数理解析研究所講究録
718巻 1990年 1-128

概均質ベクトル空間の理論

行者明彦　述
(Gyoja Akihiko)
木村達雄　記
(Tatsuo Kimura)

まえがき

これは、１９８８年１０月２５日（火）から２８日（金）にわたり筑波大学数学系で行われた行者明彦氏による集中講義を、木村達雄のノートに基づき、書き表したものです。内容は、概均質ベクトル空間の基本定理というべき、相対不変式の複素べきに関する佐藤幹夫先生の理論を見通しよく、しかも今まで必要だった正則性という基本的な仮定もとり除いて証明を与えており、大変興味深いものとなっています。既に§２に於て、行者氏自身による諸結果が表れており、従来の基本的な文献　佐藤幹夫述、新谷卓郎記「概均質ベクトル空間の理論」数学の歩み１５－１とかなり雰囲気の違ったものになっています。

時間を延長してまで、丁寧にわかりやすく講義をして下さった行者明彦氏に心から感謝致します。

１９８８年１１月１６日、木村達雄

概均質ベクトル空間の理論

概均質ベクトル空間の理論というのは佐藤幹夫氏によって始められた理論で、代数解析学の発展の大きな原動力の一つとなり、また整数論とか表現論への応用もあります。ここでは、自分なりの理解に従って概均質ベクトル空間の理論についてお話します。内容は

§1　準備、Appendix

§2　概均質ベクトル空間の構造

§3　D-module

§4　基本定理、Appendix

§5　実例

§6　Kac-Moody Lie algebra

§1では代数多様体とか代数群などあとで使われることを準備します。§3のD-moduleというのは線型微分方程式系を代数的にとらえ直したもので§4で使われる解析的な知識の準備を与えます。§4は概均質ベクトル空間の理論のハイライトといって良い所です。§1から§4までが本講義、§5が補講、§6がprivate seminarで、§1から§4までは、予備知識を殆ど仮定しません。但しAppendixは、それとは別で、必要な知識を仮定します。

§1. 準備

Xを集合，C_XをX上の$\mathbb{C}$-valued functions全体，$\mathbb{C}[X]$をC_Xの$\mathbb{C}$-subalgebraで単位元1を含むものとする。このときpair $(X, \mathbb{C}[X])$を仮に，ここだけの話でringed setとよぶことにする。

定義1. 写像 $f : X \to Y$ が $(X, \mathbb{C}[X])$ から $(Y, \mathbb{C}[Y])$ への morphism であるとは，$\forall \varphi(y) \in \mathbb{C}[Y]$ に対して，$\varphi(f(x)) \in \mathbb{C}[X]$ となること。
また，このfが isomorphism であるとは，f＝全単射かつ f^{-1} も morphism となることである。

定義2. $\mathbb{C}[X]$の元を，X上の regular function とよぶ。

定義3. $\{\bigcap_{\varphi \in A} \varphi^{-1}(0) ; A \subset \mathbb{C}[X]\}$ の形のXの部分集合をXの閉集合として，Xにtopologyが入る。
これをXのZariski-topologyという。
ringed set $(X, \mathbb{C}[X])$の閉部分集合$Y \subset X$も
$\mathbb{C}[Y] = \{\varphi|_X ; \varphi \in \mathbb{C}[X]\}$により自然に
ringed set $(Y, \mathbb{C}[Y])$になる。

定義4. $\mathbb{C}$上のn変数多項式環 $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$ の元は $\mathbb{C}^n$上の$\mathbb{C}$-valued function と考えられるから, ringed set $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n])$ が得られる。これを affine space とよぶ。いちいち $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$ を記すのも面倒なので, $\mathbb{C}^n$と略記する。この場合の regular function は多項式で, Zariski-topology に関する閉集合とは 多項式の共通零点ということになる。 $\mathbb{C}^n$の(Zariski-topology に関して)閉集合と同形な ringed set を affine variety とよぶ.(既約性は仮定しない). affine variety 上の regular function とは 多項式をその variety に制限したものである.

<u>Remark</u> affine variety には 2種類の topology が入る. 即ち

(Z) Zariski topology, と

(C) Classical topology, 即ち $\mathbb{C}^n$の部分空間としての topology.

区別のため (Z) の場合には, Zariski-closed (又は単に (Z)-closed) 等 と記すことにする.

Exercise 1. X, Y をそれぞれ $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^m$ の (Z)-closed set とする。そのとき写像 $f: X \to Y$ が morphism である為の必要十分条件は, $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ の元 $F_1(x), \cdots, F_m(x)$ が存在して $F(x) = (F_1(x), \cdots, F_m(x))$ により写像 $F: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ を作るとき $f = F|_X$ となることである。これを示せ。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \supset & X \\ F\downarrow & & \downarrow F|_X = f \\ \mathbb{C}^m & \supset & Y \end{array}$$

Exercise 2. (i) affine variety の (Z)-closed subset も自然に affine variety になる。

(ii) affine varieties の直積も affine variety になる。

Lemma 1. $\mathbb{C}^n$ の部分集合 U を空でない (Z)-open set として $\mathbb{C}[U] \overset{\text{def}}{=} \left\{ \left.\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right|_U ; \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n], \ \varphi_1(u) \neq 0 \text{ for } {}^\forall u \in U \right\}$ とおく。このとき, $(U, \mathbb{C}[U])$ が affine variety となる必要十分条件は ある $f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ により $U = f^{-1}(\mathbb{C}^\times) = \{ x \in \mathbb{C}^n \mid f(x) \in \mathbb{C}^\times \}$ $\left(= \{ x \in \mathbb{C}^n ; f(x) \neq 0 \} \right)$ と表わせること

但し $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$.

☺ $U = f^{-1}(\mathbb{C}^{\times})$ のとき

$$U \xrightarrow{\sim} \{(x,t)\in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \mid f(x)t-1=0\}$$

$$x \longmapsto (x, f(x)^{-1})$$

$$x \longleftarrow\!\!\shortmid (x, t)$$

は isomorphism を与えるから $(U, \mathbb{C}[U])$ は affine variety である。逆の証明は略す。 //

例. $GL_n(\mathbb{C}) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2} ; \det X \neq 0\}$ は affine variety である。

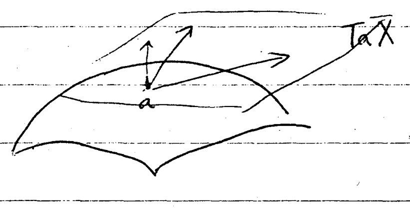
tangent space

X を affine variety とすると，いくつかの多項式 $\varphi_1, \cdots, \varphi_N$ の共通零点として表わせる： $X = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_N(x) = 0\}$.

($\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ の ideal はすべて有限生成であるから，多項式は有限個で十分である)

このとき，直観的には $a \in X$ に対して，

$T_aX = \{$点 a で X に接するベクトル$\}$ としたい。これでは勿論定義にならないが，図のように点 a に接するベクトルを



全部集めてきたのが tangent space である。そこでもうひとつ

なかば数学的，なかば直観的な定義を与えよう。

Xの中の曲線 $x(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))\in X\ (t\in\mathbb{C})$ で $x(0)=a\in X$ なるものを考えて，$t=0$で微分したもの $\left.\dfrac{d}{dt}x(t)\right|_{t=0}$ を $A=(A_1,\cdots,A_n)$ とおけば，T_aXの元が得られ，逆にT_aXの元はこのようにして得られる。

さて $x(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ がXの中にあるということは $\varphi_i(x_1(t),\cdots,x_n(t))=0\ (i=1,\cdots,N)$ ということで，これをtで微分して$t=0$とおけば，

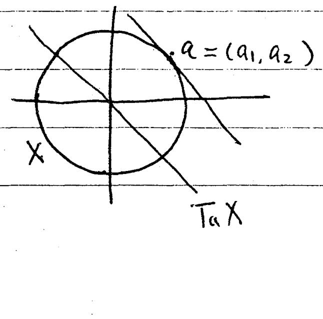
$$\left.\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dt}x_j(t)\cdot\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(x_1(t),\cdots,x_n(t))\right|_{t=0}=0$$

$$=\sum_{j=1}^{n}A_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(a)=0$$ を得る。

逆にこれを積分すればまたもとの曲線を与えるから，これが接ベクトルの定義を与えてるとみて，次のように定義する。

定義 $$T_aX=\left\{(A_1,\cdots,A_n)\ \middle|\ \sum_{j=1}^{n}A_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(a)=0,\ i=1,\cdots,N\right\}$$
をXのaにおける <u>tangent space</u> という。

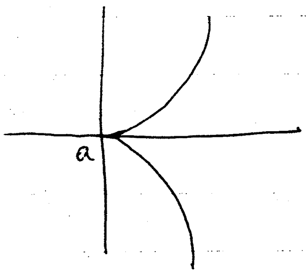
例） $\varphi(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-1$



このとき $a\in\{\varphi=0\}$ における接線の方程式は $\displaystyle\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(a)(A_j-a_j)=0$ という形である。

これは affine space だが，これを原点を通るように移動してベクトル空間としたのが tangent space である．

例）　$X=\{(x,y) \mid x^3-y^2=0\} \ni a=(0,0)$



$\varphi(x,y)=x^3-y^2$

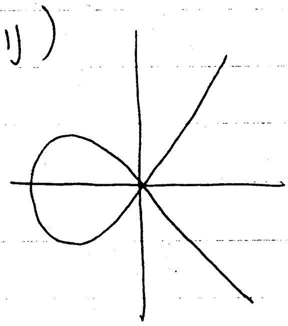
この場合，$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=3x^2$; $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=-2y$ ゆえ

$a=(0,0)$ では共に零となり

$T_aX=\mathbb{C}^2$ となる。　このように

variety は1次元だったが，接空間が2次元になることもある。

例）



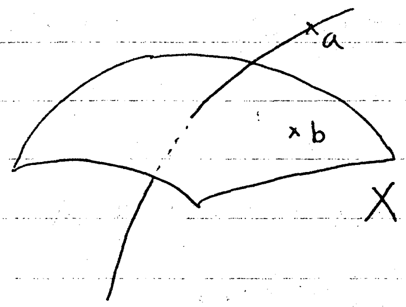
$y^2=x^2(x+1)$

この場合も $a=(0,0)$ における

tangent space は $T_aX=\mathbb{C}^2$ となる。

これ等の例をみてみると，とがった点や交わった点では T_aX が大きくなり，ふつうのなめらかな所の点では variety と接空間の次元が等しくなっていることがわかる。そこで，次のように定義する。

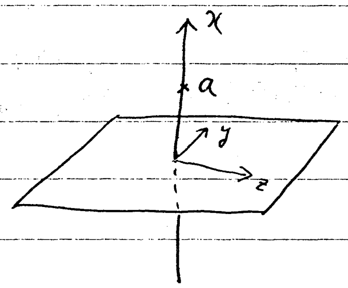
定義1. X が点 a で smooth であるとは，
$\dim T_a X = \dim_a X$ となること．ここで $\dim_a X$ は
X の点 a の近くでの次元である．例えば



X が図のような形の variety のとき，a のところでは X は1次元，b のところでは X は2次元，となっている。

定義2. X が smooth であるとは，X の各点 a で X が smooth であること．

例) $X = \{(x,y,z) \mid xy = xz = 0\}$ を考える．
$x \neq 0 \Rightarrow y = z = 0$ ゆえ
$X = \{(x,0,0)\} \cup \{(0,y,z)\}$ となる。
$a = (1,0,0) \in X$ とすると $\dim_a X = 1$ である。



代数幾何学では次元の定義は1次元や2次元がまざってるときは，一番大きい所を次元とするから $\dim X = 2$ である．
明らかに $\dim T_a X = 1$ である．
従って $\dim T_a X \neq \dim X$ ではあるが，X は smooth at a，である。

さて variety という空間を微分すると tangent space ができたが，今度は morphism という写像の方を微分することを考える。

まず直観的にみるために，多項式写像 $F: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ が与えられていて，この制限で morphism $F: X(\subset \mathbb{C}^n) \to Y(\subset \mathbb{C}^m)$ が与えられてるとする．

$a \in X$ に対し，$x(0)=a$，$x(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t)) \in X$ $(t \in \mathbb{C})$ なる X 内の曲線を $t=0$ で微分すると

$\left.\frac{d}{dt}x(t)\right|_{t=0} = A = (A_1,\cdots,A_n) \in T_a X$ なる tangent vector が得られたのであったが，この曲線 $x(t)$ を F で移して

$\left.\frac{d}{dt}F(x(t))\right|_{t=0}$ を考えれば $T_{F(a)}Y$ の元，即ち $F(a)$ における Y の tangent vector が得られる筈である。

これを $(dF)_a(A)$ とおきたい．

$$\left.\frac{d}{dt}F(x(t))\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\Big(F_1(x_1(t),\cdots,x_n(t)),\cdots,F_m(x_1(t),\cdots,x_n(t))\Big)\right|_{t=0}$$

$$= \left.\left(\sum_{j=1}^n \frac{dx_j(t)}{dt}\frac{\partial F_1}{\partial x_j}(x_1(t),\cdots,x_n(t)),\cdots,\sum_{j=1}^n \frac{dx_j(t)}{dt}\frac{\partial F_m}{\partial x_j}(x_1(t),\cdots,x_n(t))\right)\right|_{t=0}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial F_1}{\partial x_j}(a),\cdots,\sum_{j=1}^n A_j\frac{\partial F_m}{\partial x_j}(a)\right)$$

$$= (A_1,\cdots,A_n)\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a), & \cdots, & \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a), & \cdots, & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}$$ を得る。

そこで，この表示を $(dF)_a(A)$ の定義とする。

代数群

定義 1. $GL_n(\mathbb{C})$ の Zariski-closed な部分群を線形代数群という。ここでは線形代数群しか考えないので，単に代数群ということにする。

2. 代数群の間の準同型写像としては morphism になっているものしか考えない。例えば，$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}^\times & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ \Psi & & \Psi \\ z & \longmapsto & |z|\end{array}$ や

$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}^\times & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ \Psi & & \Psi \\ z & \longmapsto & \bar{z}\end{array}$ は考えない。

3. G = 代数群，X = affine variety として，G が X に作用する，というときは単に集合 X に作用するというだけではなく，$G \times X \to X$ が morphism になっているものだけを考える。

4. 準同型写像 $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ を G の表現という。G, $GL_n(\mathbb{C})$ は代数群ゆえ，約束 2. により morphism になっているものだけを考える。従って $\begin{array}{ccc}\mathbb{C}^\times & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ \Psi & & \Psi \\ z & \longmapsto & |z|\end{array}$ 等は表現とはいわない。

代数群の例

(i) $GL_n(\mathbb{C}) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det X \neq 0\}$ は代数群である.

(ii) $GL_1(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}^\times$ とも書く.

$\mathbb{C}^\times \times \cdots \times \mathbb{C}^\times$ も代数群で (algebraic) torus とよばれる。

(本当の torus は $\mathbb{C}_1^\times \times \cdots \times \mathbb{C}_1^\times$, $\mathbb{C}_1^\times = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$ であるが algebraic でないので, この代用として $\mathbb{C}^\times \times \cdots \times \mathbb{C}^\times$ をとる. 実際 torus に近い性質を色々もつ.)

(iii) $SL_n(\mathbb{C}) = \{X \in GL_n(\mathbb{C}) \mid \det X = 1.\}$

これは special linear group とよばれる.

(iv) $SO_n(\mathbb{C}) = \{X \in GL_n(\mathbb{C}) \mid \det X = 1,\ {}^tXX = 1\}$

これは special orthogonal group とよばれる.

(v) $Sp_{2n}(\mathbb{C}) = \{X \in GL_{2n}(\mathbb{C}) \mid {}^tXJX = J\}$

但し $J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right)$, これは symplectic group とよばれる.

この講義では, 代数群といってもこれらだけしか出てこない.

Lie algebra

$G (\subset GL_n(\mathbb{C}))$ を代数群, $e (\in G)$ を単位元とする. そのとき G の Lie algebra $\mathfrak{g} = Lie(G)$ は

e における tangent space T_eG のことである. このとき $T_eG \subset T_e GL_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$ ゆえ Lie algebra $\mathfrak{g}$ の元は n次の行列と考えられる.

1. 代数群 G がベクトル空間 V に作用しているとする. 即ち morphism $G \times V \longrightarrow V$ が与えられている. この tangent space を考え, morphism の微分を考えると, ベクトル空間 V の tangent space は V だから, $\mathfrak{g} \times V \to V$ を得る. 即ち Lie algebra $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ が V に作用する。

2. 準同型写像 $\phi : G \to H$ に対し 微分写像 $(d\phi)_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ が得られるが, d を別の意味で使いたいので, これも単に ϕ と記すことにする. ($\phi = (d\phi)_e$: 区別しない)

3. $A \in M_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{C}$ に対し
$\exp(tA) = 1 + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!} + \cdots$ とおくと
$\frac{d}{dt}\exp(tA)\Big|_{t=0} = A$ である。 このとき,

✡ $\forall t \in \mathbb{C}$ に対して, $\exp tA \in G \iff A \in \mathfrak{g}$

∵) $GL_n(\mathbb{C})$ の各元 x に対して, $\mathfrak{g}\cdot x \subset T_x GL_n(\mathbb{C})$ を対応させると, これが involutive distribution と

よばれるものになって，$\{\exp tA \mid t\in\mathbb{C}\}$ が この involutive distribution の ひとつの 積分多様体 となる．そして $G\cdot x$ が 極大積分多様体 となるから，あとは Frobenius の定理 を使えばよい，というわけだが ここは大変 不親切な説明ですので，数学辞典 あるいは 松島与三：多様体入門 などをみて下さい． //

reductive な代数群

定義　　G を代数群 とする．

1. G が 単純（simple）であるとは

　(i) $G=$ 連結　（従って この条件より $O(n)$ は 単純群ではない）

　(ii) G の正規部分群は，G 全体，又は 有限群
（例えば $\{cI_n\,;\,c^n=1\}$ は $SL_n(\mathbb{C})$ の正規部分群）

　(iii) $G\neq\mathbb{C}^\times,\{1\}$　（これは，例えば 素数位数の巡回群は有限単純群には違いないが，ふつうは除外して考えるが，こういうことに対応している．）

2. G が reductive とは，単位元を含む連結成分 G^0 が，
$G^0=G_1\times\cdots\times G_n/$(中心に含まれる有限群)，但し G_i は 単純代数群 または $\mathbb{C}^\times$，と表わせること．

<u>Remark</u>　連結性は，この場合は (Z)-topology でも (C)-topology でも，どちらでも同じである.

例）$SL_n(\mathbb{C})$, $SO_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 5)$, $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ などはすべて単純代数群である.

<u>Lemma 2.</u>　G が reductive な代数群とする.

(i) G の maximal compact subgroup K が共役を除いて unique に存在する。しかも K は G 内で Zariski-dense で，$\pi_0(K) \xrightarrow{\sim} \pi_0(G)$ 即ち K の連結成分の集合と G の連結成分の集合が 1対1 に対応する.

(ii) G の任意の compact subgroup K' に対して，$K \supset K'$ となる maximal compact subgroup が存在する。

（例えば $\mathbb{C}^\times \supset K = \{z ; |z| = 1\}$ は maximal compact で Zariski-dense，である.）

証明）

G が連結の場合は Helgason : Symmetric Space ⋯ (1962) の chapter 6 の §2 をみよ. 連結でない場合の証明は文献探しても見当たらなかったので，Appendix で

与えることにする．（§1 の Appendix ）

例）　$U_n = \{ g \in GL_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{g} g = 1 \}$ を unitary 群とする．　このとき

$GL_n(\mathbb{C}) \supset K = U_n$

$SL_n(\mathbb{C}) \supset K' = U_n \cap SL_n(\mathbb{C})$

$SO_n(\mathbb{C}) \supset K'' = U_n \cap SO_n(\mathbb{C})$

$Sp_{2n}(\mathbb{C}) \supset K''' = U_n \cap Sp_{2n}(\mathbb{C})$

は maximal compact subgroup である。

<u>Lemma 3</u>　　K を compact 群とすると，K 上には不変測度（Haar measure）が存在する。すなわち K 上の連続関数 f に対して，積分 $\int_K f(k)dk$ が定義でき，$\int_K f(ak)dk = \int_K f(k)dk \ (\forall a \in K)$ とできる。　このとき

$$\int_K f(ka)dk = \int_K f(k^{-1})dk = \int_K f(k)dk, \quad \int_K dk < \infty$$

である．　これは定数倍を除いて unique であるから，$\int_K dk = 1$ と正規化しておく．（こうなる measure は unique）．

Appendix (§1)

Lemma 2　G が（連結を仮定しない）reductive 代数群とすると

(i) G の maximal compact subgroup K が共役を除いて唯一つ存在して，Zariski-dense であり $\pi_0 K \xrightarrow{\sim} \pi_0 G$ が成立つ．

(ii) G の任意の compact subgroup K' はある maximal compact subgroup K に含まれる．

を証明しよう．

参考文献は

代数群：SGA 3，Steinberg: Conjugacy class (Springer Lecture Note)

但しこの部分については詳しく説明する．あと

有限群のコホモロジー（例えば弥永昌吉編：数論 岩波書店など）

と「連結の場合」の E. Cartan の証明（Helgason の本など）を使って証明する

G = reductive 代数群，G^0 を G の単位連結成分，
$Z = Z(G^0)$ を G^0 の中心 とする。

$K_Z \overset{def}{=} \{ z \in Z ;\ \overline{\{z^n \mid n \in \mathbb{Z}\}}$ が compact，($\overline{\ \ }$ は classical topology での closure) $\}$ とおく。

K_Z の元は何乗してもだいたい単位元の近くをぐるぐるまわっているような元たちである。

K_Z は Z の中の maximal compact subgroup になっている。Z は可換群ゆえ話は簡単である。

$T \subset G^0$ を maximal torus とする。maximal torus というのは，G^0 に含まれる algebraic torus で次元が最大のもののことで，共役を除いて唯一つ存在する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = T \text{ に関する root 系} \\ \{\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell\} = \Delta \text{ の root basis} \\ X_{\alpha_i} \in Lie(G^0) : \text{root vector} \end{array} \right.$$ とする。

これについて説明する。

$\alpha \in Hom(T, \mathbb{C}^\times)$ に対して

$\mathfrak{g}_\alpha \overset{def}{=} \{ X \in \mathfrak{g} \mid tXt^{-1} = \alpha(t)X \text{ for } \forall t \in T \}$ と

おく。（すべて行列ゆえ tXt^{-1} 等の演算は可能である）

そのとき，Δ が T に関する root系 とは

$$\Delta \overset{\text{def}}{=} \{\alpha \in \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^\times) \mid \alpha \neq 1,\ \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

のことである．

$\mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^\times)$ は $(\phi_1\phi_2)(t) = \phi_1(t)\phi_2(t)$ により

群をなすが，$T = \underbrace{\mathbb{C}^\times \times \cdots \times \mathbb{C}^\times}_{l'}$ という形ゆえ

$$\begin{array}{c} \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^\times) \cong \mathbb{Z}^{l'} \\ \cup \\ \Delta \end{array}$$

（加法的に書くことにする）

これにより $\Delta \subset \mathbb{Z}^{l'}$ と考える．

$\Delta \supset \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ が root basis であるとは

${}^\forall\alpha \in \Delta$ にたいし ${}^\exists k_1, \cdots, k_l \in \mathbb{Z}$ が存在して

$\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_l\alpha_l$　　但し $k_1, \cdots, k_l \geq 0$

又は $k_1, \cdots, k_l \leq 0$

と表わせる。

$\alpha \in \Delta$ について $\dim \mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ であるが，もっと詳しくみると

$\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ であることがわかる．　従って，

$\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}X_\alpha$ と表わせる．この X_α が root vector

である．

以下 $Aut(G^0)$ は G^0 の自己同型群を表わすが，約束により，自己同型といえば *morphism* になっているものしか考えない。

$$A = \{ \sigma \in Aut(G^0) \mid T^\sigma = T,\ \{X_{\alpha_1}^\sigma, \cdots, X_{\alpha_\ell}^\sigma\} = \{X_{\alpha_1}, \cdots, X_{\alpha_\ell}\} \text{ as a set} \}$$

$\sigma \in Aut(G^0)$ は リー環の元 X_α にも作用している。

$Int(G^0)$ で G^0 の内部自己同型群を表わす。

$$\Rightarrow\ Aut(G^0) = Int(G^0) \rtimes A \quad (\text{半直積})$$

即ち $Aut(G^0)$ の元は $Int(G^0)$ と A の元の積で表わされて，$Int(G^0)$ は $Aut(G^0)$ の正規部分群かつ $Int(G^0) \cap A = \{e\}$ となる。

これを示そう.

