t^{kl} N' = (\alpha - \alpha)t^{kl} N'$ 。

∴) \supset は trivial. \subset を示す。条件より

$$(\alpha - \alpha - jk) N' \cap t^k N' \subset (\alpha - \alpha - jk) t^k N' \quad (j = 0, 1, \dots, l-1)$$

$$\therefore (\alpha - \alpha)N' \cap t^{kl} N' = (\alpha - \alpha)N' \cap t^k N' \cap t^{kl} N' \subset (\alpha - \alpha)t^k N' \cap t^{kl} N'$$

$$= t^k (\alpha - \alpha - k) N' \cap t^{(k-1)l} N' \subset \dots \subset t^{kl} (\alpha - \alpha - kl) N' \cap N'$$

$$= (\alpha - \alpha)t^{kl} N'$$



Lemma 2 $b'(\alpha) (N'/tN') = 0$ ($b'(\alpha) \in \mathbb{C}[\alpha]$)

$$b'(\alpha + j) \neq 0 \quad (j = 0, 1, \dots, m-1)$$

ならば、 $(\alpha - \alpha)N' \cap t^m N' = (\alpha - \alpha)t^m N'$

∴) $(b'(\alpha), \alpha - \alpha - j) = 1$ ($j = 0, 1, \dots, m-1$) より。

$$\exists p_j(\alpha), q_j(\alpha) \quad p_j(\alpha)b'(\alpha) + q_j(\alpha)(\alpha - \alpha - j) = 1. \quad (j = 0, 1, \dots, m-1)$$

∴ $1 = q_j(\alpha)(\alpha - \alpha - j)$ on N'/tN' ∴ $\alpha - \alpha - j : N'/tN' \rightarrow N'/tN'$ は、

isomorphism. 特に injective. lem. 1 ($k=1, l=m$) を使って、

結論を得る。

Lemma 3 (i) $b(\alpha-j) \neq 0 \quad (j=1, 2, \dots, m) \Rightarrow Df^\alpha \xrightarrow{\sim} Df^{\alpha-m}$.
 (ii) $b(\alpha+j) \neq 0 \quad (j=0, 1, 2, \dots, m-1) \Rightarrow Df^\alpha \xleftarrow{\sim} Df^{\alpha+m}$.
 (iii) $\alpha \in A \Rightarrow Df^\alpha \xrightarrow{\sim} Df^\alpha[f^{-1}]$.

\therefore (i) $f^\alpha \mapsto f^m \cdot f^{\alpha-m}$ の逆写像の作り方は, Thm B (D-module version) の証明を参照して下さい。(ii) も同じ。(iii) について, $Df^\alpha \rightarrow Df^\alpha[f^{-1}]$ が onto になることは同様にしてわかる。この写像で, $Pf^\alpha \mapsto 0$ となったとする。and $P=m$ とすると,

$$\exists a(\alpha, x) \in \mathcal{O}^{\text{an}}[\Delta] \quad Pf^\alpha = a(\alpha, x) f^{\alpha-m} \quad \text{on } f^{-1}\mathbb{C}^x$$

$$\therefore a(\alpha, x) \equiv 0 \quad \text{on } f^{-1}\mathbb{C}^x \quad \therefore a(\alpha, x) = 0.$$

$\alpha = \alpha_1$ で, $a(\alpha_1, x) = (\alpha_1 - \alpha) a_1(\alpha_1, x)$ とすると,

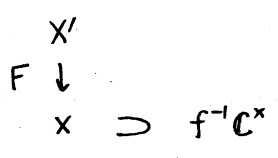
$$Pf^{\alpha+m} = a(\alpha+m, x) f^\alpha = (\alpha+m - \alpha) a_1(\alpha+m, x) f^\alpha$$

$$\in (\alpha - (\alpha-m))N \cap t^m N$$

しかるに, $b(\alpha-m+j) \neq 0 \quad (j=0, 1, \dots, m-1)$.

$$\therefore Pf^{\alpha+m} \in t^m (\alpha - \alpha) N \quad \therefore Pf^\alpha \in (\alpha - \alpha) N \quad \therefore Pf^\alpha = 0 \quad \square$$

(X, f) に対して, $f^{-1}(0)$ の特異点を blow up して,



を作り, $f' := f \circ F$ とおく。 $f'^{-1}(0)$ が normal crossing になってくるものとする。(特異点の解消)

$$N' = \int_F^0 N_{f'} \quad N'' = D[\Delta] (|_{X \leftarrow X'} \otimes f'^\alpha)$$