$Aut(G^0) \ni \sigma$ が $Int(G^0)$ と A の元の積になること

∵) T^σ も G^0 の *maximal torus* ゆえ T と共役，従って $\exists \sigma_1 \in Int(G^0)$ s.t. $T^\sigma = T^{\sigma_1}$．$\sigma\sigma_1^{-1}$ を考えることにより，$T^\sigma = T$ としてよい。すると $\sigma(\Delta) = \Delta$ であるから *root basis* を他の *root basis* へうつす。

しかし root basis たちは Weyl 群でうつるが，Weyl 群は特別な内部自己同型である．結局 σ は root basis を集合として，動かさないとしてよい．そのとき

$$\{X^{\sigma}_{\alpha_1}, \cdots, X^{\sigma}_{\alpha_l}\} = \{c_1 X_{\alpha_1}, \cdots, c_l X_{\alpha_l}\} \text{ as a set}$$

となる。 $\alpha_i(t) = \frac{1}{c_i}\ (i=1,\cdots,l)$ となる $t \in T$ による内部自己同型を更に施せば

$$t(c_i X_{\alpha_i})t^{-1} = X_{\alpha_i}\ (i=1,\cdots,l) \text{ ゆえ}$$

結局 $\{X^{\sigma}_{\alpha_1}, \cdots, X^{\sigma}_{\alpha_l}\} = \{X_{\alpha_1}, \cdots, X_{\alpha_l}\}$ となる．

結局 σ は内部自己同型を modulo として A の元になった． //

他については省く．

さて G^0 は G の正規部分群ゆえ $G/G^0 = G^0\backslash G$ であるが，

$$\begin{array}{ccc} G/G^0 & \longrightarrow & G \\ \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| \\ \sigma & \longmapsto & [\sigma] \end{array}$$

なる写像を考える．$[\sigma]$ は σ の代表元のひとつである．

$[\sigma]$ による G の内部自己同型 $\mathrm{Int}_{[\sigma]}$ は（G^0 が正規部分群だから）G^0 の自己同型をひきおこす．

$$\mathrm{Int}_{[\sigma]} \in \mathrm{Aut}(G^0)$$

しかし $[\sigma]$ は G^0 の元だけ自由度があるから，

$\mathrm{Int}_{[\sigma]}$ は G^0 の内部自己同型の分だけずらすことができる。従って $[\sigma]$ を適当にとって

(*) $\mathrm{Int}_{[\sigma]} \in A$, とすることができる.

但し σ に対して (*) の条件下でも $[\sigma]$ は unique ではない。G^0 の center の分だけ自由である。そこで,

$\forall \sigma, \tau \in G/G^0$ に対し, $\exists c_{\sigma,\tau} \in G^0$ で

$[\sigma\tau] = [\sigma][\tau]c_{\sigma,\tau}$ となるものがある ($[\sigma\tau]$ も $[\sigma][\tau]$ も $\sigma\tau$ の代表元である!)

$\Rightarrow \mathrm{Int}_{[\sigma\tau]} = \mathrm{Int}_{[\sigma]}\mathrm{Int}_{[\tau]}\mathrm{Int}_{c_{\sigma,\tau}}$ ところが

$$\begin{cases} \mathrm{Int}_{[\sigma\tau]}, \mathrm{Int}_{[\sigma]}, \mathrm{Int}_{[\tau]} \in A \\ \mathrm{Int}_{c_{\sigma,\tau}} \in \mathrm{Int}(G^0) \end{cases}$$ であるから

$\mathrm{Int}_{c_{\sigma,\tau}} \in A \cap \mathrm{Int}(G^0) = \{e\}$

即ち, $c_{\sigma,\tau} \in Z(G^0) = G^0$ の center.

さて $[\sigma\tau\rho]$ を二通りに計算すると,

$[\sigma\tau\rho] = [\sigma\tau][\rho]c_{\sigma\tau,\rho}$

$= [\sigma][\tau]c_{\sigma,\tau}[\rho]c_{\sigma\tau,\rho}$

$= [\sigma][\tau][\rho]c_{\sigma,\tau}^{\rho}c_{\sigma\tau,\rho}$ 但し

$G/G^0 \ni \sigma$ は $Z(G^0) \ni z$ に $z^\sigma \overset{\text{def}}{=} z^{[\sigma]} = [\sigma]^{-1} z [\sigma]$

で作用させる. 即ち $z[\sigma] = [\sigma] z^\sigma$

今の場合, $c_{\sigma,\tau}[\rho] = [\rho]\, c_{\sigma,\tau}^{\rho}$ である。

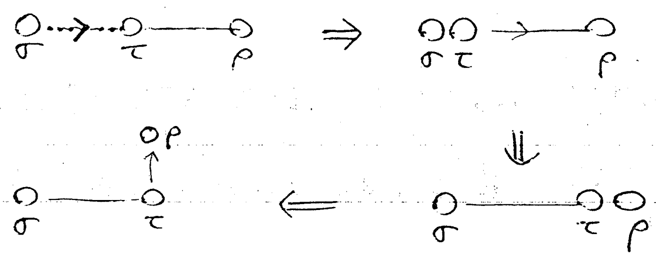
一方, $[\sigma\tau\rho] = [\sigma][\tau\rho]\, c_{\sigma,\tau\rho}$

$= [\sigma][\tau][\rho]\, c_{\tau,\rho}\, c_{\sigma,\tau\rho}$

即ち $c_{\sigma,\tau}^{\rho}\, c_{\sigma\tau,\rho} = c_{\tau,\rho}\, c_{\sigma,\tau\rho}$ 可換ゆえ

$c_{\tau,\rho}^{-1}\, c_{\sigma\tau,\rho}\, c_{\sigma,\tau\rho}^{-1}\, c_{\sigma,\tau}^{\rho} = 1$ と表わせる.

(この覚え方.



あとは交互に inverse にすればよい.)

このような関係式をみたす $\{c_{\sigma,\tau}\}$ を 2-cocycles という.

$\{c_{\sigma,\tau}\}$ に同値関係を

(*)をみたしたまゝ代表系をかえる $\Longleftrightarrow$ $\sim$

によって入れて,

$\{c_{\sigma,\tau}\}/\sim\ = H^2(G/G^0, Z(G^0))$ とおく.

次のような exact sequence を考える。但し $Z = Z(G^0)$.

$$0 \to K_Z \to Z \to Z/K_Z \to 0 \quad (\text{exact})$$

これから long exact sequence を作ると,

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0(G/G^0, K_Z) \to H^0(G/G^0, Z) \to H^0(G/G^0, Z/K_Z) \\ &\to H^1(G/G_0, K_Z) \to H^1(G/G_0, Z) \to H^1(G/G^0, Z/K_Z) \\ &\to H^2(G/G_0, K_Z) \to H^2(G/G_0, Z) \to H^2(G/G_0, Z/K_Z) \to \cdots \\ &\hspace{20em} (\text{exact}) \end{aligned}$$

となる.

さて 実質的に K_Z が Z の torsion part ゆえ Z/K_Z は torsion free, 実は(すぐわかることだが) $\mathbb{R}$-vector space と同型になる。 ところが 次のことが知られている.

$$H^i(\text{有限群}, \mathbb{R}^n) = 0 \quad (i > 0).$$

これを使うと $H^1(G/G^0, Z/K_Z) = H^2(G/G_0, Z/K_Z) = 0$ ゆえ

$$H^2(G/G_0, K_Z) \cong H^2(G/G_0, Z)$$

が得られる.

即ち, 代表系をとりかえて, $C_{\sigma,\tau} \in K_Z$ とできる.

$$[\sigma\tau] = [\sigma][\tau]\, C_{\sigma,\tau}, \quad C_{\sigma,\tau} \in K_Z$$

そこで $\bigcup_{\sigma \in G/G^0} [\sigma] K_z = K_z'$ を考える。

K_z は torsion 全体で特性部分群だから

$[\sigma]K_z [\tau]K_z = [\sigma][\tau]K_z = [\sigma\tau]K_z$

故に K_z' が compact group になっている。

さて G^0 の maximal compact subgroups の全体は G^0 が連結ゆえ classical な E. Cartan の定理により すべて共役で G^0/K^0 と同型になっている（K^0 は G^0 の max. compact subgroup）. しかも これは complete, simply-connected な Riemann manifold しかも negative curvature をもつ.

しかも compact 群 K_z' が $K^0 \mapsto kK^0k^{-1}$ ($k \in K_z'$) によって作用する。

一般に complete, simply connected な negative curvature をもつ Riemann 多様体に compact 群が作用すれば 不動点をもつことが知られている.（Helgason の教科書参照）

そこで, その不動点を K^0 とする。

$K = K^0 K_z'$ とおく. 不動点ということは

$\forall k \in K_2'$ に対し $kK^0k^{-1} = K^0$ であるから
K は群 しかも compact である（K^0, K_2' は compact $\to$ $K^0 \times K_2'$ compact $\to$ その連続像 $K = K^0 K_2'$ も compact）

しかも このcompact群 K は lemma 2 のすべての条件をみたす。 共役に関しては

$G/K \simeq G^0/K^0$ （Riemann多様体として）と

なるから E. Cartan の古典的な結果がそのまゝ使える //

§2. 概均質ベクトル空間の構造

定義 1. G を代数群, V を有限次元ベクトル空間, $\rho : G \to GL(V)$ を 表現 とする。 このとき, (G, ρ, V) が 概均質ベクトル空間 (*prehomogeneous vector space*, P.V. と略記) とは, V の点 v_0 で $G\cdot v_0$ が V の open set になるものが存在することである。 以下 この $G\cdot v_0$ を $\mathcal{O}_0$ と書く: $Gv_0 = \mathcal{O}_0$.

2. f を V 上の恒等的には零ではない有理関数 とする。 f が 相対不変式 (*relative invariant*) であるとは 指標 $\phi \in Hom(G, \mathbb{C}^\times)$ が存在して $f(gv) = \phi(g)f(v)$ $(g \in G)$ が有理関数として成り立つことで, ϕ を f に 対応する指標 (*character*) といい, $f \leftrightarrow \phi$ と略記する。

> **Lemma 1.** (G, ρ, V) を P.V. とする。
> (i) $f_1 \leftrightarrow \phi$, $f_2 \leftrightarrow \phi$ $\Rightarrow$ $f_1 = f_2 \times \text{constant}$.
> (ii) 相対不変式は 斉次式

∵)

(i) $$\left.\begin{array}{l} f_1(gv) = \phi(g) f_1(v) \\ f_2(gv) = \phi(g) f_2(v) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(gv_0) = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(v_0) \; (= c \text{ とおく}) \quad (v_0 \in \mathcal{O}_0)$$

即ち $\frac{f_1}{f_2} \equiv c$ on $Gv_0 \underset{\text{open}}{\subset} V$. Open set 上 constant となる有理関数は全体で constant, 即ち $f_1 = cf_2$.

(ii) $\forall c \in \mathbb{C}^\times$ に対し, $f \leftrightarrow \phi$ なら $F_c \leftrightarrow \phi$, 但し $F_c(v) = f(cv)$. 従って (i) より $f(cv) = c' f(v)$. これは f が斉次式であることを意味している. //

この Lemma 1 は簡単だが, 概均質ベクトル空間の理論の基礎になるものである.

以下 G = reductive な代数群 (連結とは仮定しない),

$K (\subset G)$ = maximal compact subgroup (Appendix で証明したように reductive 群 G には必ず存在する)

f = 相対不変式, $f \leftrightarrow \phi$

$\Omega = f^{-1}(\mathbb{C}^\times) = \{f \neq 0\}$: affine variety (cf. §1, Lemma 1)

とする.

Lemma 2. Ω 内の G-orbit O_1 で Zariski-closed in Ω であるものが, 唯1つ存在する.

∵) (存在) O_1 を Ω 内の G-orbit で次元が最小のものとする。$\overline{O_1}$ を O_1 の Zariski-closure in Ω とすると, G は $\overline{O_1}$ にも作用するから $\overline{O_1} = O_1 \cup O' \cup O'' \cup \cdots$ と G-orbits に

分解することができるが，$\mathcal{O}' \cup \mathcal{O}'' \cup \cdots \subset \overline{\mathcal{O}}_1 - \mathcal{O}_1$ ゆえ $\mathcal{O}', \mathcal{O}'', \cdots$ 等は G-orbits で $\dim \mathcal{O}' \lneqq \dim \mathcal{O}_1, \cdots$ となっている。ところが次元を最小にとっていたから，このような $\mathcal{O}', \mathcal{O}'', \cdots$ は存在しない。即ち $\overline{\mathcal{O}}_1 = \mathcal{O}_1$．

（一意性）　$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_1'$ が Ω 内の G-orbits で Zariski-closed in Ω，$\mathcal{O}_1 \neq \mathcal{O}_1'$（従って $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_1' = \phi$）とする。

このとき $\varphi \in \mathbb{C}[\Omega]$ で，$\varphi|_{\mathcal{O}_1} \equiv 1$，$\varphi|_{\mathcal{O}_1'} \equiv 0$ となるものが存在する．（これは Hilbert 零点定理を使って次のように示せる．

$\mathcal{I}(\mathcal{O}_1') \overset{\mathrm{def}}{=} \{\varphi \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n] ; \varphi|_{\mathcal{O}_1'} \equiv 0\} = (\varphi_1, \cdots, \varphi_N)$ とすると，

$\{a \in V ; \varphi_1(a) = \cdots = \varphi_N(a) = 0\} = \overline{\mathcal{O}_1'} = \mathcal{O}_1'$ で $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_1' = \phi$ ゆえ $\mathcal{O}_1$ の点で $\varphi_1, \cdots, \varphi_N$ の共通零点になるものは存在しない．従って $(\varphi_1, \cdots, \varphi_N) \equiv (1) \bmod \mathcal{I}(\mathcal{O}_1)$ 即ち $\varphi = a_1\varphi_1 + \cdots + a_N\varphi_N$ なる形の元で $\varphi \equiv 1 \bmod \mathcal{I}(\mathcal{O}_1)$ なるものが存在する．このとき $\varphi|_{\mathcal{O}_1} \equiv 1$，$\varphi|_{\mathcal{O}_1'} \equiv 0$ となる．）

次に $\varphi_1(v) = \int_K \varphi(kv)\,dk$ とおく．dk は compact 群 K の上の normalized Haar measure である．

$\forall k' \in K$ に対して，$\varphi_1(k'v) = \int_K \varphi(kk'v)\,dk = \int_K \varphi(kv)\,dk = \varphi_1(v)$ を得る．

$\varphi_1(k'v) = \varphi_1(v)$ $(\forall k' \in K)$ というのは，K の元 k' が
ある多項式関係を満たしている ということで，K は G 内で
Zariski-dense であったから，この多項式関係は G まで
自動的にのびて $\varphi_1(gv) = \varphi_1(v)$ $(\forall g \in G)$ が得られる．
($K \subset \{g \in G \,;\, \varphi_1(gv) = \varphi_1(v)\}$ = Zariski-closed で両辺の closure
をとれば $\overline{K} = G$ より，得られる)

このやり方は unitarian trick といわれている。

さて $\varphi_1(gv_0) = \varphi_1(v_0) = c$ $(\forall g \in G)$ より

$\varphi_1 \equiv c$ on $Gv_0 \underset{dense}{\subset} \Omega$ ，従って $\varphi_1 \equiv c$ on Ω となる．

ところが，$v \in O_1$ なら，$kv \in O_1$，従って $\varphi(kv) = 1$ ゆえ
$$\varphi_1(v) = \int_K \varphi(kv)\,dk = \int_K dk = 1$$
同様にして，$v \in O_1'$ なら $\varphi_1(v) = 0$，これは $\varphi_1 \equiv c$ に反する．

// Lem 2

さて，(G, ρ, V) に対し，相対不変多項式 f，ϕ，$\Omega = f^{-1}(\mathbb{C}^\times)$，

O_0 = open orbit，O_1 (= closed in Ω)

V の basis をひとつとると

$\rho : G \to GL(V) \cong GL_n(\mathbb{C})$ で，K を G の maximal
compact subgroup とすると $\rho(K)$ は $GL_n(\mathbb{C})$ の

compact subgroup ゆえ $GL_n(\mathbb{C})$ のある maximal compact subgroup (これは AU_nA^{-1}, $^\exists A\in GL_n(\mathbb{C})$ の形) に含まれる.

即ち $\rho(K)\subset AU_nA^{-1}$.

basis をとりかえて, $\rho(K)\subset U_n$ としてよい.

以下 こう約束する。

$V^\vee$ を V の dual space $Hom_{\mathbb{C}}(V,\mathbb{C})$ とし,

$\langle\ \ \rangle : V^\vee\times V\to\mathbb{C}$ を自然な pairing (即ち $\langle f, v\rangle = f(v)$) とする.

V の basis $\{v_1,\cdots,v_n\}$ にたいし $\{v_1^\vee,\cdots,v_n^\vee\}$ を $V^\vee$ の dual basis とする。これにより

$\rho^\vee : G\to GL_n(V^\vee)\cong GL_n(\mathbb{C})$ と同一視すれば,

$\rho^\vee(g)={}^t\rho(g)^{-1}$ となる。

とくに $^\forall k\in K(\subset G)$ にたいして, $\rho^\vee(k)={}^t\rho(k)^{-1}=\overline{\rho(k)}$

となる ($\rho(K)\subset U_n$ による)。 これにより, 複素共役をとれば,

$(G,\rho^\vee,V^\vee)$ にたいし, $f^\vee$, $\phi^\vee$, $\Omega^\vee$, $O_0^\vee$, $O_1^\vee$ 等が得られる.

例として $f^\vee$ を構成してみよう。

$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum c_{i_1\cdots i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ にたいして

$f^\vee(x_1,\cdots,x_n)=\sum \overline{c_{i_1\cdots i_n}}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$, 従って

$k \in K$, $v^\vee \in V^\vee$ に対して

$f^\vee(kv^\vee) = \overline{\phi(k)}\, f^\vee(v^\vee)$.

$\phi(K)$ は $\mathbb{C}^\times$ の compact subgroup ゆえ $\phi(K) \subset \{z \,;\, |z| = 1\}$

従って $\overline{\phi(k)} = \phi(k)^{-1}$ $(k \in K)$ 即ち

$f^\vee(kv^\vee) = \phi(k)^{-1} f^\vee(v^\vee)$. これは代数関係ゆえ unitarian trick により

$f^\vee(gv^\vee) = \phi(g)^{-1} f^\vee(v^\vee)$ $(g \in G,\ v^\vee \in V^\vee)$ が成り立つ.

$\therefore\ \phi^\vee = \phi^{-1}$. 以上をまとめて,

Lemma 3. $\deg f^\vee = \deg f$, $\phi^\vee = \phi^{-1}$

//

b−函数

$f \longleftrightarrow \phi$ なら $f^s \longleftrightarrow \phi^s$ (s は自然数, としておく).

さて $\begin{cases} f^{s+1} \longleftrightarrow \phi^{s+1} \\ f^\vee \longleftrightarrow \phi^{-1} \end{cases}$ ゆえ f^{s+1} と $f^\vee$ をうまく組み合わせれば ϕ^s に対応する相対不変式が作れそうで, もし作れればそれは f^s と定数倍しか違わないから, 何か関係式が得られそうであるが, 実際, 次のことが成り立つ.

$$\boxed{\text{Lemma 4.}\quad f^\vee\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f(x_1,\cdots,x_n)^{s+1}=b(s)\,f(x_1,\cdots,x_n)^s}$$

実際 $f^\vee\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f(x_1,\cdots,x_n)^{s+1}$ は ϕ^s に対応する相対不変式であり，従って $f(x_1,\cdots,x_n)^s$ と定数倍除いて一致する．その定数は s に依存するから $b(s)$ と書く．

$$\frac{\partial}{\partial x_i}f(x_1,\cdots,x_n)^{s+1}=(s+1)f(x_1,\cdots,x_n)^s\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}f(x_1\cdots x_n)^{s+1}=(s+1)s\,f(x_1,\cdots,x_n)^{s-1}\frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}+(s+1)f(x_1,\cdots,x_n)^s\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$$

etc．ゆえ $b(s)$ は s に関して高々 d 次 $(d=\deg f^\vee=\deg f)$ の多項式である： $b(s)=b_0s^d+b_1s^{d-1}+\cdots+b_d\in\mathbb{C}[s]$

（一応，今は $b_0=0$ の可能性も入れておく）．

この $b(s)$ を <u>b 函数</u> という。

<u>記号</u>　　$\mathrm{grad}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$

$$\mathrm{grad}\log f=\left(\frac{\partial\log f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial\log f}{\partial x_n}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=\frac{1}{f}\mathrm{grad}\,f.$$

さて $\mathrm{grad}\log f$ を $\Omega=\{f\neq 0\}$ から $V^\vee$ への写像と考える： $\mathrm{grad}\log f:\Omega\longrightarrow V^\vee$.

Exercise 1. このとき，$\mathrm{grad}\log f$ は G の作用と可換である。

Lemma 5 (i) $f^\vee((\mathrm{grad}\log f)(v)) = b_0 f(v)^{-1}$ $(v \in \Omega)$

(ii) $b_0 \neq 0$

∵)

(i) Lemma 4 のあとの説明をみれば，

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}} f^{s+1} = s^k \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} f^{s+1-k} + o(s^k)$$

が成り立つことが容易にわかる。従って

$$f^\vee\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right) f^{s+1} = s^d f^\vee\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) f^{s+1-d} + o(s^d)$$

$$= b(s) f^s = b_0 s^d f^s + o(s^d)$$

故に $f^\vee\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) f^{s+1-d} = b_0 f^{s+1-1}$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{f^\vee\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) f^{-d}}_{=\, f^\vee\left(\frac{1}{f}\mathrm{grad} f\right) = f^\vee(\mathrm{grad}\log f)} = b_0 f^{-1}$$

(ii) これは，M. Sato - T. Kimura, Nagoya Math. J. (1977) P.72 を参照。 //

Lemma 5 より $\mathrm{grad}\log f(\Omega) \subset \Omega^\vee$ がわかった。

<u>記号</u> $F = \mathrm{grad}\log f : \Omega \to \Omega^\vee$

$F^\vee = \mathrm{grad}\log f^\vee : \Omega^\vee \to \Omega$

$\mathfrak{g} = \mathcal{L}ie(G)$ とする。

Lemma 6. (i) $\langle F(v), Av \rangle = \phi(A)$ $(v \in \Omega,\ A \in \mathfrak{g})$

(ϕ は G の character であったが，約束により対応する $\mathfrak{g}$ の character も同じ ϕ で表したことに注意)

(ii) $\langle F^{\vee}F(v) - v,\ AF(v) \rangle = 0$ $(v \in \Omega,\ A \in \mathfrak{g})$

(iii) $F^{\vee}F(v) - v \in (T_{F(v)}F(\Omega))^{\perp}$ if $F(v) \in F(O_0)$

$$\text{但し}\quad \begin{array}{ccc} T_{F(v)}F(\Omega) \subset T_{F(v)}V^{\vee} & = & V^{\vee} \\ & & \updownarrow \text{dual} \\ (T_{F(v)}F(\Omega))^{\perp} & \subset & V \end{array}$$

∵) (i) $f(\exp tA \cdot v) = \phi(\exp tA) f(v)$

の両辺を t で微分して $t=0$ とおくと，

$$\text{左辺} \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \left. \frac{d(\exp tA \cdot v)_j}{dt} \right|_{t=0} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(v)$$

$$\left(\text{ここで } \exp tA \cdot v = v + \frac{tAv}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!}v + \cdots \text{ ゆえ} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (Av)_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} = \langle \operatorname{grad} f, Av \rangle$$

$$\text{右辺} \longrightarrow \phi(A) f(v)$$

$$\therefore \left\langle \frac{1}{f} \operatorname{grad} f, Av \right\rangle = \phi(A)$$

$$\shortparallel$$

$$\langle \operatorname{grad} \log f(v), Av \rangle = \langle F(v), Av \rangle$$

(ii)　(i) を dual の方に適用すれば

$$\langle F^\vee(v^\vee), Av^\vee \rangle = -\phi(A)$$ を得る. $v^\vee = F(v)$

を代入すると, $\langle F^\vee F(v), AF(v) \rangle = -\phi(A)$ となる.

一方 $\langle v, AF(v) \rangle = -\langle Av, F(v) \rangle$

$\overset{(i)}{=} -\phi(A)$

これより $\langle F^\vee F(v) - v, AF(v) \rangle = 0$

(iii)　(ii) より $F^\vee F(v) - v \in (\mathfrak{g} \cdot F(v))^\perp$ を得る.

$F(v) \in F(O_0)$ より $v' \in O_0$ で $F(v) = F(v')$ となるものがある。そこで

$$\mathfrak{g} \cdot F(v) = T_{F(v)}(G \cdot F(v)) = T_{F(v)} G F(v')$$

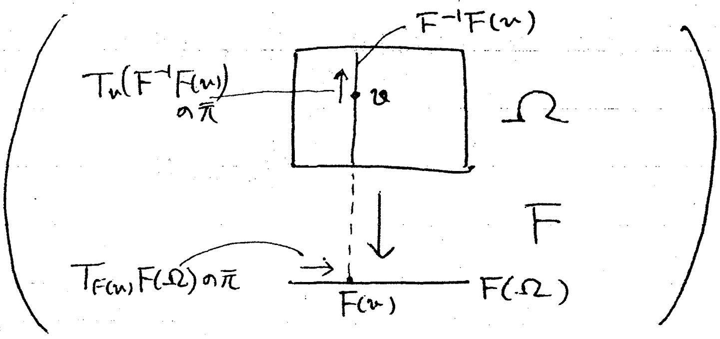
$$\underset{\substack{\uparrow \\ F\text{ は }G\text{ の作用と可換 (Ex.1)}}}{=} T_{F(v)} F(Gv') = T_{F(v)} F(O_0)$$

$$\left(O_0 \underset{\text{open}}{\subset} \Omega \text{ ゆえ}^{(*)} \right) \quad = T_{F(v)} F(\Omega)$$

即ち, $F^\vee F(v) - v \in (T_{F(v)} F(\Omega))^\perp$　// Lemma 6.

付記: (*) $F(O_0) \overset{\text{open}}{\subset} F(\Omega)$ の証明, Hilbert's second theorem (cf. R. Steinberg: SLN 366, P.14) により $F(O_0)$ は $\overline{F(O_0)}$ (i.e. $V^\vee$ における Zariski closure) ($\supset F(\Omega)$) における open set $U (\neq \phi)$ を含む. そこで $v_0 \in O_0$ を $F(v_0) \in U \subset F(O_0)$ にとり, $\forall v \in O_0$ に対し, $v = gv_0$ なる $g \in G$ をもってくると, $F(v) = gF(v_0) \in gU \subset gF(O_0) = F(O_0)$ 即ち $F(O_0)$ は $F(v)$ の $\overline{F(O_0)}$ における近傍, 従って $F(O_0) \overset{\text{open}}{\subset} \overline{F(O_0)}$ 故に $F(O_0) \subset F(\Omega)$ open. 尚, 最終的に定理Aより F は projection p と同一視できるから open map であることがわかる. //

Lemma 7　$v \in O_0$ に対して $T_v(F^{-1}F(v)) = (T_{F(v)}F(\Omega))^{\perp}$



∵) $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in T_v(F^{-1}F(v))$ ということは，v に於る写像の微分 $(dF)_v$ の *kernel* の方向に入っているということ，即ち $(dF)_v(a) = 0$ と同値だが，$F = \mathrm{grad}\log f = \left(\frac{\partial \log f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial \log f}{\partial x_n}\right)$ ゆえ，座標で表わせば，

$$\left(\frac{\partial^2 \log f}{\partial x_i \partial x_j}(v)\right)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$$

となる．これを言い換えれば，

$^{\forall} b = (b_1, \cdots, b_n) \in V$ に対して，$(b_1 \cdots b_n)\left(\frac{\partial^2 \log f}{\partial x_i \partial x_j}(v)\right)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$

と同じであるが，見方を変えて前二つを組にして考えれば

$(dF)_v(V) \perp a$　（a と $(dF)_v(V)$ が直交している）を得る．

さて $v \in O_0$ (= *open orbit*) ゆえ $V = T_vV = T_vG\cdot v$

$G \to G\cdot v$，$G \to GF(v)$ は *submersion*（即ち写像の微分が全射）ゆえ $G\cdot v \to GF(v)$ も *submersion*，即ち $T_vG\cdot v \longrightarrow T_{F(v)}GF(v) = T_{F(v)}F(G\cdot v)$ は全射．

即ち $(dF)_v(V) = T_{F(v)}F(G\cdot v)$ であるが，$G\cdot v$ は

Ω の open set ゆえ $T_{F(v)}F(\Omega) = T_{F(v)}F(G \cdot v)$

結局 $a \in T_v(F^{-1}F(v)) \iff a \in ((dF)_v(V))^{\perp}$

$= (T_{F(v)}F(\Omega))^{\perp}$ // Lemma 7

> **Lemma 8.** (i) $\forall v \in O_0$ に対して，$F^{-1}F(v) \supset v + (T_{F(v)}F(\Omega))^{\perp}$
>
> (ii) $\Omega^{\vee} \supset F(\Omega) \underset{F}{\overset{F^{\vee}}{\rightleftarrows}} F^{\vee}(\Omega^{\vee}) \subset \Omega$
>
> は互いに逆対応である。

∵) (i) $v \in O_0$ に対して，$O_0 \cap F^{-1}F(v)$ の tangent space はどの点で考えても一定で Lemma 7 により $(T_{F(v)}F(\Omega))^{\perp}$ に等しい。さて variety で tangent space が一定ということは曲がっていないということを意味する．ちょっとでも曲がれば tangent vector は，あっち向いたりこっち向いたりするわけで，まっすぐでなければいけない．$v \in O_0 \cap F^{-1}F(v)$ であるから，以上のことより，$(T_{F(v)}F(\Omega))^{\perp}$ の open dense subset U が存在して，$v + U \subset O_0 \cap F^{-1}F(v)$ となる。一方，$\forall v' \in F^{-1}(F(v))$ に対して，$f(v) = f(v')$ となる。実際，$F(v') = F(v)$ より，Lemma 5 により，$b_0 f(v')^{-1} = f^{\vee}(F(v')) = f^{\vee}(F(v)) = b_0 f(v)^{-1}$ が成り立つ．

従って 定数 c で, $F^{-1}(F(v)) \subset f^{-1}(c)$ となるものが存在する。

さて $F^{-1}(F(v))$ は closed in Ω である.（実際 $F: \Omega \to V^\vee$ は連続で一点 $F(v) \in V^\vee$ は closed ゆえ, その逆像 $F^{-1}(F(v))$ も closed である.） 従って, $F^{-1}(F(v))$ は closed in $f^{-1}(c)$ $(\subset \Omega)$ となるが, $f^{-1}(c)$ は V の closed subset であるから $F^{-1}(F(v))$ は closed in V となる。 さて,

$F^{-1}(F(v)) \supset O_0 \cap F^{-1}(F(v)) \supset v + U$ で

$F^{-1}(F(v))$ は Zariski-closed in V ゆえ, 両辺の (Z)-closure をとると, $F^{-1}F(v) \supset \overline{v+U} = v + (T_{F(v)}F(\Omega))^{\perp}$ を得る。

(ii) $v \in O_0$ に対し, Lemma 6 の (iii) と Lemma 8 の (i) により, $F^\vee F(v) \in v + (T_{F(v)}F(\Omega))^{\perp} \subset F^{-1}(F(v))$, 即ち, $FF^\vee F(v) = F(v)$ $(\forall v \in O_0)$ となり, $FF^\vee = id._{F(O_0)}$ であるが, $F(O_0)$ は $F(\Omega)$ の中の open dense subset であるから, $FF^\vee = id.$ on $F(\Omega)$ を得る. $F^\vee F = id.$ on $F^\vee(\Omega^\vee)$ も同様にして得られる. // Lemma 8.

Lemma 9　$F(\Omega)$ は smooth な affine variety で しかも Zariski-closed in $\Omega^\vee$ である。

∵) Lemma 8 の (ii) より, $F(\Omega) = \{ v^\vee \in \Omega^\vee \mid v^\vee = FF^\vee(v^\vee) \}$ であるが, $v^\vee = FF^\vee(v^\vee)$ は代数関係ゆえ, $F(\Omega)$ は Zariski-closed in $\Omega^\vee$　ところが $\Omega^\vee$ は affine variety (cf. §1, Lemma 1) であったから, $F(\Omega)$ は affine variety である。　さて,

$$(dF)_{F^\vee(v^\vee)}(V) \supset (dF)_{F^\vee(v^\vee)}\left(T_{F^\vee(v^\vee)}F^\vee(\Omega)\right) = T_{v^\vee}F(\Omega)$$

一方　$F(\Omega) \xleftarrow{F} \Omega$ を考えると

$$T_{v^\vee}F(\Omega) \supset (dF)_{F^\vee(v^\vee)}\left(T_{F^\vee(v^\vee)}\Omega\right) = (dF)_{F^\vee(v^\vee)}(V)$$

$\therefore\ T_{v^\vee}F(\Omega) = (dF)_{F^\vee(v^\vee)}(V)$　　とくに

$\dim T_{v^\vee}F(\Omega) = \dim (dF)_{F^\vee(v^\vee)}(V)$ が成り立つが tangent space の次元は特異点があれば突然はねあがるが, さがることはない。一方 $(dF)_{F^\vee(v^\vee)}$ の次元は Jacobian の rank であるから, rank のさがったところでその次元はさがるが, はねあがることはない。だから $\dim T_{v^\vee}F(\Omega)$ は定数, 即ち $F(\Omega) =$ smooth. // Lem 9

Lemma 10. $\left(\dfrac{\partial^2 \log f^\vee}{\partial y_i \partial y_j}(v^\vee)\right)\Big|_{T_{v^\vee}F(\Omega)}$ は $T_{v^\vee}F(\Omega)$ 上に $G_{v^\vee}$-invariant, non-degenerate, symmetric bilinear form を定める.

∵) non-degenerate のみを示せば十分 (他は易しい)

$$\begin{array}{ccc} T_{v^\vee}V^\vee & \xrightarrow{(dF^\vee)_{v^\vee}} & T_{F^\vee(v^\vee)}V \\ \cup & & \cup \\ T_{v^\vee}F(\Omega) & \xrightarrow{\sim} & T_{F^\vee(v^\vee)}F^\vee(\Omega^\vee) \end{array}$$ で,

$(dF^\vee)_{v^\vee}\Big|_{T_{v^\vee}F(\Omega)}$ を座標でかけば, $\left(\dfrac{\partial^2 \log f^\vee}{\partial y_i \partial y_j}(v^\vee)\right)\Big|_{T_{v^\vee}F(\Omega)}$ が得られる. よって $\det\left(\dfrac{\partial^2 \log f^\vee}{\partial y_i \partial y_j}(v^\vee)\right) \neq 0$. // Lem 10.

Lemma 11 (Luna, Inv. Math. 1972)
G = reductive 代数群, X = smooth affine variety, で G が X に作用しているとする。しかも, $\forall x \in X$ に対し, $T_x X$ 上に G_x-inv. non-deg. symmetric bilinear form があれば $X \supset U$ subset で (1) open, dense in (Z)-topology (2) $GU = U$ (3) $\forall x \in U$ に対し $G\cdot x$ = closed in X.

定理A (i) $F(\Omega) = F(O_0) = O_1^\vee$

(ii) $O_1 \underset{F^\vee}{\overset{F}{\rightleftarrows}} O_1^\vee$ 逆対応

(iii) $O_1^\vee$ の conormal bundle を $(TO_1^\vee)^\perp$ とする:

$$(TO_1^\vee)^\perp = \{(v, v^\vee) \in V \times O_1^\vee \mid v \in (T_{v^\vee} O_1^\vee)^\perp\}.$$

$\Phi(v, v^\vee) = v + F^\vee(v^\vee)$ $(\in V)$ とおくと

$$\begin{tikzcd}
(TO_1^\vee)^\perp \arrow[rr, "\Phi", "\sim"'] \arrow[dr, "p"'] \arrow[r, phantom, shift right=6ex, "\circlearrowright"] & & \Omega \arrow[dl, "F"] \\
& O_1^\vee &
\end{tikzcd}
\qquad \left(\begin{array}{c} G\text{作用と} \\ \text{可換} \end{array}\right)$$

p = projection

特に、Ω は $O_1^\vee$ の conormal bundle と完全に同一視できる。

証明) (i) Lemmas 9, 10, 11 により $F(\Omega) \supset U$ で ① open, dense, ② $G \cdot U = U$ ③ $G \cdot x$ = closed in $F(\Omega)$ $(\forall x \in U)$, となるものがある。ところで $F(O_0)$ も $F(\Omega)$ の open, dense subset である。従って $U \cap F(O_0) \neq \phi$ ゆえ、$U \cap F(O_0) \ni v^\vee$ とする。(F は G の作用と可換だから) $G \cdot v^\vee = F(O_0)$ で ③より、これは closed in $F(\Omega)$.
$F(O_0)$ = dense in $F(\Omega)$ でもあったから、$F(O_0) = F(\Omega) \subset \Omega^\vee$.
Lemma 9 より、$F(\Omega)$ は $\Omega^\vee$ 内で Zariski-closed ゆえ、$F(O_0) = G \cdot v^\vee$ は $\Omega^\vee$ 内の closed orbit. Lemma 2 より closed

orbit は $O_1^\vee$ 唯一つであるから $F(O_0)=F(\Omega)=O_1^\vee$ を得る.

(ii) は (i) と Lemma 8 の (ii) より明らか、

(iii) G作用と可換というところは殆ど明らかであるから他の部分を示す.

$v^\vee \in O_1^\vee$, $v \in F^{-1}(v^\vee)$ とすると, $F(v)=v^\vee \in O_1^\vee = F(O_0)$ ゆえ Lemma 6 の (iii) が使えて,

$$F^\vee F(v) - v \in \left(T_{F(v)} F(\Omega)\right)^\perp \quad \text{即ち}$$

$$v \in F^\vee v^\vee + \left(T_{v^\vee} F(\Omega)\right)^\perp \quad (\forall v \in F^{-1}(v^\vee)) \text{ となり}$$

$$(*) \quad F^{-1}(v^\vee) \subset F^\vee v^\vee + \left(T_{v^\vee} F(\Omega)\right)^\perp \text{ を得る。}$$

他方, $v^\vee \in F(O_0)$ ゆえ $v' \in O_0$ で $v^\vee = F(v')$ となるものがある。この $v' \in O_0$ に対し Lemma 8 の (i) が使えて,

$$F^{-1}F(v') \supset v' + \left(T_{F(v')} F(\Omega)\right)^\perp \text{ を得る.}$$

$v^\vee = F(v')$ ゆえ

$$(**) \quad F^{-1}(v^\vee) \supset v' + \left(T_{v^\vee} F(\Omega)\right)^\perp \quad \text{となる.}$$

$(*)$ と $(**)$ をあわせると, $F^\vee v^\vee + \left(T_{v^\vee} F(\Omega)\right)^\perp$ と $v' + \left(T_{v^\vee} F(\Omega)\right)^\perp$ は同じ次元の affine space で包含関係があるから一致することを使えば,

$$F^{-1}(v^\vee) = F^\vee v^\vee + \left(T_{v^\vee} F(\Omega)\right)^\perp \text{ を得る。}$$

(i)より $F(\Omega)=O_1^\vee$ ゆえ $F^{-1}(v^\vee)=F^\vee v^\vee+(T_{v^\vee}O_1^\vee)^\perp$
$=F^\vee v^\vee+P^{-1}(v^\vee)$. さて $\Phi(v,v^\vee)=F^\vee v^\vee+v$
ゆえ $F^\vee v^\vee+P^{-1}(v^\vee)=\Phi(P^{-1}(v^\vee))$, 即ち
$P^{-1}(v^\vee)\xrightarrow[\sim]{\Phi}F^{-1}(v^\vee)\subset\Omega$ となり可換性がいえた.
$\Psi(v)=(v-F^\vee F(v),\ F(v))$ とおくと $\Phi^{-1}=\Psi$
となり Φ は同型である. // Th. A

§3 D-module

ここでは§4で必要な解析の準備をする。

$V=\mathbb{C}^n$: affine space, とみて その上の関数環

$A=\mathbb{C}[V]=\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$ とする. これに対して

operator ring D を

$D=D(V)=\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n,\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}]$ とする. 但し

$x_i:\varphi\longmapsto x_i\varphi$, $\frac{\partial}{\partial x_i}:\varphi\longmapsto\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ なる operator を

表す (ここで φ の範囲は必要に応じて決めることにする. 即ち

Dの元は抽象的な operator たちである)

$P, Q\in D$ に対して, $[P, Q]=PQ-QP$ とおくと

$[x_i, x_j]=0$, $[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}]=0$,

$$[\frac{\partial}{\partial x_i}, x_j]=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$ が成り立つ.

むしろ, Dを生成元がこれ等の関係式をみたす抽象的な

$\mathbb{C}$-algebra と考えてもよい。

感じがわかるように $[\frac{\partial}{\partial x_i}, x_i]=1$ を示してみよう.

実際 $[\frac{\partial}{\partial x_i}, x_i]\varphi=(\frac{\partial}{\partial x_i}x_i-x_i\frac{\partial}{\partial x_i})\varphi$

$=\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i\varphi)-x_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\varphi+x_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}-x_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=1\cdot\varphi$ //

Dの元 P を differential operator (微分作用素) という.

それは,

$$P = \sum_{i_1,\cdots,i_n \geq 0} a_{i_1\cdots i_n}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{i_n}$$

$$a_{i_1\cdots i_n}(x) \in \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$$

の形をしている. 今,

$$P_j = \sum_{i_1+\cdots+i_n=j} a_{i_1\cdots i_n}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{i_n}$$ とおくと

$P = P_0 + P_1 + \cdots + P_r$ ($P_r \neq 0$) と表わせる. このとき

r を P の order といい, $r = \mathrm{ord}\, P$ と表わす. そして,

$$\sigma(P) = \sum_{i_1+\cdots+i_n=r} a_{i_1\cdots i_n}(x) y_1^{i_1}\cdots y_n^{i_n} \in \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n] = \mathbb{C}[V\times V^\vee]$$

を P の <u>principal symbol</u> という. ($x_1,\cdots,x_n$ を V, $y_1,\cdots,y_n$ を V の dual $V^\vee$ の座標函数 とみる)

定義. $M = A$-module ($A = \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$), $m \in M$ とするとき m の annihilator は A の ideal になる.

$$\mathrm{Ann}_A(m) \overset{\mathrm{def}}{=} \{ a \in A = \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n] \mid am = 0 \} \underset{\text{ideal}}{\subset} A$$

$$\mathrm{Supp}(m) \overset{\mathrm{def}}{=} \{ v \in V \mid a(v) = 0 \text{ for } {}^\forall a \in \mathrm{Ann}_A(m) \}$$

これを m の support という. $\mathrm{Supp}(M) = \bigcup_{m\in M} \mathrm{Supp}(m)$ を

M の support という.

定義　$M = D$-module, $m \in M$ に対して

$\mathrm{Ann}_D(m) \overset{\mathrm{def}}{=} \{P \in D \mid Pm = 0\} \underset{\text{left ideal}}{\subset} D$

$ch(m) \overset{\mathrm{def}}{=} \{(v, v^\vee) \in V \times V^\vee \mid \sigma(P)(v, v^\vee) = 0 \text{ for } {}^\forall P \in \mathrm{Ann}_D(m)\}$

これを m の characteristic variety という.

$ch(M) = \bigcup_{m \in M} ch(m)$ を M の characteristic variety (特性多様体) という.　D-module M は A-module でもあるから M に対して $\mathrm{Supp}(M)$, $\mathrm{Supp}(m)$ ($m \in M$) 等も定義されていることに注意しよう.

Lemma 1.　$M = D$-module に対して,

(i) $P \in D$, $m \in M$, に対して $\mathrm{Supp}(Pm) \subset \mathrm{Supp}(m)$.

(ii) $M = Du$ ならば, $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}(u)$

∵) (i) ${}^\forall P \in D$ に対し $\mathrm{Supp}(m) \supset \mathrm{Supp}(Pm)$ を示すには,

① $\mathrm{Supp}(m) \supset \mathrm{Supp}(x_i m)$, ② $\mathrm{Supp}(m) \supset \mathrm{Supp}(\frac{\partial}{\partial x_i} m)$

③ $\mathrm{Supp}(m_1) \cup \mathrm{Supp}(m_2) \supset \mathrm{Supp}(m_1 + m_2)$ を示せばよい.

① を示す.　$x \in \mathrm{Ann}_A(m) \Rightarrow xm = 0 \Rightarrow x(x_i m) = x_i(xm) = 0$

$\Rightarrow x \in \mathrm{Ann}_A(x_i m)$　即ち $\mathrm{Ann}_A(m) \subset \mathrm{Ann}_A(x_i m)$,　よって

$\mathrm{Ann}_A(m)$ の共通零点 $\mathrm{Supp}(m)$ は $\mathrm{Ann}_A(x_i m)$ の共通零点 $\mathrm{Supp}(x_i m)$ を含む : $\mathrm{Supp}(m) \supset \mathrm{Supp}(x_i m)$.