とおく。 $N' \supset N'' \xrightarrow{\exists \varphi} N_f$ 。 (Kashiwara: Invent. math. 38 (1976) の (5.9), 実際, 付録 (E7) のここまでの部分は, この論文を, 書き写しているにすぎない。) この時 $\ker \varphi$ は, holonomic $D[x, t]$ -module になるから, $m \gg 0$ ならば,

(*) $t^m \ker \varphi = 0$. [Kashiwara; (5.11)]

Lemma 4. (i) $t^m N'' \xrightarrow{\varphi} t^m N_f$
 (ii) $t^m N'' / (\lambda - \alpha) t^m N'' \xrightarrow{\sim} Df^{\alpha+m}$

\Rightarrow (i) $u \in N''$, $\varphi(t^m u) = 0$ とする。 $t^m \varphi(u) = 0$ 。 $t: N_f \rightarrow N_f$ は injective だから, $\varphi(u) = 0$, $u \in \ker \varphi$, $t^m u = 0$ 。 (ii) は, 明白 \square

Lemma 5. $\int_F^i N_{f'} \ (i > 0)$ は, holonomic $D[x, t]$ -modules

$\Rightarrow \text{ch} \left(\int_F^i N_{f'} \right) \subset \{ (x, \xi) \in T^*X \mid (x, \xi) \in \text{ch} N_f, x \in f^{-1}(0) \}$
 $\subsetneq W_f = \text{ch} N_f$ (cf. [Kashiwara]) \square

m を大きくとり直し,

(**) $t^m \int_F^i N_{f'} = 0 \quad \forall i > 0$

とする。

Lemma 6. $b_{f'}(\alpha + j) \neq 0 \ (j=0, 1, \dots, m-1)$ であれば,
 (i) $n' / (\lambda - \alpha) n' \xrightarrow{\sim} \int_F^0 Df'^{\alpha}$.
 (ii) $\int_F^i Df'^{\alpha} = 0 \quad (i > 0)$

\Rightarrow (i) $0 \rightarrow N_{f'} \xrightarrow{\lambda - \alpha - m} N_{f'} \longrightarrow Df'^{\alpha+m} \rightarrow 0$
 $\quad \downarrow t^m \quad \quad \downarrow t^m \quad \quad \downarrow$
 $0 \rightarrow N_{f'} \xrightarrow{\lambda - \alpha} N_{f'} \longrightarrow Df'^{\alpha} \rightarrow 0$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \int_F^0 Df'^{d+m} & \longrightarrow & \int_F^1 N_{f'} \\ & & & & \downarrow \wr & & \downarrow t^m = 0 \\ 0 \longrightarrow & \int_F^0 N_{f'} & \xrightarrow{\alpha-d} & \int_F^0 N_{f'} & \longrightarrow & \int_F^0 Df'^d & \longrightarrow & \int_F^1 N_{f'} \\ \therefore & 0 \longrightarrow & \int_F^0 N_{f'} & \xrightarrow{\alpha-d} & \int_F^0 N_{f'} & \longrightarrow & \int_F^0 Df'^d & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(ii) (i) と同様は

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \int_F^1 Df'^{d+m} & \longrightarrow & \int_F^2 N_{f'} \\ & & & & \downarrow \wr & & \downarrow t^m = 0 \\ 0 \longrightarrow & \int_F^1 N_{f'} & \xrightarrow{\alpha-d} & \int_F^1 N_{f'} & \longrightarrow & \int_F^1 Df'^d & \longrightarrow & \int_F^2 N_{f'} \\ \therefore & 0 \longrightarrow & \int_F^1 N_{f'} & \xrightarrow{\alpha-d} & \int_F^1 N_{f'} & \longrightarrow & \int_F^1 Df'^d & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

lem. 5 より, $\int_F^1 N_{f'}$ は holonomic t^m から, $0 = \int_F^1 Df'^d$. この議論をくり返し, 結論を得る. \square

Lemma 7. $b_{f'}(d+j) \neq 0$ ($j = 0, 1, \dots, 2m-1$) とすると.

$$t^m N' / (\alpha-d)t^m N' \xrightarrow{\sim} \int_F^0 Df'^d.$$

\therefore α も, $\alpha+m$ も. lem. 6 の条件を満たすから, lem. 6 の証明より

$$\begin{array}{ccccccc} (\star) & 0 \longrightarrow & N' & \xrightarrow{\alpha-d-m} & N' & \xrightarrow{\varphi_{\alpha+m}} & \int_F^0 Df'^{d+m} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow t^m & & \downarrow t^m & & \downarrow \wr \\ & 0 \longrightarrow & N' & \xrightarrow{\alpha-d} & N' & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & \int_F^0 Df'^d \longrightarrow 0 \end{array}$$

snake lemma より.

$$N'/t^m N' \xrightarrow{\sim} N'/t^m N'.$$

lem. 1 ($k=m, l=1$) を使, $(\alpha-d)N' \cap t^m N' = (\alpha-d)t^m N'$.