② を示す. $a \in \mathrm{Ann}_A(m) \Rightarrow 0 = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\underbrace{a^2 m}_{0})$

$= 2\dfrac{\partial a}{\partial x_i}\overbrace{am}^{=0} + a^2\dfrac{\partial m}{\partial x_i}$ i.e. $a^2\dfrac{\partial m}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow a^2 \in \mathrm{Ann}_A\left(\dfrac{\partial m}{\partial x_i}\right)$

今 $\begin{array}{ccc} \varphi : \mathrm{Ann}_A(m) & \to & \mathrm{Ann}_A\left(\frac{\partial m}{\partial x_i}\right) \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ a & \longmapsto & a^2 \end{array}$ とすると, $\varphi(\mathrm{Ann}_A(m)) \subset \mathrm{Ann}_A\left(\frac{\partial m}{\partial x_i}\right)$

ゆえ 共通零点を考えると $\mathrm{supp}\left(\frac{\partial m}{\partial x_i}\right) \subset \varphi(\mathrm{Ann}_A(m))$ の共通零点

$= \{ v \in V \mid a^2(v)\,(= a(v)^2) = 0 \ (\Leftrightarrow a(v) = 0) \text{ for } {}^\forall a \in \mathrm{Ann}_A(m) \}$

$= \mathrm{Supp}(m)$ i.e. $\mathrm{supp}(m) \supset \mathrm{supp}\left(\frac{\partial m}{\partial x_i}\right)$.

③ を示す. $\mathrm{Ann}_A(m_1)\mathrm{Ann}_A(m_2) \subset \mathrm{Ann}_A(m_1+m_2)$ ゆえ 共通零点たちは, $\mathrm{supp}(m_1) \cup \mathrm{Supp}(m_2) \supset \mathrm{Supp}(m_1+m_2)$ となる.

(ii) $\mathrm{Supp}(M) = \bigcup_{P \in D} \mathrm{Supp}(Pu) \overset{(i)}{\subset} \mathrm{Supp}\, u$

$\underset{D \ni 1}{\overset{}{\subset}} \bigcup_{P \in D} \mathrm{Supp}(Pu) = \mathrm{Supp}(M)$ i.e. $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}\, u$. //

Lemma 2. $M = D$-module に対して,
$$ch(M)\cap(V\times\{0\}) = Supp(M)\times\{0\} \quad (\subset V\times V^{\vee})$$

∵) $^{\forall}m\in M$ に対して, $ch(m)\cap(V\times\{0\}) = Supp(m)\times\{0\}$

を示せば $ch(M)=\bigcup_{m\in M} ch(m)$, $Supp(M)=\bigcup_{m\in M} Supp(m)$ ゆえ

十分である. $J = Ann_D(m)$ とおくとき,

$(v, 0)\in ch(M) \iff \sigma(P)(v,0)=0$ for $^{\forall}P\in J$

(ここで, もし $ord\,P = r > 0$ なる $\sigma(P)(x, y)$ は y について r 次同次多項式ゆえ常に $\sigma(P)(v,0)$ が成り立つから, この条件は実質的には $ord\,P=0$ 即ち $P\in J\cap A$ についての条件である. 従って)

$\iff \sigma(P)(v,0)=0$ for $^{\forall}P\in J\cap A$

$\iff a(v)=0$ for $^{\forall}a\in Ann_A(m) \iff v\in Supp(m)$

//Lem 2

Fourier変換

$\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \overset{def}{=} \{\varphi(x)\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) \mid {}^{\forall}P\in D$ に対し 定数 $C>0$ で $|(P\varphi)(x)|< C$ on $\mathbb{R}^n$ なるものが存在する$\}$

の元を急減少関数という. どんな多項式(多項式もDの元)を

かけても全体で定数でおさえられてるわけだから，微分もこめて無限遠で非常に小さくなっている関数たちです．従って積分の収束などがうまくいく． $\varphi \in \mathcal{S}$ の Fourier 変換 $\mathcal{F}(\varphi)(y) \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{\sqrt{-1}x \cdot y} dx$ を考えてみる。但し $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$ に対して $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ ， $dx = dx_1 \cdots dx_n$ である．

これはふつうの Fourier 変換だが $\mathcal{F}(x_i \varphi)$, $\mathcal{F}(\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi)$ 等を調べてみよう。

$$\mathcal{F}(x_i\varphi)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} x_i \varphi(x) e^{\sqrt{-1}x \cdot y} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \frac{1}{\sqrt{-1}} \left(\frac{\partial}{\partial y_i} e^{\sqrt{-1}x \cdot y}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\mathcal{F}(\varphi)(y)\right).$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} e^{\sqrt{-1}x \cdot y} dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \sqrt{-1}\, y_i e^{\sqrt{-1}x \cdot y} dx \quad \text{（部分積分による）}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} y_i \mathcal{F}(\varphi)(y)$$

即ち $\mathcal{F}(x_i\varphi) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial y_i} \mathcal{F}(\varphi)$, $\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right) = \frac{1}{\sqrt{-1}} y_i \mathcal{F}(\varphi)$

となる。

これらをまとめて表わす為に <u>operators の Fourier 変換</u>を，

$\mathcal{F}(x_i) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial y_i}$ ，$\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{-1}} y_i$ によって

定義すると，

$\mathcal{F}: D(V) \xrightarrow{\sim} D(V^\vee)$ が得られ，$\mathbb{C}$-algebra としての

同型を与える。そして

$\boxed{\mathcal{F}(P\varphi) = \mathcal{F}(P)\mathcal{F}(\varphi)}$ なる関係が得られる．

そこで一般に $M = D(V)$-module に対して

$\mathcal{F}(M)$ を集合としては M と同じだが，次のようにして

$D(V^\vee)$-module の構造を入れたものとする。

$m \in M$ を $\mathcal{F}(M)$ の元と思うとき $\mathcal{F}(m)$ と書くことに

すれば，$\mathcal{F}(P)\mathcal{F}(m) = \mathcal{F}(Pm) \quad (P \in D(V),\ m \in M)$

により，$D(V^\vee)$-module の構造を入れる。これがうまく

Fourier 変換というものをとらえている，と思われる

わけです．

Lemma 3 (i) $E=\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ とおく。 $c\in\mathbb{Z}$ と $P\in D$ に対して、次の条件は同値

(a) $P=\sum_{i_1+\cdots+i_n-j_1-\cdots-j_n=c} a_{i_1\cdots i_n j_1\cdots j_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{j_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{j_n}$ とあらわせる。

(b) $EP-PE=cP$

(ii) $P\in D$ が $\overbrace{}^{\text{ある } c\in\mathbb{Z} \text{ に対して}}$ (i) の条件をみたす時、Fourier 変換により principal symbol は、$\sigma(\mathcal{F}(P))(x,y)=\sigma(P)\left(\frac{x}{\sqrt{-1}},\frac{y}{\sqrt{-1}}\right)$ とかわる。

(iii) $m\in M$ が $Em\in\mathbb{C}m$ をみたす時、$ch(\mathcal{F}(Dm))=\sqrt{-1}\,ch(Dm)$.

Remark. 一般には、

$$\sigma(\mathcal{F}(P))(x,y)\neq\sigma(P)\left(\frac{x}{\sqrt{-1}},\frac{y}{\sqrt{-1}}\right)$$

$$ch(\mathcal{F}(M))\neq\sqrt{-1}\,ch(M).$$

たとえば、$P=x^2\frac{d}{dx}+x\frac{d^3}{dx^3}$ を考えてみて下さい。

以下で構成する D-module N_α の生成元 f^α は、$Ef^\alpha\in\mathbb{C}f^\alpha$ をみたすことに注意。

さて $f \in \mathbb{C}[V]$ にたいして、$B \subset f^{-1}\mathbb{C}^\times$ なる open ball を考える。(open ball でなくても単連結ならばよいが簡単の為そのようにする)。$s \in \mathbb{C}$ にたいし、f^s は多価関数だが、$f^s|B$ はある branch をとれば、1価関数になる。それを単に f^s と書くことにする。

D-係数の s の多項式を $D[s]$ と記す。($Ps = sP$ for $\forall P \in D$ である)

そして $N \overset{\text{def}}{=} D[s]f^s$ ($s \cdot f^s = sf^s$) を考え、$\alpha \in \mathbb{C}$ にたいし、$N_\alpha \overset{\text{def}}{=} N/(s-\alpha)N$ とする。

自然な準同型 $N \longrightarrow N_\alpha = N/(s-\alpha)N$ による f^s の image を f^α と書く。f^α は関数でなく D-module N_α の元というだけであり、$N_\alpha = Df^\alpha$ である。

Lemma 4 (M.Sato-M.Kashiwara-T.Kimura-T.Oshima, Inv. Math 1980 の appendix)

W を $\{(s, v, s(\mathrm{grad} \log f)(v)) \in \mathbb{C} \times V \times V^\vee \mid f(v) \neq 0\}$ の closure とすると、

$W \cap (\{0\} \times V \times V^\vee) = \{0\} \times ch(N_\alpha)$ 即ち

これにより $ch(N_\alpha)$ は完全に記述される。

Remark　Lemma 4 に於て closure は (Z) でも (C) でも同じである。これは既約多様体の中で $\{f(v)\neq 0\}$ は (Z) でも (C) でも dense であることによる。

以上は P.V. に関係なかった部分で、ここから P.V. の話へいく。

以下 $G=$ reductive 代数群, $\rho: G\to GL(V)$ をその表現で (G,ρ,V) が P.V. とする。

$V, f, \phi, \Omega=f^{-1}\mathbb{C}^{\times}, O_0=$ open orbit in Ω, $O_1=$ closed orbit in Ω, $V^{\vee}, f^{\vee}, \phi^{\vee}=\phi^{-1}, \Omega^{\vee}, O_0^{\vee}, O_1^{\vee}, F^{\vee}$ 等は §2 の通りとする。

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Lemma 5}\quad ch(N_\alpha)\cap(\{0\}\times V^{\vee})=\{0\}\times\overline{O_1^{\vee}} \\ \quad\text{但し } \overline{O_1^{\vee}} \text{ は } V^{\vee} \text{ における } O_1^{\vee} \text{ の Zariski-closure.}\end{array}}$$

∵) まず $ch(N_\alpha)\cap(\{0\}\times V^{\vee})=\{0\}\times$ closure of $\{\operatorname{grad}\log f(v)\mid f(v)\neq 0\}$ を示す。$\operatorname{grad}\log f=\left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots\right)$ ゆえ -1 次同次であるから $s(\operatorname{grad}\log f)(v)=\operatorname{grad}\log f\left(\frac{v}{s}\right)$ が成立つことに注意すると、Lemma 4 より $\subset$ は明らかである。逆に $(0,0,\operatorname{grad}\log f(v))$ $=\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon,\varepsilon v,\varepsilon(\operatorname{grad}\log f)(\varepsilon v))\in\{0\}\times ch(N_\alpha)$ より

つが示せる. 即ち $ch(N_\alpha)\cap(\{0\}\times V^\vee)=$

$\{0\}\times\overline{F(\Omega)}\overset{\text{段A}}{=\!=}\{0\}\times\overline{O_1^\vee}$ // Lemma 5

$$\boxed{\text{Lemma 6}\quad \mathrm{Supp}\,\mathcal{F}(f^\alpha)=\mathrm{Supp}\,\mathcal{F}(N_\alpha)=\overline{O_1^\vee}}$$

∵) $N_\alpha=Df^\alpha$ (このDはV上のD) より

$\mathcal{F}(N_\alpha)=D\mathcal{F}(f^\alpha)$ (このDは$V^\vee$上のD), よって

Lemma 1の(ii)より $\mathrm{Supp}\,\mathcal{F}(N_\alpha)=\mathrm{Supp}\,\mathcal{F}(f^\alpha)$

次に $\{0\}\times\mathrm{Supp}\,\mathcal{F}(N_\alpha)\underset{\text{Lem 2}}{=\!=}(\{0\}\times V^\vee)\cap ch\,\mathcal{F}(N_\alpha)$

$\underset{\text{Lem 3の(ii)}}{=\!=}(\{0\}\times V^\vee)\cap\sqrt{-1}\,ch\,N_\alpha=\sqrt{-1}((\{0\}\times V^\vee)\cap ch\,N_\alpha)$

$\underset{\text{Lem 5}}{=\!=}\sqrt{-1}(\{0\}\times\overline{O_1^\vee})=\{0\}\times\sqrt{-1}\,\overline{O_1^\vee}$ ($\sqrt{-1}\,\overline{O_1^\vee}$, $\overline{O_1^\vee}$ は

共に(唯一の)closed orbit ゆえ) $=\{0\}\times\overline{O_1^\vee}$

即ち $\mathrm{Supp}\,\mathcal{F}(N_\alpha)=\overline{O_1^\vee}$ // Lem 6

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Lemma 7.}\quad a\in\mathbb{C}[V^\vee] \text{ が } a|_{O_1^\vee}\equiv 0 \text{ ならば,}\\ \mathrm{Supp}(a\mathcal{F}(f^\alpha))\cap\Omega^\vee=\phi \text{ をみたす.}\end{array}}$$

証明は §4 Appendix をみよ.

Remark. $a \in \mathbb{C}[V^\vee]$ が $a|_{O_1^\vee} \equiv 0$ をみたせば、

$a^N \mathcal{F}(f^\alpha) = 0$ なる N が存在する。$\mathrm{Supp}\,\mathcal{F}(f^\alpha) = \overline{O_1^\vee}$ (Lemma 6)

ということは、環論的にいえば、こうなる。　Lemma 7 の方は、

$a\mathcal{F}(f^\alpha)|_{\Omega^\vee} = 0$ ということである。

$J_s = \{ P(s) \in D[s] \mid P(s) f^s = 0 \}$,

$J_\alpha = \{ P \in D \mid Pf^\alpha = 0 \}$ とおくと

$N = D[s] f^s \cong D[s]/J_s$

$N_\alpha = N/(s-\alpha)N = Df^\alpha \cong D/J_\alpha$ である。

この J_α は何か考えてみよう。

(*) $P \in J_\alpha \iff Pf^\alpha = 0 \iff Pf^s \in (s-\alpha)N$

$\iff \exists Q(s) \in D[s]$ s.t. $Pf^s = (s-\alpha)Q(s)f^s$

$\iff \exists Q(s) \in D[s]$ s.t. $P - (s-\alpha)Q(s) \in J_s$

即ち

$$\boxed{P \in J_\alpha \iff \exists Q(s) \in D[s] \text{ s.t. } P - (s-\alpha)Q(s) \in J_s}$$

さて、f を ϕ に対応する相対不変式とする。

(*) $\quad f(gv) = \phi(g) f(v) \quad (g \in G,\ v \in V)$

$\{v_1, \cdots, v_n\}$: V の base をとり、座標でみてゆこう。

$A \in \mathfrak{g} = Lie(G)$ に対して,

$$\begin{cases} \rho(A)v_\mu = \sum_{\lambda=1}^{n} v_\lambda a_{\lambda\mu} \quad (a_{\lambda\mu} \in \mathbb{C}) \\ v = \sum_{\mu=1}^{n} v_\mu c_\mu = \sum_{\mu=1}^{n} v_\mu x_\mu(v) \quad (x_\mu \text{ は座標関数}) \end{cases}$$

とすると,

$$\rho(A)v = \sum_{\mu=1}^{n} \rho(A)v_\mu \cdot x_\mu(v) = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n} v_\lambda a_{\lambda\mu} x_\mu(v)$$

となる.

(*) において $g = \exp(tA)$ とおくと,

$$f(\exp tA \cdot v) = f\left(\left(1 + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!} + \cdots\right)v\right)$$

$$= f(v + tAv) + O(t^2) \qquad (\rho(A)v = Av \text{ と略記!})$$

$$= f\left(\sum_{\lambda=1}^{n} v_\lambda x_\lambda(v) + t\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} v_\lambda a_{\lambda\mu} x_\mu(v)\right) + O(t^2)$$

$$= f\left(\sum_{\lambda=1}^{n} v_\lambda \left(x_\lambda(v) + t\sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu} x_\mu(v)\right)\right) + O(t^2)$$

$$= f(\cdots, \underbrace{x_\lambda + t\sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu} x_\mu}_{\lambda\text{番目の変数}}, \cdots) + O(t^2)$$

従って $$\frac{d}{dt} f((\exp tA)v)\Big|_{t=0} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}\left(\sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu} x_\mu\right)$$

$$= \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu} x_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = \frac{d}{dt} \exp t\phi(A)\Big|_{t=0} f = \phi(A)f$$

故に

$$(**)\quad \left(\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\lambda} - \phi(A)\right) f = 0$$ がいえる.

標語的にいえば

$$(*) \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}} (**)$$

即ち (**) は f の相対不変性を微分方程式によって記述したものである。((**) は Lemma 6 の (i) と本質的に同じであるが、くり返し説明したのである)

f^s の character (の微分) は $s\phi(A)$ であるから、(**) より

$$\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\lambda} - s\phi(A) \in J_s ,$$ を得る.

これを書き換えると、

$$\left(\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\lambda} - \alpha\phi(A)\right) - (s-\alpha)\phi(A) \in J_s$$

一般に $P-(s-\alpha)\overset{\exists}{Q}(s)\in J_s \Leftrightarrow P\in J_\alpha$ であったから、

$$P_{\alpha,A} \overset{def}{=} \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\lambda} - \alpha\phi(A) \in J_\alpha$$ を得る。

即ち、$P_{\alpha,A} f^\alpha = 0$, これを Fourier 変換して

$\mathcal{F}(P_{\alpha,A})\mathcal{F}(f^\alpha)=0$ であり、

$$\mathcal{F}(P_{\alpha,A}) = \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial y_\mu}\frac{1}{\sqrt{-1}} y_\lambda - \alpha\phi(A)$$

$$= -\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu} y_\lambda \frac{\partial}{\partial y_\mu} - \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\lambda} - \alpha\phi(A)$$ となる.

ここで $\phi_0(A) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\lambda} = \mathrm{trace}\,\rho(A)$ とおく. これは

群の character $\det \rho(g)$ の微分である。この記号を使うと,

$$\mathcal{F}(P_{\alpha,A}) = \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} (-a_{\mu\lambda}) y_\mu \frac{\partial}{\partial y_\lambda} - (\phi_0 + \alpha\phi)(A)$$ を得る.

以上により,

Lemma 8. $\left(\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} (-a_{\mu\lambda}) y_\mu \frac{\partial}{\partial y_\lambda} - (\phi_0 + \alpha\phi)(A)\right) \mathcal{F}(f^\alpha) = 0$

但し, $\rho(A) = (a_{\lambda\mu})_{1 \le \lambda,\mu \le n}$, $\phi_0(A) = \mathrm{trace}\,\rho(A)$

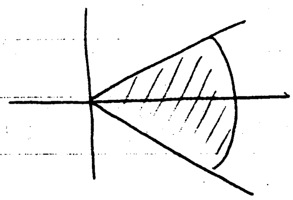
Lemma 7. Lemma 8 により f^α の Fourier変換 $\mathcal{F}(f^\alpha)$ のもつ性質が記述されている. しかし f^α は関数でなく D-module のある抽象的な元で, Fourier変換というのも抽象的に定義されたもので, 内実を伴わない. せめて内実を伴わせようということで, 次に hyperfunction を考える.

hyperfunction（佐藤超関数）

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 Γ を，0 を頂点とする open convex cone と 0 を中心とする open ball の共通部分とする。

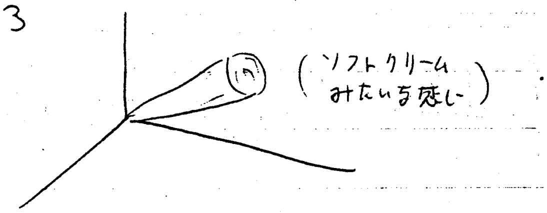
例えば，$n=1$ のときは $\Gamma = (-\varepsilon, 0), (0, \varepsilon), (-\varepsilon, \varepsilon)$ 等であり

$n=2$

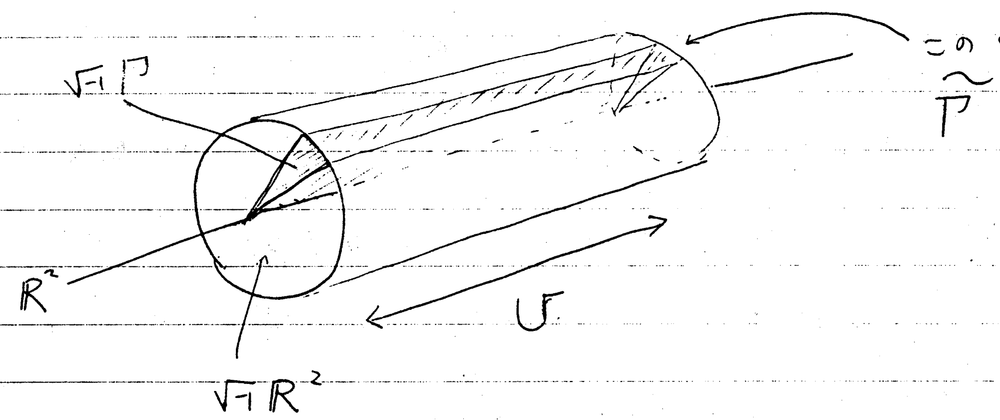


，

$n=3$



U を $\mathbb{R}^n$ の open set，$\tilde{\Gamma} = U + \sqrt{-1}\,\Gamma$ とおく。



$\mathcal{O}(\tilde{\Gamma}) \overset{\text{def}}{=}$ $\tilde{\Gamma}$ 上の正則関数全体

$\tilde{\mathcal{B}}(U) = \bigoplus_{\Gamma} \mathcal{O}(\tilde{\Gamma})$（このような Γ をすべて動かした直和）

$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \phi$，$\varphi_i \in \mathcal{O}(\tilde{\Gamma}_i)$（$i=1,2$）のとき，

$\varphi_1 \sim \varphi_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \varphi_1|_{\widetilde{\Gamma}_1 \cap \widetilde{\Gamma}_2} = \varphi_2|_{\widetilde{\Gamma}_1 \cap \widetilde{\Gamma}_2}$ として,

これから生成される同値関係を $\overset{\cdot}{\sim}$ と書き,

$\mathcal{B}(U) \overset{\text{def}}{=} \widetilde{\mathcal{B}}(U)/\sim$ とおく. この元を,

<u>hyperfunction</u> とよぶ。

何を考えているかというと, くさび型 $\widetilde{\Gamma} = U + \sqrt{-1}\,\Gamma$ 上の正則関数が U の方へどんどん近付いていって boundary value (境界値) がでてくるが, これを定義したい.

この同値類は何を意味しているかというと少し方向がちがっても, 共通部分があって, その上で同じ正則関数なら同じ boundary value を与えている筈だから同じとみなせば, その同値関係でわったもの $\widetilde{\mathcal{B}}(U)/\sim$ の元は boundary value を抽象的にとらえたものと考えられる。

この元のことを hyperfunction とよぶわけで,

$\varphi \in \mathcal{O}(\widetilde{\Gamma}) \subset \widetilde{\mathcal{B}}(U)$ の同値類を $b_\Gamma(\varphi)$ と書いて,

<u>φ の境界値</u>とよぶ.

Remark. 実はこの定義は少し不十分で,

$U \mapsto \mathcal{B}(U)$ は presheaf にしかならなくて, これから sheaf を作れば, 本当の hyperfunction が得られる。

sheaf というのは，local に hyperfunctions が与えられていて，はりあわせられたら global な hyperfunction が得られる，という axiom を付け加えるということだが，ここでは省く．

例1．　$C_c(\mathbb{R})$ で $\mathbb{R}$ 上の compact support をもつ連続関数全体とする．

$u \in C_c(\mathbb{R})$，$z \in \mathbb{R} \pm \sqrt{-1}(0, \varepsilon)$ に対して

$$\varphi_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(t)}{t-z}\, dt$$ とおく．

$z \notin \mathbb{R}$ ゆえ $t-z \neq 0$ で u は compact support をもつから積分の収束に問題はない．従って，z の正則関数を表わす．

$$\varphi_+(x+i0) - \varphi_-(x-i0)$$

$$\overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\varphi_+(x+i\varepsilon) - \varphi_-(x-i\varepsilon) \right)$$

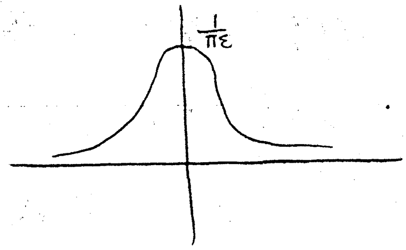
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{u(t)}{t-x-i\varepsilon} - \frac{u(t)}{t-x+i\varepsilon} \right) dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} u(t) \frac{2i\varepsilon}{(x-t)^2+\varepsilon^2}\, dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} u(t)\, m_\varepsilon(x-t)\, dt, \quad \text{但し } m_\varepsilon(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2}$$

となる。

$m_\varepsilon(t)$ は



というような左右対称な

関数で, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} m_\varepsilon(t)\,dt = 1$ （$t = \varepsilon\tan\theta$ により θ へ変数変換すれば容易に計算できる）が成り立つ. こういうのを molifier といい解析の方でよく知られている.

結局 $\varphi_+(x+i0) - \varphi_-(x-i0) = u(x)$ となる.

$b_{(0,\varepsilon)}(\varphi_+) \overset{\mathrm{def}}{=} \varphi_+(x+i0) \in \mathcal{B}$

$b_{(-\varepsilon,0)}(\varphi_-) \overset{\mathrm{def}}{=} \varphi_-(x-i0) \in \mathcal{B}$ と hyperfunctions を定義すれば, $u = \varphi_+(x+i0) - \varphi_-(x-i0) \in \mathcal{B}$

即ち, compact support をもつ連続関数は hyperfunction とみなせる: $C_c(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}$.

他にも distribution 等も hyperfunction とみなせる.

（東大 lecture note, 小松彦三郎）を参照して下さい.

実質的には同じ idea ですが, 解析的に少し難しいところができます。

例2） Diracの δ-関数 $\delta(x)$ を考える．

それは，どんな関数 φ に対しても，

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$$ となる関数である．

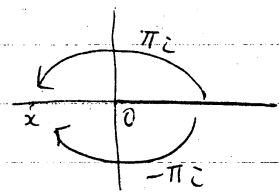
例1で $u(x)=\delta(x)$ として形式的に公式を使うと，

$$\varphi_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(t)}{t-z}\,dt = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}$$ となるから，

$\delta(x)$ を $\delta(x) \overset{\text{def}}{=} -\dfrac{1}{2\pi i}\left(\dfrac{1}{x+i0} - \dfrac{1}{x-i0}\right)$ と定義

すればよい。 他にも色々見方がある。

$$\log(x+i0) = \begin{cases} \log x & (x>0) \\ \log|x| + \pi i & (x<0) \end{cases}$$



$$\log(x-i0) = \begin{cases} \log x & (x>0) \\ \log|x| - \pi i & (x<0) \end{cases}$$

であるから，

$$\log(x+i0) - \log(x-i0) = \begin{cases} 0 & (x>0) \\ 2\pi i & (x<0) \end{cases}$$

$$\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0} = -2\pi i\,\delta(x)$$ ともみなせるから，

$\delta(x)$ の上の定義は reasonable である。

演算 を 一変数の場合に限って説明する。

$u(x)=\varphi_+(x+i0)-\varphi_-(x-i0)$. とする.

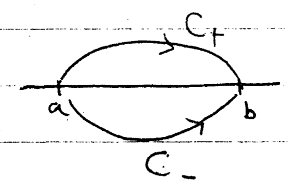
(i) 微分作用素 $P\in D$ の作用を,

$$(Pu)(x)=(P\varphi_+)(x+i0)-(P\varphi_-)(x-i0)$$

と定義する. $P\varphi_+$, $P\varphi_-$ も正則関数である.

(ii) $\varphi_\pm$ が $a,b\in\mathbb{R}$ で正則とする. $\varphi_\pm$ は $\mathbb{R}$上では定義されていないかもしれないが, このとき

$$\int_a^b u(t)\,dt \overset{\text{def}}{=} \int_{C_+}\varphi_+(t)\,dt-\int_{C_-}\varphi_-(t)\,dt$$



とおく. Cauchyの積分定理により C_+, C_- を少々動かしても値は変らず, well-definedである.

(iii) $\varphi_j\in\mathcal{O}(\widetilde{\Gamma_j})$ $(j=1,2)$, $\Gamma_1\cap\Gamma_2\neq\phi$ とする。このとき, $\varphi_1\cdot\varphi_2\in\mathcal{O}(\widetilde{\Gamma_1}\cap\widetilde{\Gamma_2})$ により境界値 $b_{\Gamma_1\cap\Gamma_2}(\varphi_1\cdot\varphi_2)$ が得られるが, これを 積 $b_{\Gamma_1}(\varphi_1)\cdot b_{\Gamma_2}(\varphi_2)$ と考える. 従って積がいつでも定義されるわけではない。

多変数の δ-関数 $\delta(x_1,\cdots,x_n)$ を
$\delta(x_1,\cdots,x_n) \overset{\mathrm{def}}{=} \delta(x_1)\cdots\delta(x_n)$ と定義する.(変数が独立のときは,積が定義される)

§4 基本定理

定義　$(X, \mathbb{C}[X])$ を affine variety とする。

1、 $\mathbb{R}[X]$ を $\mathbb{C}[X]$ の $\mathbb{R}$-subalgebra で単位元 1 を含み，$\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[X]$ が $\mathbb{C}$-algebra として $\mathbb{C}[X]$ と自然に同型になるものとする。このような $\mathbb{R}[X]$ は色々あり得るが，この $\mathbb{R}[X]$ を $\mathbb{R}$-structure とよぶ。$\mathbb{R}$-structure が与えられているとき，$(X, \mathbb{C}[X])$ は $\mathbb{R}$ 上定義されている（defined over $\mathbb{R}$）という。

2、 $(X, \mathbb{C}[X])$, $(Y, \mathbb{C}[Y])$ が affine varieties defined over $\mathbb{R}$ で morphism $f: X \to Y$ が $\forall \varphi(y) \in \mathbb{R}[Y]$ に対して，$\varphi(f(x)) \in \mathbb{R}[X]$ となるとき，morphism f は $\mathbb{R}$ 上定義されている，という.

3、 $(X, \mathbb{C}[X])$ が defined over $\mathbb{R}$ であるとして，Y を X の Zariski-closed subset とする. このとき，

Y が $\mathbb{R}$ 上定義される.

$\Longleftrightarrow$ $J \overset{\text{def}}{=} \{\varphi \in \mathbb{C}[X] \mid \varphi|_Y \equiv 0\}$ は $\mathbb{C}[X]$ の ideal だが，$J \cap \mathbb{R}[X]$ が J を生成する.

4. 代数群 G が $\mathbb{R}$ 上定義されているとは，affine variety として $\mathbb{R}$ 上定義され，群の演算を与える morphism も $\mathbb{R}$ 上定義されていることである。

Exercise　$(X, \mathbb{C}[X])$ が $\mathbb{R}$ 上定義されているとする．$\mathbb{C}/\mathbb{R}$ の Galois 群は複素共役 σ で生成される：$\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \langle \sigma \rangle$．$\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ は $\mathbb{C}$ に作用するから $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X] \; (= \mathbb{C}[X])$ にも作用する．このとき，

(i) 写像 $\sigma' : X \to X$ で，$\forall x \in X$，$\forall \varphi \in \mathbb{C}[X]$ に対して $(\sigma\varphi)(x) = \overline{\varphi(\sigma' x)}$ をみたすものが唯一つ存在する．

(ii) $\sigma'^2 = 1$ となる．従って $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ は X に作用する。

定義　$X(\mathbb{R}) \overset{def}{=\!=} \{ x \in X \mid \sigma' x = x \}$ とおく．
これは X の $\mathbb{R}$-rational points 全体である。

以下 概均質ベクトル空間の話にもどるが，$G, \rho, V, V^\vee, \cdots$ 等はすべて $\mathbb{R}$ 上定義されているものとする。

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_V = \{ V(\mathbb{R})$上の hyperfunctions$\}$ とおくと，
これは $D(V)$-module になる。

$N = D[s]f^s \cong D[s]/J_s$ で，$\alpha \in \mathbb{C}$ に対し，$N_\alpha = N/(s-\alpha)N = Df^\alpha$ であった．
f^s は関数だが f^α は f^s の $N \to N_\alpha$ の image で抽象的な N_α の元である。

$N_\alpha \cong D/J_\alpha$，　$J_\alpha = \{ P \in D \mid Pf^\alpha = 0 \}$ である．

hyperfunction $u \in \mathcal{B}$ で，f^α のみたす微分方程式と全く同じ微分方程式をみたすもの $\{ u \in \mathcal{B} \mid Pu = 0 \text{ for } {}^\forall P \in J_\alpha \}$ は $\mathbb{C}$-vector space になるが，実は有限次元になることが知られている(柏原正樹氏)．我々はここでは有限次元ということは必要はないが参考までに述べておく．

$$\{ u \in \mathcal{B} \mid Pu = 0 \text{ for } {}^\forall P \in J_\alpha \} = \sum_{1 \le i \le l} \mathbb{C} f_i^\alpha$$

このとき，

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\text{onto}"] \arrow[d] & Df_i^\alpha \\ N_\alpha = D/J_\alpha = Df^\alpha \arrow[ur, dashed, "\exists\psi = \text{onto}"'] & \end{tikzcd}$$

となる．

即ち $Df^\alpha \xrightarrow{\psi} Df_i^\alpha$ なる onto map が得られる．

そこで hyperfunction f_i^α の Fourier変換を

$$\mathcal{F}(f_i^\alpha)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f_i^\alpha(x) e^{\sqrt{-1}x\cdot y} dx$$ と定義する。

この定義は解析的に言って,厳密さに欠ける。もし厳密に議論したいなら, tempered distribution の範囲に話を限ればよい。その場合には,正当化は簡単にできる。しかしどの範囲で議論するのが良いのかまだはっきりと見極めがつかないので,あえて不正確なままで議論をすすめる。

$D\mathcal{F}(f^\alpha) \to D\mathcal{F}(f_i^\alpha)$ は onto であるから,次の Lemma が成り立つ.

Lemma 1. $u = \mathcal{F}(f_i^\alpha)$ は次の微分方程式をみたす.

1. $a \in \mathbb{C}[\Omega^\vee]$ が $a|_{O_i^\vee} \equiv 0$ をみたせば, $au = 0$.

2. $\left(\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} (-a_{\mu\lambda}) y_\mu \frac{\partial}{\partial y_\lambda} - (\phi_0 + \alpha\phi)(A) \right) u = 0$

但し $A \in \mathfrak{g}$, $\rho(A) = (a_{\lambda\mu})_{1\le\lambda,\mu\le n}$

$$\phi_0(A) = \mathrm{trace}\, \rho(A)$$

∵) §3 の lemmas 7, 8 より得られる. //

$\mathbb{R}$ 上定義された概均質ベクトル空間(P.V.)の構造

$F = \mathrm{grad}\log f : \Omega (= f^{-1}\mathbb{C}^\times) \to \Omega^\vee (= f^{\vee -1}\mathbb{C}^\times)$

$F^\vee = \mathrm{grad}\log f^\vee : \Omega^\vee \to \Omega$

であったことを思い出そう。

これらがすべて $\mathbb{R}$ 上定義されている場合を考えているから

$\Omega(\mathbb{R})$, $\Omega^\vee(\mathbb{R})$ 等考えられるが，これらの連結成分への

分解を考える.

$$\left.\begin{aligned} \Omega(\mathbb{R}) &= \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_{l'} \\ \Omega^\vee(\mathbb{R}) &= \Omega_1^\vee \cup \cdots \cup \Omega_{l''}^\vee \end{aligned}\right\} \text{連結成分への分解}$$

Ω や $\Omega^\vee$ 内の唯1の closed orbit O_1, $O_1^\vee$ に対して，

$O_1(\mathbb{R})$, $O_1^\vee(\mathbb{R})$ を連結成分に分解しよう.

1. $O_1^\vee(\mathbb{R}) = F(O_1(\mathbb{R}))$

   $O_1(\mathbb{R}) = F^\vee(O_1^\vee(\mathbb{R}))$

(注) $O_1^\vee = F(O_1)$, $O_1 = F^\vee(O_1^\vee)$ ではあるが 1. は明らかではない.
例えば $\begin{matrix} \mathbb{C}^\times & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{matrix}$ は onto だが，$\begin{matrix} \mathbb{R}^\times & \longrightarrow & \mathbb{R}^\times \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{matrix}$ は onto では
ない.)

∵)
$$O_1^\vee(\mathbb{R}) \underset{\substack{\uparrow \\ F \text{は} \mathbb{R} \text{上 defined}}}{\supset} F(O_1(\mathbb{R})) \underset{\substack{\uparrow \\ F^\vee \text{は} \mathbb{R} \text{上 defined}}}{\supset} F F^\vee(O_1^\vee(\mathbb{R})) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Th. A}}}{=} O_1^\vee(\mathbb{R})$$
より明らか. //

2. $O_1 \cap \Omega_j = F^\vee F \Omega_j$

∵) $\supset$ を示す。 $\forall v \in \Omega_j$ に対し $v^\vee = F(v)$ とおく.

$\begin{matrix}\Omega \\ \downarrow F \\ O_1^\vee\end{matrix}$ は単に fibre bundle というだけでなく，vector bundle（即ち $O_1^\vee$ の conormal bundle と同型（Th A））であった．

従って，$F^{-1}(v^\vee) = $ affine space で v を含む．

故に $F^{-1}(v^\vee) \cap V(\mathbb{R})$ は連結で v を含むから，v を含む連結成分 Ω_j に含まれる：$F^{-1}(v^\vee) \cap V(\mathbb{R}) \subset \Omega_j$．

さて，$F^\vee F(v) = F^\vee(v^\vee) \underset{\uparrow}{\in} F^{-1}(v^\vee) \cap V(\mathbb{R}) \subset \Omega_j$．

（$FF^\vee(v^\vee) = v^\vee$，$v \in \Omega(\mathbb{R})$ 等より）

v は Ω_j の任意の元で，$\mathrm{Im} F^\vee \subset O_1$ であったから

結局 $F^\vee F(\Omega_j) \subset O_1 \cap \Omega_j$ を得る。

$\subset$ を示す。

Th A により，$O_1 \underset{F^\vee}{\overset{F}{\rightleftarrows}} O_1^\vee$ は逆対応であったから

$F^\vee F|_{O_1} = id.|_{O_1}$ 故に $O_1 \cap \Omega_j = F^\vee F(O_1 \cap \Omega_j)$

$\subset F^\vee F \Omega_j$ //2.

3. $\left.\begin{aligned} O_1(\mathbb{R}) &= \bigcup_{j=1}^{l'} (O_1 \cap \Omega_j) \\ O_1^\vee(\mathbb{R}) &= \bigcup_{j=1}^{l''} (O_1^\vee \cap \Omega_j^\vee) \end{aligned}\right\}$ は連結成分への分解を与える．

∵）$\Omega_j \neq \phi$ より $O_1 \cap \Omega_j \overset{2.}{=} F^\vee F \Omega_j \neq \phi$ しかも，

Ω_j は連結ゆえ，$F\Omega_j$ も連結．従って $F^\vee F\Omega_j = O_1 \cap \Omega_j$ も連結である。Ω_j は open set ゆえ $O_1 \cap \Omega_j$ は open，連結，で $O_1(\mathbb{R})$ はそれ等の disjoint union ゆえ，$O_1 \cap \Omega_j$ は連結成分である．　//

Lemma 2. (i) 次のものはすべて連結成分への分解である．

$$\Omega(\mathbb{R}) = \bigcup_{j=1}^{l'} \Omega_j$$

$$\Omega^\vee(\mathbb{R}) = \bigcup_{j=1}^{l'} \Omega_j^\vee$$

$$O_1(\mathbb{R}) = \bigcup_{j=1}^{l'} (O_1 \cap \Omega_j), \quad O_1^\vee(\mathbb{R}) = \bigcup_{j=1}^{l'} (O_1^\vee \cap \Omega_j^\vee)$$

更に $F(O_1 \cap \Omega_j) = O_1^\vee \cap \Omega_j^\vee$ $(\forall j = 1, \cdots, l')$ とできて，このとき，$F(\Omega_j) = O_1^\vee \cap \Omega_j^\vee$，$F^\vee(\Omega_j^\vee) = O_1 \cap \Omega_j$ となる．

(ii) $G(\mathbb{R})$ の単位元を含む連結成分を $G(\mathbb{R})^+$ とすると，$O_1 \cap \Omega_j$，$O_1^\vee \cap \Omega_j^\vee$ たちは $G(\mathbb{R})^+$-orbits である．

∵) (i) $l' = l''$ のみを示せば十分であるが，それは $O_1(\mathbb{R}) \underset{F^\vee}{\overset{F}{\rightleftarrows}} O_1^\vee(\mathbb{R})$ が互いに逆対応になっていることから連結成分の個数が等しいことがわかる．

(ii) $\forall x \in O_1$ に対して $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & O_1 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ g & \longmapsto & gx \end{array}$ は submersion

すなわち，g での Jacobi 行列の rank $= \dim T_{gx} O_1$

(infinitesimal に考えると onto になっている，というのが submersion)

この式は，$\mathbb{C}$，$\mathbb{R}$ どちらで考えても同じだから

$\forall x \in O_1(\mathbb{R})$ に対して，$\begin{array}{ccc} G(\mathbb{R}) & \longrightarrow & O_1(\mathbb{R}) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ g & \longmapsto & gx \end{array}$ は submersion.

$G(\mathbb{R})^+$ は $G(\mathbb{R})$ の open set ゆえ，$G(\mathbb{R})^+$ にかえても submersion で，そのとき image は open set ゆえ

$G(\mathbb{R})^+ x \underset{\text{open}}{\subset} O_1(\mathbb{R})$ である．$G(\mathbb{R})^+ x$ は

連結，open で $O_1(\mathbb{R})$ はそれらの disjoint union (orbit ゆえ disjoint) になるから，$G(\mathbb{R})^+ x$ は $O_1(\mathbb{R})$ の連結成分たちである．// Lem 2

Lemma 3

(i) $|f^\vee|^\alpha$ は $\Omega_j^\vee$ 上の real analytic function である．

(ii) $\forall g \in G(\mathbb{R})^+$，$\forall v^\vee \in \Omega_j^\vee$ に対して

$$|f^\vee(g v^\vee)|^\alpha = \phi(g)^{-\alpha} |f^\vee(v^\vee)|^\alpha$$

∵) $G(\mathbb{R})^+$ は連結で ϕ は連続ゆえ，$\phi(G(\mathbb{R})^+)(\subset \mathbb{R}^\times)$ は連結，しかも 1 を含むから $\phi(G(\mathbb{R})^+) \subset \mathbb{R}_{>0}$，これより (ii) は明らかである．(i) は $f^\vee$ が $\Omega_j^\vee$ 上符号が一定であればよいが，$\Omega_j^\vee$ が 1つの orbit ではないから，その分証明は難しい．$O_1 \cap \Omega_j = G(\mathbb{R})^+ x$，$f(gx) = \phi(g) f(x)$，$\phi(g) > 0$ より $sgn(f)|_{O_1 \cap \Omega_j} =$ 一定である．($sgn(f)$ は f の符号)

一方，$F^\vee(\Omega_j^\vee) = O_1 \cap \Omega_j$ であったから

$\forall y \in \Omega_j^\vee$ に対して，$sgn\, f(F^\vee(y)) =$ 一定．

ところが，$f(F^\vee(y)) = f((grad \log f^\vee)(y)) = b_0 f^\vee(y)^{-1}$ であったから，$f^\vee(y)$ $(y \in \Omega_j^\vee)$ の符号は一定である．// Lem 3.

> **Lemma 4.** $O_1 \cap \Omega_j$ 上には，$G(\mathbb{R})^+$-不変な測度 $\omega_j = \omega_{O_1 \cap \Omega_j}$ が存在して，定数倍を除いて unique．

∵) $\Omega = f^{-1}(\mathbb{C}^\times)$ は affine variety で $O_1 \subset \Omega$ は closed ゆえ O_1 も affine variety である．

$v_1 \in O_1$，$G_{v_1} = \{g \in G \mid g v_1 = v_1\}$ とおくと $O_1 = G/G_{v_1}$．

さて $G =$ reductive，$G/G_{v_1} =$ affine variety，であるから，

松島の定理により $G_{v_1}=$ reductive，となる。

更に $v_1 \in O_1 \cap \Omega_j$ にとると，

$$O_1 \cap \Omega_j = G(\mathbb{R})^+ v_1 = G(\mathbb{R})^+ / G(\mathbb{R})^+ \cap G_{v_1}(\mathbb{R})$$

で，$G(\mathbb{R})^+$，$G(\mathbb{R})^+ \cap G_{v_1}(\mathbb{R})$ たちは real reductive group ゆえ，その上に両側不変測度がある．quotient measure をとって，$O_1 \cap \Omega_j$ 上に $G(\mathbb{R})^+$-不変測度があることがわかる。 不変測度については，Bourbaki の積分 chapter 7，§2，n°6 に詳しい説明がある．// Lem 4

今は基本定理を述べる為の記号などの準備をしているところである．real analytic manifold M 上の微分形式 ω_1，ω_2 に対して $\omega_1 \sim \omega_2$ とは，real analytic function φ で $\forall x \in M$ に対し $|\varphi(x)|=1$ かつ $\omega_1 = \varphi\omega_2$ となるものが存在すること，とする． 微分形式というのは難しく思う人もいるかもしれないが，座標で表わすと $\sum_{i_1<\cdots<i_p} \varphi_{i_1\cdots i_p}(x)\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$ ($\varphi_{i_1\cdots i_p}(x)$ は real analytic function，$x_{i_1},\cdots,x_{i_p}$ たちは座標関数，それに形式的に $dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$ としたもの) というものである．

ω の同値類を $|\omega|$ と書く。

例えば $\varphi_{i_1 \cdots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ は p-form であるが、とくに $p=0$ なら、これは関数そのものである。

だから、微分形式は関数の一般化であると考えられる。

0-form のとき、$|\omega|$ は関数の絶対値を考えるのと同じである。

Lemma 5 M を N の (regular) submanifold, $P \in M$ とする。P に於る局所座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ で、P の近傍で

(*) $M = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 = \cdots = x_k = 0\}$ となるものをとる（このような局所座標がとれるというのが regular submanifold）

δ-関数 $\delta(x_1, \cdots, x_k) = \delta(x_1) \cdots \delta(x_k)$ に対して

$\delta_{\mathrm{MIN}}(x) \overset{\mathrm{def.}}{=} \delta(x_1, \cdots, x_k) \, |dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k|$ とおくと

これは座標のとり方によらない。（これは M 以外では零になっている）

∵) $(y_1, \cdots, y_n)$ を別の局所座標で (*) をみたすものとする。

$y_1 \equiv 0, \cdots, y_k \equiv 0$ on M であるから

$y_1, \cdots, y_k \in (x_1, \cdots, x_k) =$ ideal gen. by $x_1, \cdots, x_k$.