再び, (\star) を使, \therefore

$$\int_F^0 Df'^d = \varphi_\alpha(t^m N') \xrightarrow{\sim} \frac{t^m N'}{(\alpha-d)N' \cap t^m N'} = \frac{t^m N'}{(\alpha-d)t^m N'} \quad \square$$

N'/N'' は holonomic $D[A, t]$ -module だから、 m を大きくとりなおして、

(**) $t^m(N'/N'') = 0$

としておく。 $t^m N' \subset N'' \subset N'$ 。 二れより、次の morphisms を得る:

$$\frac{t^{2m} N'}{(s-d)t^{2m} N'} \rightarrow \frac{t^{2m} N''}{(s-d)t^{2m} N''} \rightarrow \frac{t^{2m} N'}{(s-d)t^{2m} N'} \rightarrow \frac{t^m N'}{(s-d)t^m N'}$$

$b_{f'}(d+j) \neq 0$ ($j=0, 1, \dots, 2m-1$) とする。 lem. 4 (ii) と lem. 7 より、

二れらの morphisms は、次の morphisms を誘導する:

$$\int_F^0 Df'^d \rightarrow Df^{d+2m} \rightarrow \int_F^0 Df'^d \rightarrow Df^{d+2m}$$

$b_f(d+j) \neq 0$ ($j=0, 1, \dots, 2m-1$) とする。

$$\int_F^0 Df'^d \xrightarrow{\text{identity}} Df^{d+2m} \xrightarrow{\text{identity}} \int_F^0 Df'^d \xrightarrow{\text{identity}} Df^{d+2m} = Df^d$$

$$\therefore Df^d \simeq \int_F^0 Df'^d$$

lem. 6 (ii) より、

$$\int_F^0 Df'^d = \tau_{\leq 0} \int_F Df'^d \stackrel{\text{g.i.s.}}{\simeq} \int_F Df'^d$$

また、[Kashiwara] による、

$$b_f(s) \mid b_{f'}(s) b_{f'}(s+1) \cdots b_{f'}(s+n) \quad \exists n$$

であるから、以上をまとめ、次の結果を得る:

命題 (i) $d \in A_- \Rightarrow Df^d \simeq Df^d[f^{-1}]$
 (ii) $d \in A_+ \Rightarrow Df^d = \int_F^0 Df'^d = \int_F Df'^d$
 (iii) $d \in A_+, k \gg 0 \Rightarrow Df^d = \mathbb{D}(Df^{-d-k})$

命題の最後の部分は、次のようにして示せる:

$\alpha \in A_+$, $k \gg 0$ とすると. ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} Df^\alpha &= \int_F Df'^\alpha = \int_F \mathbb{D}(f'^{-\alpha-k'}) = \mathbb{D} \int_F Df'^{-\alpha-k'} \\ &= \mathbb{D}(Df^{-\alpha-k}) \end{aligned} \quad (\odot F = \text{projective})$$

ここで, $k' \in \mathbb{Z}$ は, $\operatorname{Re}(-\alpha-k') < 0$ となるようにとれば十分.

系 $j: f^{-1} \mathbb{C}^x \hookrightarrow X$ を inclusion mapping とすると.

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}_D(\mathcal{O}^{\text{an}}, Df^\alpha) = \begin{cases} Rj_* (\mathbb{C}f^{-\alpha}), & (\alpha \in A_-) \\ j_! (\mathbb{C}f^{-\alpha}), & (\alpha \in A_+) \end{cases}$$

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}_D(Df^\alpha, \mathcal{O}^{\text{an}}) = \begin{cases} j_! (\mathbb{C}f^\alpha), & (\alpha \in A_-) \\ Rj_* (\mathbb{C}f^\alpha), & (\alpha \in A_+) \end{cases}$$

Remark. 最後の系を除いて, $\mathcal{O}^{\text{an}} = \{ \text{holomorphic functions} \}$, $D^{\text{an}} = \mathcal{O}^{\text{an}} \otimes D$ を, $\mathcal{O} = \mathcal{O}^{\text{alg}} = \{ \text{regular functions} \}$, D とおきかえても, そのまま成立する。この付録の内容は, 専門家にとっては, よく知られたことと思うが, 読者の便利のために, ここに書いておいた。

Remark. "D-module version" を "Hodge module version" に書きかえることができる。また, それから, "reduction mod p " で, 有限体上の version も得られる。