従って、

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k \\ \vdots \\ y_k = a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kk}x_k \\ y_{k+1} = a_{k+1,1}x_1 + \cdots \cdots\cdots + a_{k+1,n}x_n \\ \vdots \\ y_n = a_{n,1}x_1 + \cdots \qquad + a_{n,n}x_n \end{cases}$$

従って 変換の Jacobian を考えれば

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}(p) & \cdots & a_{1k}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}(p) & \cdots & a_{kk}(p) \end{pmatrix} \neq 0$$

これより $\delta(x_1,\cdots,x_k)\,|dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k| = \delta(y_1,\cdots,y_k)\,|dy_1\wedge\cdots\wedge dy_k|$

が得られる. 定義に従って計算していけばよいが, 詳しくは

柏原-河合-木村, 代数解析学の基礎, 紀伊國屋書店 P.90. Prop. 2.4.1
(K K K K)

を参照のこと. // Lemma 5.

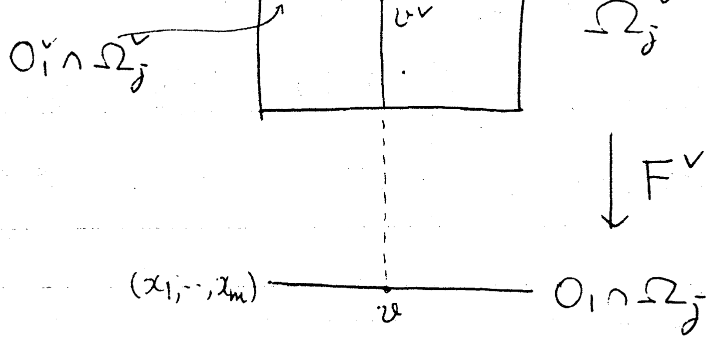
ベクトル空間 V, $V^\vee$ の座標をそれぞれ $x_1,\cdots,x_n$ 及び $y_1,\cdots,y_n$ とする. 即ち, $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$, $\mathbb{C}[V^\vee] = \mathbb{C}[y_1,\cdots,y_n]$

そして $\dim \mathcal{O}_1 = \dim \mathcal{O}_1^\vee = m$ とする。

$v \in \mathcal{O}_1 \cap \Omega_j$ をとり, $F(v) = v^\vee$ とおく.

$x_1,\cdots,x_n$ の一部 $(x_1,\cdots,x_m)$ が local coordinate of $\mathcal{O}_1 \cap \Omega_j$ at v

となるようにしておく、



このとき，

$O_1 \cap \Omega_j$ 上の不変測度 $\omega_j = \omega_{O_1 \cap \Omega_j}$ は $h(x)|dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m|$

と表わせる。

$(z_1, \cdots, z_n)$; local coordinate of $\Omega_j^\vee$ at $v^\vee$ を次のようにとる。

$(z_1, \cdots, z_m) = (F^{\vee *}x_1, \cdots, F^{\vee *}x_m)$ （$x_1, \cdots, x_m$ を $F^\vee$ でひきもどしたもの）

$(z_{m+1}, \cdots, z_n)$ を fibre 方向の座標，とする。但し，

$O_i^\vee \cap \Omega_j^\vee = \{(z_1, \cdots, z_n) \mid z_{m+1} = \cdots = z_n = 0\}$ となるように選ぶ。

更に Lemma 5 で定義した $\delta_{O_i^\vee \cap \Omega_j^\vee | \Omega_j^\vee}$ （$= \delta_{O_i^\vee | \Omega_j^\vee}$ と略記）

を考える

然らば，$\delta_{O_i^\vee | \Omega_j^\vee} = \delta(z_{m+1}, \cdots, z_n)\,|dz_{m+1} \wedge \cdots \wedge dz_n|$ となる.

ω_j を $F^\vee$ でひきもどすと

$$F^{\vee *}\omega_j = h(F^\vee(z))\,|d(F^{\vee *}x_1) \wedge \cdots \wedge d(F^{\vee *}x_m)|$$

$$= h(F^\vee(z))\,|dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m|$$ を得る.

この二つの外積を考えると，

$$F^{\nu *}\omega_j \wedge \delta_{0}{}_{\cdot}|_{\Omega_j^\nu} = h(F^\nu(z))\,\delta(z_{m+1},\cdots,z_n)\,|dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n|$$

が得られる。左辺は global な表示、右辺は local な表示で、この式を使うわけではないが、左辺がどんなものかだいたいわかるだろう。

Lemma 6. $F^{\nu *}\omega_j \wedge \delta_{0}{}_{\cdot}|_{\Omega_j^\nu}$ は $G(\mathbb{R})^+$－不変。

$\because$) F^ν は $G(\mathbb{R})^+$ の作用と可換で ω_j は $G(\mathbb{R})^+$ 不変、そして $\delta_{0}{}_{\cdot}|_{\Omega_j^\nu}$ も $G_{\mathbb{R}}^+$ で不変であるから。 //

定理 B $\Omega^\nu(\mathbb{R})$ 上で

$$\mathcal{F}(f_i^\alpha) = \sum_{j=1}^{l'} c_{ij}(\alpha)\,|f^\nu|_j^{-\alpha}\,\frac{F^{\nu *}\omega_j \wedge \delta_{0}{}_{\cdot}|_{\Omega_j^\nu}}{|dy_1\wedge\cdots\wedge dy_n|} \quad (1\le i\le l)$$

但し $c_{ij}(\alpha)$ は、f_i^α と $\mathcal{F}$ で定まる定数。

$$|f^\nu|_j^{-\alpha}(y) \overset{def}{=} \begin{cases} |f^\nu(y)|^{-\alpha} & \text{on } \Omega_j^\nu \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

これは $\Omega^\nu(\mathbb{R})$ 上の real analytic function である。

［注）
$$\frac{F^{\nu *}\omega_j \wedge \delta_{0}{}_{\cdot}|_{\Omega_j^\nu}}{|dy_1\wedge\cdots\wedge dy_n|} = h(F^\nu(z))\,\delta(z_{m+1},\cdots,z_n)\cdot\underbrace{\frac{|dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n|}{|dy_1\wedge\cdots\wedge dy_n|}}_{=\left|\frac{\partial(z_1\cdots z_n)}{\partial(y_1\cdots y_n)}\right|}$$

Jacobian の絶対値］

∵) α を固定して，$\Omega_j^\vee$ 上で

$$\mathcal{F}(f_i^\alpha) = |f^\vee|^{-\alpha} \cdot \frac{F^* \omega_j \wedge \delta_{O_i^\vee | \Omega_j^\vee}}{|dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n|} \times \text{const.}$$

を示せばよい。

$G(\mathbb{R})^+$ に関する相対不変性をみよう。

$$|f^\vee|^{-\alpha} \longleftrightarrow \phi^\alpha \quad (\text{Lemma } 3)$$

$$F^{\vee *}\omega_j \wedge \delta_{O_i^\vee | \Omega_j^\vee} \longleftrightarrow 1 \quad (\text{Lemma } 6)$$

$$|dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n| \longleftrightarrow \phi_0^{-1}$$

従って，右辺 $\longleftrightarrow \phi_0 \phi^\alpha$

故に，右辺は微分方程式

$$(\#)\begin{cases} 1.\ a \in \mathbb{C}[\Omega^\vee] \text{ で } a|_{O_i^\vee} \equiv 0 \text{ ならば，} au = 0 \\ 2.\ A \in \mathfrak{g} \text{ に対して，} \\ \left(\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} (-a_{\mu\lambda}) y_\mu \frac{\partial}{\partial y_\lambda} - (\phi_0 + \alpha\phi)(A) \right) u = 0 \end{cases}$$

但し $\rho(A) = (a_{\lambda,\mu})$，$\phi_0(A) = \operatorname{trace} \rho(A)$

を満たす。一方 Lemma 1 により 左辺も (#) を満たす。

しかも (☆) $\dim \{ u \in \mathcal{B}(\Omega_j^\vee) \mid (\#) \text{ の解} \} = 1$

が解析的に証明され，よって右辺と左辺は定数倍を除いて一致する。(☆) は簡単に証明できることで，~~意じと~~

1. から local には, unique に φ_1 が存在して

$u = \delta(z_{m+1}, \cdots, z_n)\varphi_1(z_1, \cdots, z_m)$ と表わせる。故に

$$u = |f^\vee|^{-\alpha} \frac{F^{\vee *}\omega_j \wedge \delta_{O_1^\vee|\Omega_j^\vee}}{|dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n|} \varphi_2(z_1, \cdots, z_m)$$ となる φ_2 が

存在する. 後半 2. により, u は $G(\mathbb{R})^+$ に関して

$$u_0 = |f^\vee|^{-\alpha} \frac{F^{\vee *}\omega_j \wedge \delta_{O_1^\vee|\Omega_j^\vee}}{|dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n|}$$ と同じ相対不変性を

もつから φ_2 は $G(\mathbb{R})^+$-不変. $\varphi_2 = c$ on $O_1^\vee \cap \Omega_j^\vee$ とすると

$u = cu_0$ となる / (*)の証明. (代数解析の基礎 P.189 命題3.8.1)

注) 定理Bに於て, 群 G が reductive であることは仮定しているが, (G, ρ, V) の正則性は仮定していないことに注意。また相対不変式が定数 $(\neq 0)$ の場合でもよい。このとき, $\Omega = V$, $O_1 = \{0\}$, $O_0 = V - \{0\}$ となり定理Bは「Fourier変換で 1 と δ-関数が対応する」という事実を主張するだけになる。

Appendix (§4)

M. Sato-M. Kashiwara-T. Kimura-T. Oshima, Inv. Math 1980

の結果はすべて既約とか正則とかいう仮定をはずして読み変えられる。

(I)　$I = \{ a \in \mathbb{C}[\Omega^\vee] \mid a|_{O_1^\vee} \equiv 0 \}$ として、

$\Omega^\vee$ 上の D-module $\mathcal{D}u_\alpha$ を次で定める。

$$(\#)\begin{cases} a u_\alpha = 0 \ (a \in I) & \cdots ① \\ \langle Ay, \mathrm{grad}_y \rangle u_\alpha = (\phi_0 + \alpha\phi)(A) u_\alpha \ (A \in \mathfrak{g}) & \cdots ② \\ \text{但し } \phi_0 = \mathrm{trace}\, \rho \end{cases}$$

そうすると $\mathcal{D}u_\alpha$ の solution が1つわかっている。即ち

$$|f^\vee|^{-\alpha} \frac{F^{\vee *}\omega_{\mathfrak{g}} \wedge \delta_{O_1^\vee|\Omega_{\mathfrak{g}}}}{|dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n|} \quad (\text{cf. } §4)$$

今 $\mathcal{E}$ を microdifferential operators の sheaf として

$\mathcal{E}u_\alpha \overset{\text{def}}{=} \mathcal{E} \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{D}u_\alpha$ とおく。

そして $\Lambda = (TO_1^\vee)^\perp$ を $O_1^\vee$ の conormal bundle とする。

そうすると generic point で $\mathcal{E}u_\alpha|_\Lambda \neq 0$ である。

実質的に δ関数 × holomorphic function だからその singular spectrum が Λ の中で Zariski-dense だから characteristic variety も Λ の方へいっている。

同様に $\mathcal{E}\mathcal{F}(f^\alpha) = \mathcal{E}\otimes_D D\mathcal{F}(f^\alpha)$ についても

$\mathcal{E}\mathcal{F}(f^\alpha)|_\Lambda \neq 0$ である.

$D\mathcal{F}(f^\alpha)$ については characteristic variety はわかっていた.

(II) S-K-K-O, §4 の読みかえ

既約(irreducible), 正則(regular) $\longrightarrow$ 削除

$\{0\}$ の conormal $\longrightarrow$ $O_1^\vee$ の conormal $\Lambda = (T O_1^\vee)^\perp$

とする。

u_α も $\mathcal{F}(f^\alpha)$ も ② を満たすから Λ 上での

principal symbol が SKKO, §4 と同様にして

計算できる。　結果は,

$$\sigma_\Lambda(u_\alpha) = \sigma_\Lambda(\mathcal{F}(f^\alpha)) = f^\vee(y)^{-\alpha}\sqrt{\Phi^* dx}\Big/\sqrt{dy}$$

但し $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] = \mathbb{C}[V]$, $\mathbb{C}[y_1, \cdots, y_n] = \mathbb{C}[V^\vee]$

Φ は Th A にでてきた map $\Phi : \Lambda \xrightarrow{\sim} \Omega$ である。

$m = \dim O_1^\vee$ とおくと order は $\mathrm{ord}_\Lambda = \frac{n-m}{2}$ で

与えられる。故に (order が一致しているから) Λ の

generic point の近くで, $\mathcal{E}\mathcal{F}(f^\alpha) \cong \mathcal{E}u_\alpha$.

しかも principal symbol が一致しているから,

microlocal な operator $P \in \mathcal{E}$ があって

$$\begin{cases} P = c + P_{-1} + P_{-2} + \cdots & (P_{-j} \text{ の order} = -j,\ c \neq 0) \\ P\mathcal{F}(f^\alpha) = u_\alpha \end{cases}$$

となる。

(III) $N \gg 0$ (i.e. N 十分大) とすると, $I^N \mathcal{F}(f^\alpha) = 0$

これは $\mathcal{F}(f^\alpha)$ が $O_1^\vee$ 上に support をもっていたので

Hilbert 零点定理より得られる.

仮に $I\mathcal{F}(f^\alpha) \neq 0$ とする. ($= 0$ を示したい)

($\mathcal{F}(f^\alpha)$ は (#) の ② は満たすが, ① を満たすかどうかは わかっていなかったのである.)

$I \ni a$ で $a\mathcal{F}(f^\alpha) \neq 0$ かつ $I(a\mathcal{F}(f^\alpha)) = 0$

となるものを もってくる。 然らば,

$O_1^\vee$ の generic point の近くで non-zero な holomorphic

function φ で $\varphi a \mathcal{F}(f^\alpha) = u_\alpha$ となるものがある。

これは $I(a\mathcal{F}(f^\alpha)) = 0$ だから δ-関数みたいなもので

orbit の方向には だいたい holomorphic, 厳密に

いえば, $O_1^\vee$ に $D(a\mathcal{F}(f^\alpha))$ をひきもどすと

characteristic variety が計算できて，characteristic variety が zero section になる。あとは Kashiwara equivalence を使う．　これについては，

Hotta : Lecture Notes, The Institute of Math., Madras, Indias (1986)

の chapter 1, §5 をみて下さい．

さて (II) より $P\mathcal{F}(f^\alpha) = u_\alpha$ という関係式があった。

そこで $(P-\varphi a)\mathcal{F}(f^\alpha) = 0$ となる。しかし

$P - \varphi a = (c - \varphi a) + P_{-1} + P_{-2} + \cdots$ であるから

その principal symbol は $c - \varphi a$ である。

ところが $c - \varphi a|_\Lambda = c \neq 0$

よって $(P - \varphi a)$ は Λ で invertible になり

$\mathcal{F}(f^\alpha) = 0$ on Λ，これは矛盾である。

§5. 実例

Exercise 1. $G = GL_n(\mathbb{C})$, $V = M_n(\mathbb{C})$,

$g : v \longmapsto gv$ ($g \in G$, $v \in V$)　　及び

Exercise 2. $G = GL_1(\mathbb{C}) \times SO_n(\mathbb{C})$, $V = \mathbb{C}^n$

$(t, g) : v \longmapsto t(gv)$ ($t \in GL_1(\mathbb{C})$, $g \in SO_n(\mathbb{C})$, $v \in V$)

が 概均質ベクトル空間になることを示せ、

概均質ベクトル空間の概念が全く初めての人は、これらの例について、今まで出てきた一般論を適用して色々調べてみるとよい。

ここでは余りみなれない例について詳しく調べる。

$$J \stackrel{def}{=} \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right), \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$ とおいて

$$Sp_{2n}(\mathbb{C}) \stackrel{def}{=} \{ g_1 \in GL_{2n}(\mathbb{C}) \mid g_1' J g_1 = J \}$$ を

symplectic group とする。(t はスカラー倍で使うので転置 ${}^t g$ を以下 g' と書くことにしよう)

$$SO_3(\mathbb{C}) \stackrel{def}{=} \{ g_2 \in GL_3(\mathbb{C}) \mid g_2' g_2 = 1,\ \det g_2 = 1 \}$$

$$G \stackrel{def}{=} \mathbb{C}^\times \times Sp_{2n}(\mathbb{C}) \times SO_3(\mathbb{C}) \ni g = (t, g_1, g_2)$$

の $V=M_{2n,3}(\mathbb{C})$ への作用 を

$v \longmapsto t(g_1 v g_2')$ （$v \in V$, $g=(t, g_1, g_2) \in G$）

によって定める。

そうすると (G, V) が P.V. になることが知られている。

佐藤-木村の分類理論で，既約で非正則だが相対不変式をもつ例として知られているものです。

$V^\vee = M_{2n,3}(\mathbb{C})$ とし，V と $V^\vee$ の *pairing* を $\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}(X'Y)$ とする．（これにより $M_{2n,3}(\mathbb{C})$ を $V^\vee$ と考える．）

$$
\begin{aligned}
\langle gX, Y \rangle &= \mathrm{tr}((gX)'Y) = \mathrm{tr}(t(g_1 X g_2')'Y) \\
&= \mathrm{tr}(t g_2 X' g_1' Y) = \mathrm{tr}(t X' g_1' Y g_2) \\
&= \mathrm{tr}(X'(t g_1' Y g_2)) = \langle X, t g_1' Y g_2 \rangle
\end{aligned}
$$

従って G の $V^\vee$ への作用は，$Y \mapsto t^{-1} g_1'^{-1} Y g_2^{-1}$ で与えられ，$(G, V^\vee)$ は (G, V) の *dual* P.V. になる。

$v_1, v_2 \in \mathbb{C}^{2n}$ に対して，$(v_1, v_2) = v_1' J v_2$ とおくと

$$
\begin{cases}
(v_1, v_2) + (v_2, v_1) = 0 \\
(v, v) = 0
\end{cases}
$$

をみたす．

$M_{2n,3}(\mathbb{C}) \ni X = (v_1\ v_2\ v_3)$ と表わしたとき，

$f(X) = (v_1, v_2)^2 + (v_2, v_3)^2 + (v_3, v_1)^2$

とおくと，f は4次同次多項式で，既約であることが知られている.（§7参照）

$g = (t, g_1, g_2) \in G$ に対して，$\phi(g) = t^4$ とおく.

そして $f = f^\vee$ とおく. このとき

$$\boxed{\begin{gathered} f(gv) = \phi(g) f(v),\quad f^\vee(gv^\vee) = \phi(g)^{-1} f^\vee(v^\vee) \\ (v \in V,\ v^\vee \in V^\vee,\ g \in G) \end{gathered}}$$

∵）$X = (v_1, v_2, v_3)$ とおけば

$$X'JX = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} J (v_1\ v_2\ v_3) = \begin{pmatrix} v_1'Jv_1, & v_1'Jv_2, & v_1'Jv_3 \\ v_2'Jv_1, & v_2'Jv_2, & v_2'Jv_3 \\ v_3'Jv_1, & v_3'Jv_2, & v_3'Jv_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (v_1\ v_2) & (v_1\ v_3) \\ (v_2, v_1) & 0 & (v_2, v_3) \\ (v_3, v_1) & (v_3, v_2) & 0 \end{pmatrix}$$ は交代行列である。

従って $$(X'JX)^2 = \begin{pmatrix} -(v_1\ v_2)^2 - (v_3\ v_1)^2 & * & * \\ * & -(v_1\ v_2)^2 - (v_2\ v_3)^2 & * \\ * & * & -(v_2 v_3)^2 - (v_3\ v_1)^2 \end{pmatrix}$$

となり $\operatorname{tr}(X'JX)^2 = -2((v_1, v_2)^2 + (v_2, v_3)^2 + (v_3\ v_1)^2) = -2f(X)$ を得る。

$t \in \mathbb{C}^\times$ に対しては，$f(tX) = t^4 f(X)$ は明らかである．

$g_1 \in Sp_{2n}(\mathbb{C})$ に対しては

$$-2f(g_1 X) = tr((g_1X)' J (g_1X))^2 = tr(X'(\underbrace{g_1' J g_1}_{=J})X)^2$$

$$= tr(X'JX)^2 = -2f(X)$$

即ち $f(g_1X) = f(X)$ が成り立つ．

$g_2 \in SO_3(\mathbb{C})$ に対しては，

$$-2f(g_2 \cdot X) = -2f(X g_2') = tr((Xg_2')' J X g_2')^2$$

$$= tr(g_2 X' J X g_2^{-1})^2 = tr\, g_2 (X'JX)^2 g_2^{-1}$$

$$= tr(X'JX)^2 = -2f(X)$$ 以上まとめて

$$f(gX) = f(t(g_1 X g_2')) = t^4 f(X)$$

即ち $f(gv) = \phi(g) f(v)$ が得られた．$f^\vee$ についても同様である．//

以上より 次の事もわかった．

$$\boxed{f(X) = -\frac{1}{2} tr((X'JX)^2)}$$

orbit 分解

orbit 分解は以下の表で与えられる．(0) が O_0，(1) が O_1 で $\Omega = O_0 \cup O_1$ である。

	X	$X'JX$	XX'	rank X	isotropy	orbit dim.
(0)	$\left(\begin{array}{ccc}1&&\\&1&\\&&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right)$	$\begin{pmatrix}&&1\\&0&\\-1&&\end{pmatrix}$	$\left(\begin{array}{cc\|c}1&&\\&1&\\\hline&&1\end{array}\right)$	3	$(C_{n-2}T_1)U_{2n-3}$	$6n$
(1)	$\left(\begin{array}{ccc}1&&\\&0&\\&&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right)$		$\left(\begin{array}{c\|c}1&\\\hline&1\end{array}\right)$	2	$(C_{n-1}T_1)$	$4n+2$
(2)	$\left(\begin{array}{ccc}1&0&i\\\hline 0&1&0\\&&1\end{array}\right)$	$\begin{pmatrix}0&1&\\-1&0&-i\\&i&0\end{pmatrix}$	$\left(\begin{array}{c\|cc}&0&i\\\hline 0&1&0\\i&0&1\end{array}\right)$	3	$(C_{n-2}T_1)U_{2n-2}$	$6n-1$
(3)	$\left(\begin{array}{ccc}1&0&i\\\hline 0&1&0\end{array}\right)$		$\left(\begin{array}{c\|c}&\\\hline&1\end{array}\right)$	2	$(C_{n-1}T_1)U_1$	$4n+1$
(4)	$\left(\begin{array}{ccc}1&&\\&1&\\&&1\\\hline\end{array}\right)$	(0)	$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$	3	$(C_{n-3}A_1T_1)U_{6n-12}$	$6n-3$
(5)	$\left(\begin{array}{ccc}1&&\\&1&\\&&0\\\hline\end{array}\right)$		$\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}$	2	$(C_{n-2}T_2)U_{4n-5}$	$4n+1$
(6)	$\left(\begin{array}{ccc}1&i&0\\\hline\end{array}\right)$		(0)	1	$(C_{n-1}T_2)U_{2n}$	$2n+1$
(7)	$\left(\begin{array}{ccc}1&i&0\\&&1\\\hline\end{array}\right)$		$\begin{pmatrix}0&\\&1\end{pmatrix}$	2	$(C_{n-2}T_2)U_{4n-4}$	$4n$
(8)	$\left(\begin{array}{ccc}1&&\\&0&\\&&0\\\hline\end{array}\right)$		$\begin{pmatrix}1&\\&\end{pmatrix}$	1	$(C_{n-1}T_2)U_{2n-1}$	$2n+2$
(9)	(0)		(0)	0	$(C_nA_1T_1)$	0

( ) = Levi part
U_k = (dim = k of nilpotent Lie algebra)
T_k = (dim = k of torus)

以下 O_i を表の i 番目の orbit とする ($i=0,1,\cdots,9$).
そして Λ_i で Zariski closure of $\{(v,v^\vee)\in V\times V^\vee;$
$v\in O_i,\ v^\vee\in(T_v O_i)^\perp\}$ ($=O_i$ の conormal bundle)
とすると,

$\dim\Lambda_i=\dim V=6n$ である。

Holonomy diagram (ホロノミー図形)

Λ_i を ⓘ で表わすことにして,

(i) $\dim(\Lambda_i\cap\Lambda_j)=\dim V-1$ のとき,

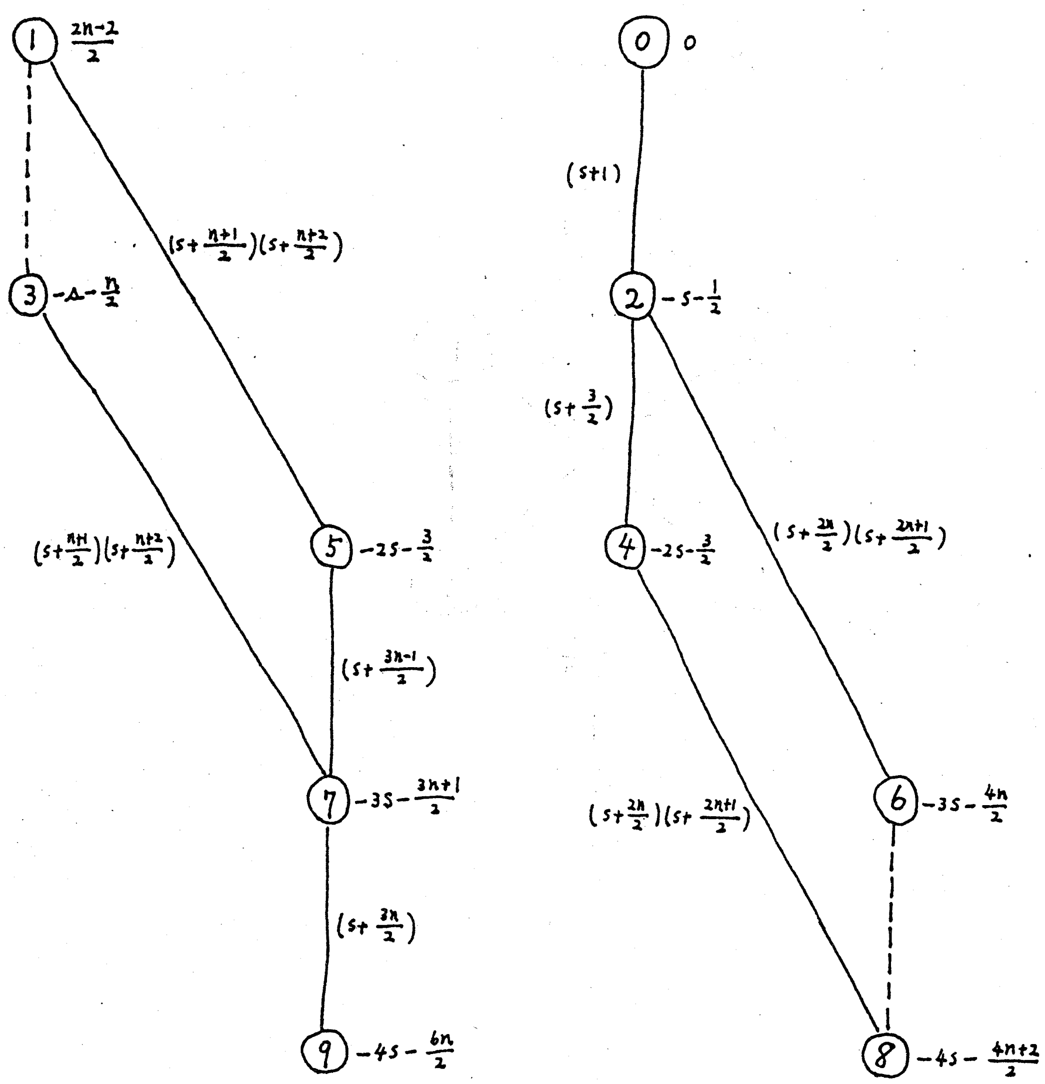
(1) $\Lambda_i\cap\Lambda_j$ のなかに, $\dim V-1$ となる G-orbit (次元が)
が含まれているとき,

(i) — (j) とかく.

(2) $\Lambda_i\cap\Lambda_j$ の中に次元が $\dim V-1$ となる G-orbit
が含まれていないとき, (i) - - - (j) と書く.

(ii) $\dim(\Lambda_i\cap\Lambda_j)<\dim V-1$ のときは,
(i) と (j) は線で結ばない。

この規則のもとに得られる図形が holonomy diagram で
今の場合は次のようになる。

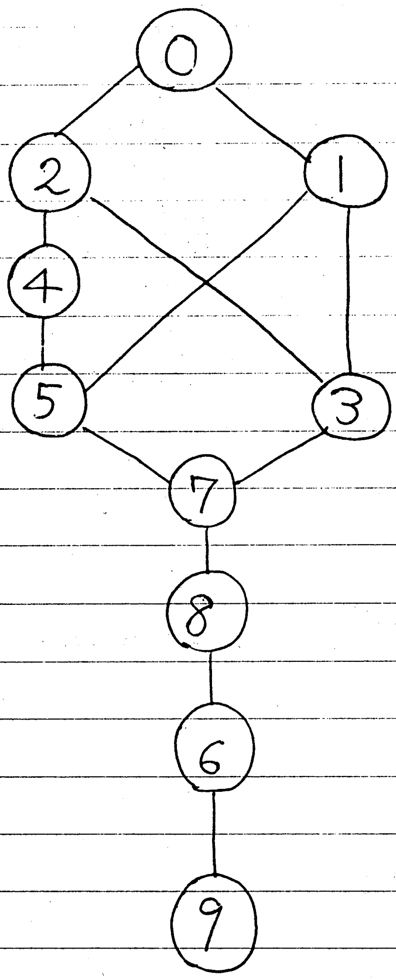

1
$\frac{2n-2}{2}$
0
0
$(s+1)$
$(s+\frac{n+1}{2})(s+\frac{n+2}{2})$
3
$-s-\frac{n}{2}$
2
$-s-\frac{1}{2}$
$(s+\frac{3}{2})$
$(s+\frac{n+1}{2})(s+\frac{n+2}{2})$
5
$-2s-\frac{3}{2}$
4
$-2s-\frac{3}{2}$
$(s+\frac{2n}{2})(s+\frac{2n+1}{2})$
$(s+\frac{3n-1}{2})$
7
$-3s-\frac{3n+1}{2}$
$(s+\frac{2n}{2})(s+\frac{2n+1}{2})$
6
$-3s-\frac{4n}{2}$
$(s+\frac{3n}{2})$
9
$-4s-\frac{6n}{2}$
8
$-4s-\frac{4n+2}{2}$

5-7

Closure relation

$\overline{O_i} \supset O_j$ のとき ⓘ よりも ⓙ の方が下にある,

という条件で図を書くと次のようになる.



さて $X=(v_1, v_2, v_3) \in M_{2n,3}(\mathbb{C})$ とし

$$v_j = \begin{pmatrix} v_j' \\ v_j'' \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow n \\ \updownarrow n \end{matrix} = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \\ x_{n+1,j} \\ \vdots \\ x_{2n,j} \end{pmatrix}$$ とおく。

$j \neq k$ のとき

$$\frac{\partial(v_j, v_k)}{\partial x_{ij}} = \begin{cases} x_{i+n,j} & (1 \leq i \leq n) \\ -x_{i-n,j} & (n+1 \leq i \leq 2n) \end{cases}$$

であることを使うと

$$(\operatorname{grad} f)(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{11}} & \frac{\partial f}{\partial x_{12}} & \frac{\partial f}{\partial x_{13}} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f}{\partial x_{2n,1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n,2}}, & \frac{\partial f}{\partial x_{2n,3}} \end{pmatrix} = -2JXX'JX$$

が得られ，従って

$$(\operatorname{grad} \log f)(X) = \frac{(\operatorname{grad} f)(X)}{f(X)} = \frac{4JXX'JX}{\operatorname{tr}((X'JX)^2)}$$

となる。

$$O_1 \ni \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ & O & \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ & O & \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow n \\ \updownarrow n \end{array}$$ を通る grad log f の fibre

$$= \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ & x_2 & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & x_n & \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ & y_2 & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & y_n & \end{array}\right) \right\} + \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ & O & \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ & O & \end{array}\right)$$ である.

。 b-関数は次のように与えられる。

$$b(s) = 2^4(s+1)\left(s+\frac{3}{2}\right)\left(s+\frac{2n}{2}\right)\left(s+\frac{2n+1}{2}\right)$$

で これは 右側の holonomy diagram に対応している.

一方 $\dfrac{\dim V}{\deg f} = \dfrac{6n}{4} = \dfrac{3n}{2}$ で

$$b\left(-s-\frac{3n}{2}-1\right) = 2^4\left(s+\frac{3n}{2}\right)\left(s+\frac{3n-1}{2}\right)\left(s+\frac{n+2}{2}\right)\left(s+\frac{n+1}{2}\right)$$

は 左側の holonomy diagram に対応する.

(☆ f が non-degenerate (i.e. $F = \operatorname{grad}\log f$ が dominant) のときは holonomy diagram は 1つ (この例のように 2つに分解しない) で $b(s) = b\left(-s-\dfrac{\dim V}{\deg f}-1\right)$ なる対称性が成り立つ.)

次に $\mathcal{F}(f^{\alpha})$ の具体的な様子をみたいが，$\mathbb{R}$上でやると解析的に面倒なところがあるので有限体上で様子をみてみよう.

$\mathbb{F}_q$ = q個の元をもつ有限体，標数 $\neq 2$ とする。

$G(\mathbb{F}_q)=\mathbb{F}_q^{\times}\times Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)\times SO_3(\mathbb{F}_q)$

$V(\mathbb{F}_q)=M_{2n,3}(\mathbb{F}_q)$ とする.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, p進体, 有限体, などを全部みわたしながらやるということは非常に大切なことである. 今, $\mathbb{R}$上と$\mathbb{F}_q$上の概念を比べてみよう.

$\mathbb{R}$	$\mathbb{F}_q$
$x\mapsto x^{\alpha}$ これは $(xy)^{\alpha}=x^{\alpha}y^{\alpha}$（乗法的）	$\chi:\mathbb{F}_q^{\times}\to\mathbb{C}^{\times}$, $\chi(xy)=\chi(x)\chi(y)$ 但し $\chi(0)=0$. multiplicative character
$x\mapsto e^{\sqrt{-1}x}$ $e^{\sqrt{-1}(x+y)}=e^{\sqrt{-1}x}e^{\sqrt{-1}y}$	$\psi:\mathbb{F}_q\to\mathbb{C}^{\times}$, $\psi(x+y)=\psi(x)\psi(y)$ $\psi\neq 1$, additive character
f^{α} これは x^{α} に f を代入したもの.	$(\chi\circ f)(v)=\chi(f(v))$
$\mathcal{F}(\varphi)(y)=\int_{V(\mathbb{R})}\varphi(x)e^{\sqrt{-1}\langle x,y\rangle}dx$ （φ：急減少関数）	$\mathcal{F}(\varphi)(v')=q^{-\frac{1}{2}\dim V}\sum_{v\in V(\mathbb{F}_q)}\varphi(v)\psi(\langle v,v'\rangle)$ （φ：$V(\mathbb{F}_q)$上の $\mathbb{C}$-valued function）

$\mathcal{F}$ は L^2-norm を保つ.	$\sum_{v \in V(\mathbb{F}_q)} \lvert \varphi(v) \rvert^2 = \sum_{v^\vee \in V^\vee(\mathbb{F}_q)} \lvert \mathcal{F}(\varphi)(v^\vee) \rvert^2$
$\mathcal{F}(f^\alpha)$	$\mathcal{F}(\chi \circ f)$

以上により f^α の Fourier 変換 に対応する 有限体上の概念は $\mathcal{F}(\chi \circ f)$ であることが わかった。

今, $\tilde{J} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{n-1} \\ \hline -I_{n-1} & 0 \end{array}\right)$ と おき

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & M_{2n-2,3}(\mathbb{F}_q) & \longrightarrow & \{ (\alpha_{ij}) \in M_3(\mathbb{F}_q) \mid \alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0 \} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \tilde{X} & \longmapsto & \tilde{X}' \tilde{J} \tilde{X} \end{array}$$

なる map を考えると, 計算により

$$\# \varphi^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} q^{4n-7}(q^{2n-2}-1) & \left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \right) \\ q^{4n-7}(q^{2n-2}-1) + q^{4n-4} & \left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} = 0 \right) \end{cases}$$

が 得られる。

$$v^\vee = \left(\begin{array}{c} a_1 \ a_2 \ a_3 \\ 0 \\ \hline b_1 \ b_2 \ b_3 \\ 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \updownarrow n \\ \\ \updownarrow n \end{array}, \quad v = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{2n,1} & x_{2n,2} & x_{2n,3} \end{pmatrix} = (v_1, v_2, v_3) \in M_{2n,3}(\mathbb{F}_q)$$

とおき，更に $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{n+1,1}, & x_{n+1,2}, & x_{n+1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ とおく.

$$v - \begin{pmatrix} x_1 \ x_2 \ x_3 \\ 0 \\ \hline y_1 \ y_2 \ y_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} \\ 0 & 0 & 0 \\ x_{n+2,1} & x_{n+2,2} & x_{n+2,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{2n,1} & x_{2n,2} & x_{2n,3} \end{pmatrix} \underset{\text{同一視}}{=} \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} \\ x_{n+2,1} & x_{n+2,2} & x_{n+2,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{2n,1} & x_{2n,2} & x_{2n,3} \end{pmatrix} = \underset{M_{2n-2,3}}{\underset{\cap}{(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)}}$$

と考える。

$$\mathcal{F}(\chi \circ f)(v') = q^{-3n} \sum_{v \in V(\mathbb{F}_q)} \psi(\mathrm{tr}(v'v))\, \chi((v_1, v_2)^2 + (v_2, v_3)^2 + (v_3, v_1)^2) \qquad (*)$$

ここで，

$$(v_i, v_j) = v_i' J v_j = (x_i \ \underbrace{\boxed{}\ |\ y_i \ \boxed{}}_{\tilde{v}_i'}) \left(\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \hline & -1 & & \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \\ -1 & & & \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_j \\ \boxed{} \\ y_j \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$

$\tilde{v}_j$

$$= (x_i, y_i) \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} + \tilde{v}_i' \tilde{J} \tilde{v}_j$$

$$= \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} + (\tilde{v}_i, \tilde{v}_j)$$ となるから

$$(v_1 v_2)^2 + (v_2 v_3)^2 + (v_3 v_1)^2 = \sum_{1 \le i < j \le 3} \left(\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} + (\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) \right)^2$$

そして，$\mathrm{tr}(v'v) = \sum_{i=1}^{3} (a_i x_i + b_i y_i)$ であるから，

$$(*) = q^{-3n} \sum_{\substack{\begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ y_1 y_2 y_3 \end{pmatrix} \\ \hat{v} = (\hat{v}_1 \hat{v}_2 \hat{v}_3)}} \psi\left(\sum_{i=1}^{3}(a_i x_i + b_i y_i)\right) \chi\left(\sum_{1 \le i < j \le 3}\left(\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} + (\hat{v}_i \hat{v}_j)\right)^2\right)$$

従って $q^{3n} \mathcal{F}(\chi \circ f)(v^{\vee})$

$$= \sum_{(\alpha_{ij})} \sum_{\substack{\hat{v} \in \varphi^{-1}(\alpha_{ij}) \\ \binom{x}{y}}} \psi\left(\sum_{i=1}^{3}(a_i x_i + b_i y_i)\right) \chi\left(\sum_{1 \le i < j \le 3}\left(\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} + \alpha_{ij}\right)^2\right)$$

$$= \sum_{(\alpha_{ij}) \neq 0} + \sum_{(\alpha_{ij}) = 0}$$

$$= \sum_{(\alpha_{ij}) \neq 0} q^{4n-7}(q^{2n-2}-1) \sum_{\binom{x}{y}} \psi\left(\sum_i (a_i x_i + b_i y_i)\right) \chi\left(\sum_{i<j}\left(\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} + \alpha_{ij}\right)^2\right)$$

$$+ \left(q^{4n-7}(q^{2n-2}-1) + q^{4n-4}\right) \sum_{\binom{x}{y}} \psi\left(\sum_i (a_i x_i + b_i y_i)\right) \chi\left(\sum_{i<j}\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}^2\right)$$

$$= \sum_{(\alpha_{ij})} q^{4n-7}(q^{2n-2}-1) \sum_{\binom{x}{y}} \psi\left(\sum_i (a_i x_i + b_i y_i)\right) \chi\left(\sum_{i<j}\left(\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} + \alpha_{ij}\right)^2\right)$$

$$+ q^{4n-4} \sum_{\binom{x}{y}} \psi\left(\sum_i (a_i x_i + b_i y_i)\right) \chi\left(\sum_{i<j}\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}^2\right) \quad (**)$$

ここで 和の 順番を 変える.

$\left\{ \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} + \alpha_{ij} \ ; \alpha_{ij} \right\} = \{\alpha_{ij}\}$ ゆえ

$$\sum_{(\alpha_{ij})} \chi\left(\sum_{i<j} \left(\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} + \alpha_{ij} \right)^2 \right) = \sum_{(\alpha_{ij})} \chi\left(\sum_{i<j} \alpha_{ij}^2 \right)$$

となるから，

$$(**) = q^{4n-7}(q^{2n-2}-1) \sum_{\binom{x}{y}} \psi\left(\sum_i (a_i x_i + b_i y_i)\right) \sum_{(\alpha_{ij})} \chi\left(\sum_{i<j} \alpha_{ij}^2 \right)$$

$$+ q^{4n-4} \sum_{\binom{x}{y}} \psi\left(\sum_i (a_i x_i + b_i y_i)\right) \chi\left(\sum_{i<j} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}^2 \right)$$

さて $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ならば

$$\sum_{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}} \psi\left(\sum_{i=1}^{3} (a_i x_i + b_i y_i) \right) = 0 \quad (\text{演習問題！})$$

以下 $v = \begin{pmatrix} a_1 \ a_2 \ a_3 \\ 0 \\ \hline b_1 \ b_2 \ b_3 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$ とすると，

$$q^{3n} \mathcal{F}(\chi \circ f)(v) = q^{4n-4} \sum_{\binom{x}{y}} \psi\left(\sum_i (a_i x_i + b_i y_i)\right) \chi\left(\sum_{i<j} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}^2 \right)$$

即ち

$$\mathcal{F}(\chi \circ f)(v) = q^{n-4} \sum_{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}} \psi\left(\sum_i (a_i x_i + b_i y_i)\right) \chi\left(\sum_{i<j} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}^2 \right)$$

さて 新しい記号として

$$G_1(\mathbb{F}_q) = \mathbb{F}_q^\times \times Sp_2(\mathbb{F}_q) \times SO_3(\mathbb{F}_q)$$

$$V_1(\mathbb{F}_q) = M_{2,3}(\mathbb{F}_q)$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}, \quad v_1^\vee = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$f_1(v_1) = \sum_{1 \le i < j \le 3} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}^2, \qquad f_1^\vee = f_1$$

とおくと, $\mathcal{F}_1$ を V_1 上の Fourier 変換 とするとき, 定義から

$$\mathcal{F}_1(\chi \circ f_1)(v_1^\vee) = q^{-3} \sum_{v_1 \in V_1(\mathbb{F}_q)} \psi(\langle v_1, v_1^\vee \rangle) \chi(f_1(v_1))$$

$$= q^{-3} \sum_{\begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ y_1 y_2 y_3 \end{pmatrix}} \psi\Bigl(\sum_i (a_i x_i + b_i y_i)\Bigr) \chi\Bigl(\sum_{i<j} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}^2\Bigr)$$

となるから, 結局

$$v^\vee = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ & O & \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ & O & \end{pmatrix} \neq 0, \quad \left(\Leftrightarrow v_1^\vee = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \neq 0\right) \text{ のとき,}$$

$$\boxed{\mathcal{F}(\chi \circ f)(v^\vee) = q^{n-1} \mathcal{F}_1(\chi \circ f_1)(v_1^\vee) \quad (v_1^\vee \neq 0)}$$ を得る.

即ち Fourier 変換(の一部分)の計算は, $n=1$ の場合に帰着した.

$f_1^\vee(v_1^\vee) \neq 0$ のときは $\mathcal{F}_1(\chi \circ f_1)(v_1^\vee)$ は Z. Chen により計算されているので，その結果を借用すると，

$\mathcal{O}_1^\vee(\mathbb{F}_q)$ 上で，

$$\mathcal{F}(\chi \circ f)(v^\vee) = q^{n-1}\theta(-1)\left(\frac{G(\chi^2,\psi)}{\sqrt{q}}\right)^2(\theta\chi^{-1})(f^\vee(v^\vee))$$

但し，$\theta(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{F}_q^{\times 2}) \text{ 平方剰余} \\ -1 & (x \in \mathbb{F}_q^\times - \mathbb{F}_q^{\times 2}) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

$$G(\chi^2,\psi) \overset{\text{def}}{=} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^\times} \chi^2(x)\psi(x) \quad : \text{ガウス和}$$

$$\chi^{-1}(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \chi(x)^{-1} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

が成り立つ.

<u>Remark.</u> $q^{n-1} = q^{\frac{1}{2}(\dim V - \dim \mathcal{O}_1)}$

実際 $\dim V = 6n$，$\dim \mathcal{O}_1 = 4n+2$ である。

$v^\vee \in \mathcal{O}_1^\vee(\mathbb{F}_q)$ のとき $\mathcal{F}(\chi \circ f)(v^\vee)$ が得られたが，$v^\vee \notin \mathcal{O}_1^\vee(\mathbb{F}_q)$ も計算できる。ここでは，簡単にする為 $\chi^2 \neq 1$ を仮定して $v^\vee \notin \mathcal{O}_1^\vee(\mathbb{F}_q)$ の場合を考える。

$$\boxed{\chi^2 \neq 1,\ v^\vee \notin O_1^\vee(\mathbb{F}_q)\ \text{ならば}、\ \mathcal{F}(\chi\circ f)(v^\vee) = 0}$$

∵)
$f(v) \neq 0$ なら $|\chi(f(v))| = 1$、$f(v) = 0$ なら $|\chi(f(v))| = 0$

ゆえ $\displaystyle\sum_{v \in V(\mathbb{F}_q)} |(\chi\circ f)(v)|^2 = \sum_{v\in\Omega(\mathbb{F}_q)} 1 = \#\Omega(\mathbb{F}_q)$

$\Omega \xrightarrow{\text{grad} \log f} O_1^\vee$ の *fibre* は $(2n-2)$次元 *affine space*

であったから、$\#\Omega(\mathbb{F}_q) = \#O_1^\vee(\mathbb{F}_q)\cdot q^{2n-2}$

従って、$\displaystyle \#O_1^\vee(\mathbb{F}_q)\cdot q^{2n-2} = \sum_{v\in V(\mathbb{F}_q)} |(\chi\circ f)(v)|^2$

$$= \sum_{v^\vee \in V^\vee(\mathbb{F}_q)} |\mathcal{F}(\chi\circ f)(v^\vee)|^2 \qquad (L^2\text{-norm を保つことによる})$$

$$= \sum_{v^\vee \in O_1^\vee(\mathbb{F}_q)} + \sum_{v^\vee \notin O_1^\vee(\mathbb{F}_q)}$$

ところで $v^\vee \in O_1^\vee(\mathbb{F}_q)$ のとき

$$\mathcal{F}(\chi\circ f)(v^\vee) = q^{n-1}\theta(-1)\left(\frac{G(\chi^2;\psi)}{\sqrt{q}}\right)^2 (\theta\chi^{-1})(f^\vee(v^\vee))$$

で $|\theta(-1)| = 1$、$\left|\dfrac{G(\chi^2;\psi)}{\sqrt{q}}\right| = 1$、$|(\theta\chi^{-1})(f^\vee(v^\vee))| = 1$

より $|\mathcal{F}(\chi\circ f)(v^\vee)| = q^{n-1}$ $\quad\therefore\ |\mathcal{F}(\chi\circ f)(v^\vee)|^2 = q^{2n-2}$

即ち $\displaystyle\sum_{v^\vee \in \mathcal{O}_1^\vee(\mathbb{F}_q)} \left| \mathcal{F}(\chi\circ f)(v^\vee) \right|^2 = \#\mathcal{O}_1^\vee(\mathbb{F}_q)\cdot q^{2n-2}$

従って, $\displaystyle\sum_{v^\vee \notin \mathcal{O}_1^\vee(\mathbb{F}_q)} \left| \mathcal{F}(\chi\circ f)(v^\vee) \right|^2 = 0$ 即ち $\mathcal{F}(\chi\circ f)(v^\vee) = 0$

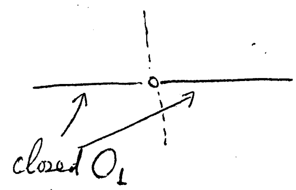
//

結語

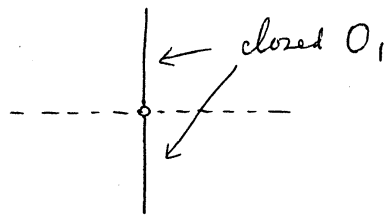
O_1 は $f^{-1}\mathbb{C}^\times$ 内の唯一の closed orbit であったが，これは f のとり方に依存する。例えば，

$G = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \ni g = (\alpha, \beta)$ が $\mathbb{C}^2$ に $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha x \\ \beta y \end{pmatrix}$ と作用している場合を考えよう。

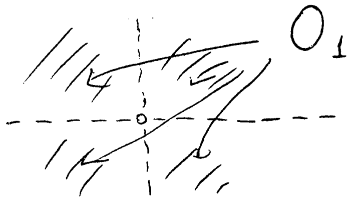
i) $f(x, y) = x$ のとき



ii) $f(x, y) = y$ のとき



iii) $f(x, y) = xy$ のとき



定義： $\dim O_1 = \dim V$ （即ち $O_1 = O_0$ ）となる相対不変式 f が存在するとき，(G, V) を正則 (regular) という。

これは $F = \mathrm{grad} \log f$ が dominant という従来の定義と一致する。

従来，正則という概念は，概均質ベクトル空間の理論では重要と考えられてきたが

1、 ζ-関数等への応用の為には，その条件は不要

この場合 $\displaystyle\sum_{v\in\Omega(\mathbb{Z})}\frac{1}{f(x)^s}$ と $\displaystyle\sum_{v^\vee\in O_1^\vee(\mathbb{Z})}\frac{1}{f^\vee(v^\vee)^s}$ の間に

関数等式が成立するはず。 (Th A, Th B)

2、 分類理論を考えるためには「正則」は仮定しない方がよい (Th C)

§6 Kac-Moody Lie algebra

(Kac, Moody, Lie と人の名前が3つ並んでいる. weight が5から.)

定義 $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n} \in M_n(\mathbb{Z})$ が generalized Cartan matrix (略して GCM) とは,

(C1) $a_{ii} = 2$

(C2) $a_{ij} \le 0 \ (i \ne j)$

(C3) $a_{ij} = 0 \iff a_{ji} = 0$

この辺に関する一般論については V.G. Kac: Infinite dimensional Lie algebras をみて下さい.

A の Dynkin diagram を定義しよう.

1. n 個の頂点をまず用意する.
2. $(a_{ij}, a_{ji}) = (0, 0)$ (約束により一方が 0 なら他方も 0) のとき, 二つの頂点 $\overset{i}{\circ}$ と $\overset{j}{\circ}$ は結ばない。
3. $(a_{ij}, a_{ji}) = (-1, -1)$ のとき $\overset{i}{\circ}\!-\!\!\!-\!\!\!-\overset{j}{\circ}$

   〃 $(-2, -1)$ 〃 $\overset{i}{\circ} \Longleftarrow \overset{j}{\circ}$

   〃 $(-3, -1)$ 〃 $\overset{i}{\circ} \Lleftarrow \overset{j}{\circ}$

$(a_{ij}, a_{ji}) = (-4, -1)$ のとき $\circ \Lleftarrow \circ$

一般に $\overset{i}{\circ} \underset{|a_{ji}|}{\overset{|a_{ij}|}{\leftrightarrows}} \overset{j}{\circ}$ （$\overset{i}{\circ}$ から $\overset{j}{\circ}$ へ $|a_{ji}|$ 個の線，$\overset{j}{\circ}$ から $\overset{i}{\circ}$ へ $|a_{ij}|$ 個の線を引く）

定義．A が <u>indecomposable</u> とは，A の Dynkin diagram が連結であること．

定義　A = indecomposable GCM のとき

(i) $Ax > 0$ なる $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} > 0$ があるとき

A を <u>finite type</u> という．

(ii) $Ax = 0$ なる $x > 0$ があるとき

A を <u>affine type</u> という．

(iii) $Ax < 0$ なる $x > 0$ があるとき

A を <u>indefinite type</u> という．

但し $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} > 0$ とは $\forall x_i > 0$ $(i = 1, \cdots, n)$ を意味する．

命題　{indecomposable GCM's}
$=$ {finite type} $\sqcup$ {affine type} $\sqcup$ {indefinite type}
(disjoint union) となる.

定理　(1) finite type の A は分類されていて Table Fin で与えられる.

~~(2) affine type の A は分類されていて Table Aff 1〜3 で与えられる.~~

(3) 他の GCM はすべて indefinite.(無限個ある)

Table Fin

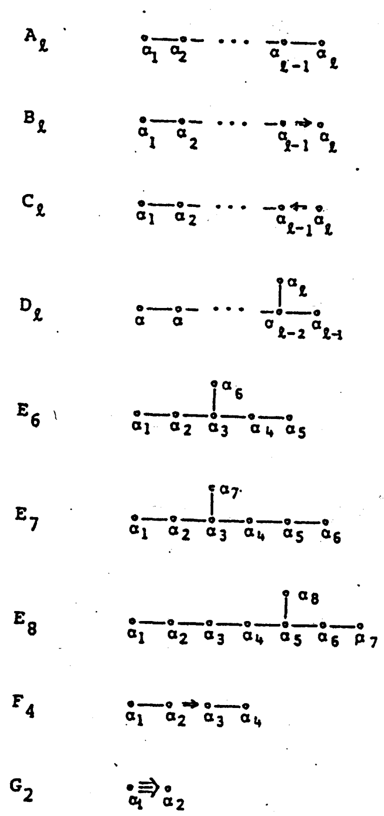
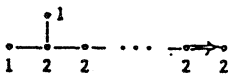


Table Aff 1

$A_1^{(1)}$

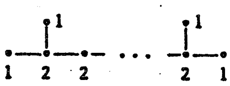
$A_\ell^{(1)}$ $(\ell \geq 2)$

$B_\ell^{(1)}$ $(\ell \geq 3)$

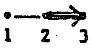


$C_\ell^{(1)}$ $(\ell \geq 2)$

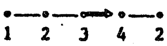
$D_\ell^{(1)}$ $(\ell \geq 4)$



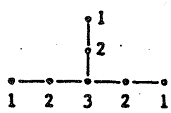
$G_2^{(1)}$



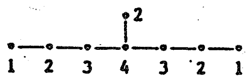
$F_4^{(1)}$



$E_6^{(1)}$



$E_7^{(1)}$



$E_8^{(1)}$

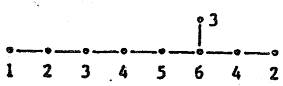
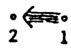


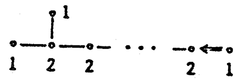
Table Aff 2

$A_2^{(2)}$



$A_{2\ell}^{(2)}$ $(\ell \geq 2)$

$A_{2\ell-1}^{(2)}$ $(\ell \geq 3)$



$D_{\ell+1}^{(2)}$ $(\ell \geq 2)$

$E_6^{(2)}$

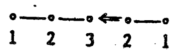
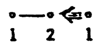


Table Aff 3

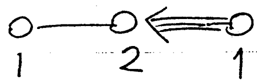
$D_4^{(3)}$



Aが affine type のとき, $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}>0$ かつ $Ax=0$

となる x は $GCD(x_1,\cdots,x_n)=1$ (即ち $x_1,\cdots,x_n$ の最大公約因子$=1$, 各 x_i は自然数) という条件では唯一つ定まる。

そこで Table Aff 1〜3 では 各 i に対応する頂点 ○ の下に $\overset{\circ}{x_i}$ を書いてある.

例えば, Table Aff 3 で 

は $x=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ で 対応する Cartan 行列 A は

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-3\\0&-1&2\end{pmatrix}$$ となる。 実際 $$\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-3\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

以上で表の見方の説明を終える.

$\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^\vee$ を $\mathbb{C}$-vector spaces として,

$\langle\ ,\ \rangle : \mathfrak{h}\times\mathfrak{h}^\vee \to \mathbb{C}$ を非退化な双1次形式とする.

これによって, $\mathfrak{h}^\vee$ を $\mathfrak{h}$ の dual space とみなす。

$$\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\subset\mathfrak{h}^\vee$$
$$\Pi^\vee=\{\alpha_1^\vee,\cdots,\alpha_n^\vee\}\subset\mathfrak{h}$$

($^\vee$ のつき方が奇妙だが歴史的な事情でこうなっている.)

定義　$(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^\vee, \langle\ ,\ \rangle, \Pi, \Pi^\vee)$ が A の realization であるとは，

(R1)　$\Pi, \Pi^\vee$ がともに１次独立

(R2)　$\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = a_{ij}$　（但し $A = (a_{ij})$）

これは V.G.Kac の定義と少し違う．Kac の場合，例えば finite type のとき semisimple な Lie 環しか考えないように調節してあるが，ここでは reductive な Lie 環も含むように少しだけ axiom を落としている．

定義　(1)　$\mathbb{C}$ 上の Lie algebra $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ を次のように定義する．

生成系：$\{e_i, f_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \mathfrak{h}$

関係式：$[e_i, f_j] = \delta_{ij}\alpha_i^\vee$　（$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$）

$$[h, h'] = 0$$

$$[h, e_i] = \langle h, \alpha_i \rangle e_i$$

$$[h, f_i] = -\langle h, \alpha_i \rangle f_i$$

$$(1 \leq i \leq n,\quad h, h' \in \mathfrak{h})$$

Lie 環の Chevalley base を御存知の方は何を念頭においているかわかると思います．

(2) $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ の（Lie環としての）ideal $\mathfrak{r}'$ で $\mathfrak{r}' \cap \mathfrak{h} = 0$ となるもののうちで最大のものが存在する.

$\mathfrak{r} = \max(\mathfrak{r}')$ として $\mathfrak{g}(A) \overset{\text{def}}{=} \tilde{\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{r}$ とおく.

(3) $\mathfrak{g}'(A)$ を $\{e_i, f_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ から生成される $\mathfrak{g}(A)$ の subalgebra とする.

$\mathfrak{g}(A)$ が reductive のとき $\mathfrak{g}'(A)$ が semisimple part に相当する.

$\mathfrak{g}(A)$（あるいは $\mathfrak{g}'(A)$）を <u>Kac-Moody Lie algebra</u> という.

注）e_i どうしや f_j どうしの relation は，$\mathfrak{r}$ でわるから不要.

<u>定理</u>（Killing, Cartan）
A が finite type なら $\mathfrak{h} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C}\alpha_i^\vee$, $\mathfrak{h}^\vee = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C}\alpha_i$ となる realization がとれて（一般には $\mathfrak{h} \supset \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C}\alpha_i^\vee$ etc. しかいえない），このとき $\mathfrak{g}(A)$ は $\mathbb{C}$ 上有限次 simple Lie algebra.
逆に $\mathbb{C}$ 上有限次 simple Lie algebra はすべてこうして得られる。

だから Table Fin をみれば，複素単純リー環の分類はわかる。

定理－定義（Cartan－Weyl）

A を finite type，$\mathfrak{h}=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{C}\alpha_i^{\vee}$，そして

$\rho:\mathfrak{g}(A)\longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を有限次元既約表現とする。

(1) V の元 $v\neq 0$ で，$\forall i$ に対し $\rho(e_i)v=0$

となるものがスカラー倍を除いて unique に存在する。この v を <u>highest weight vector</u> という。

(2) 非負整数 λ_i（i.e. $\lambda_i\geq 0$，$\lambda_i\in\mathbb{Z}$）で

$\rho(\alpha_i^{\vee})v=\lambda_i v$ となるものが存在する。この

$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ を <u>highest weight</u> という。

(3)

$$\left\{\begin{array}{c}\mathfrak{g}(A)\text{の既約表現}\\ \text{の同型類}\end{array}\right\}\xleftrightarrow{1:1}\left\{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{Z}^n\ ;\ \forall\lambda_i\geq 0\right\}$$

$$\rho \longmapsto \text{highest weight}$$

即ち既約表現がどれだけあるかということがきれいにわかってしまう。

この辺までは standard なことである。次に表現を diagram で表わすことを考える。

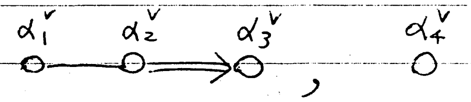
表現の diagram

$\rho : \mathfrak{g}(A) \to \mathfrak{gl}(V)$ 表現，を考える．A は finite type$^{(*)}$ として，$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ を既約表現への分解とする。

(1)　A の Dynkin diagram（頂点は白丸にしておく）と s 個の黒丸（$\longleftrightarrow \{V_1, \cdots, V_s\}$）を用意する。

(2)　V_i の highest weight を $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ とする．$\lambda_j = 0$ のとき，V_i に対応する $\bullet$ と j に対応する $\circ$ は結ばない．$\lambda_j = 1$ のとき $\overset{V_i}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{j}{\circ}$，$\lambda_j \geqq 2$ のとき $\bullet \underset{\lambda_j 本}{\Longrightarrow} \circ$ とする．こうしてできたのが表現の diagram である．

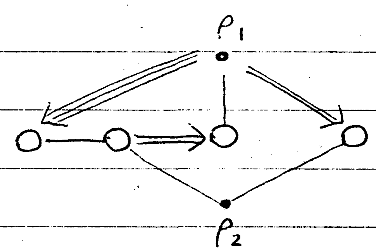
例）（$^{(*)}$ Dynkin diagram が連結でなくても，連結成分が finite type のときは finite type という）

$A = \Bigg($  $\Bigg)$

$\rho_1 \longleftrightarrow (\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4) = (3\ 0\ 1\ 2)$

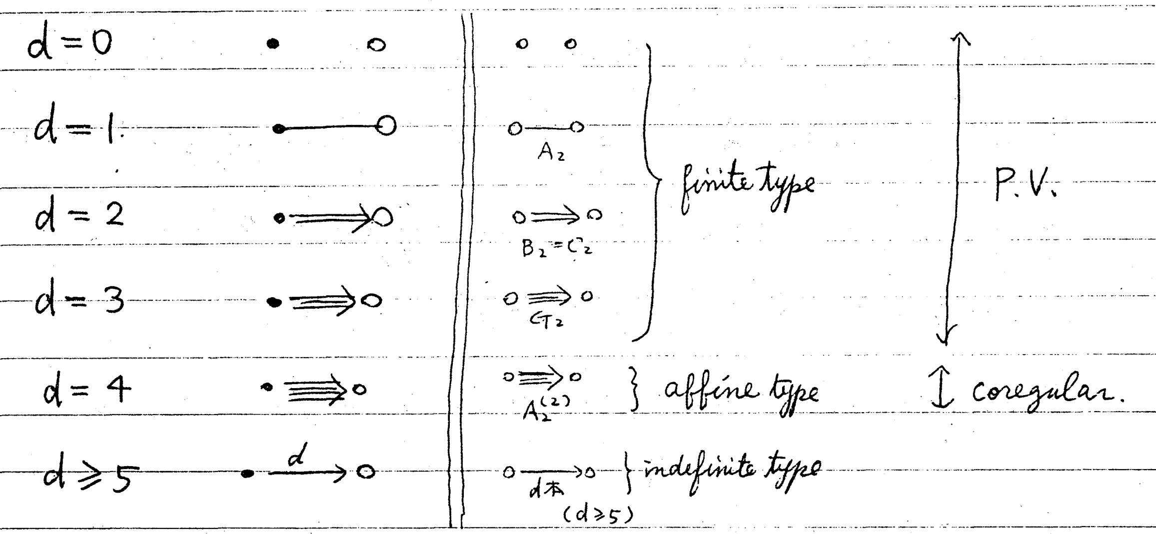
$\rho_2 \longleftrightarrow \qquad〃\qquad = (0\ 1\ 0\ 1)$

このとき $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ に対応する diagram は，



となる。

例）　$\mathbb{C}[x,y]_d$ で $\mathbb{C}[x,y]$ の d 次 homogeneous な部分とすると，$SL_2(\mathbb{C})$ が $\mathbb{C}[x,y]_d$ に作用する表現の diagram を考えるときに，$SL_2(\mathbb{C})$ でも $GL_2(\mathbb{C})$ でも変わらないことに注意する。



説明：$SL_2(\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}[x,y]_d$ への既約表現の diagram はこれで与えられるが，黒丸を白丸でおきかえて Dynkin 図形とみると $d=0,1,2,3$ が finite type，$d=4$ が affine type，$d\geqslant 5$ が indefinite type になっている。一方，丁度 $d=0,1,2,3$ が（$GL_2(\mathbb{C})$ のとき）概均質ベクトル空間（P.V.）になっている。そうすると，$d=4$ が affine type にひとつだけ対応しているから，$d=4$ のとき P.V. にはならなくても何か良い性質が期待されるが，実際 coregular という性質をもつ。

定義　G＝代数群，$\rho: G \to GL(V)$ 表現．

このとき (G, ρ, V) が <u>coregular</u> であるとは，

$\mathbb{C}[V]^G \overset{\text{def}}{=} \{ f \in \mathbb{C}[V] \mid f(gv) = f(v), \forall g \in G, \forall v \in V \}$

が多項式環になること．

一般に，環に対して homology 次元 というのが <u>定義</u>

されて，多項式環になる というのは homology 次元 が

零になる ということである。homology 次元 が 1 とか 2 とか

小さいうちが不変式論も展開しやすい。

先ほどの例 $(\underset{\overset{\shortparallel}{G}}{SL_2(\mathbb{C})}, \underset{\overset{\shortparallel}{V}}{\mathbb{C}[x, y]_d})$ における

$\mathbb{C}[V]^G$ の homology 次元 は 次のようになっている。

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9以上
homology 次元	0	0	0	0	0	1	1	25	3	25以上

19世紀　　最近

最近 Popov が色々調べ，更に最近 Dixmier により

$d=7$ のとき 25 ということ等がわかった．

（塩田氏により 1960年代後半 にやっと得られた）

なぜ homology 次元が大事かというと，いわゆる <u>Hilbert</u> の

syzygy（シチギー）列 というのがあって，その syzygy 列 の長さ

が まさに homology次元 である。

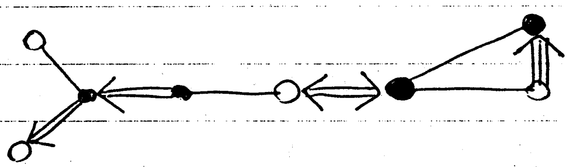
syzygy列は何かというと，不変式のなす環の生成系をもってくる．その生成系の間に何か関係があるかもしれないが，生成系の関係を求めないと不変式論ができたことにならない．しかし関係式を求めても関係式の間に関係があるかもしれない．そこまでわからないと不変式論ができたといえない．ところが関係式の間の関係に更に関係があるかもしれない．その関係式の間の関係の関係も求めなければならない．例えばsyzygy列の長さが3というと関係式の間の関係の関係という3段階までやらないとだめということであり，homology次元が25というのは，それを25段階やらなければだめということになり$d=7$の場合など素朴な問題意識ではどうにもならない。だから$d \leq 6$（あるいは$d=8$）しか不変式論ができなかったというのもそれなりには理由があるのです．

coregularというのはhomology次元が0，即ち生成系の間に関係がないという一番きれいな場合なのです．

そして $d \geqq 5$ では homology次元 $\geqq 1$ となり やっかいに なる.

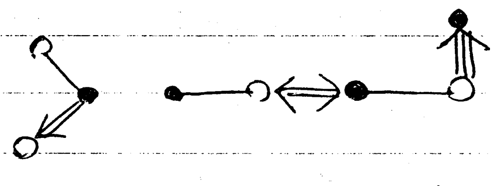
このようなことが もっと一般に成り立つ という話をする.
(やってみたら そうなっていた ということである. だから その本質的な関係を みつけよう というのは 今後の 課題です)

Dynkin diagram の頂点を黒または白にぬったものを weighted Dynkin diagram という.

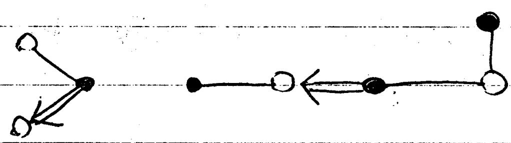
例)  $(=\Gamma)$

さて weighted Dynkin diagram について 2種類の reduction を定義します.

Reduction I) 黒と黒をつなぐ辺を除く.

例) $\Gamma \to$  $(=\Gamma')$

Reduction II) 白から黒へ向う n 重の矢を一重にする

例) $\Gamma' \to$  $(=\Gamma'')$

この２つの reduction を可能な限り実行して得られる diagram $\overline{\Gamma}$ を，<u>reduced weighted Dynkin diagram</u> という.

G = connected reductive 代数群，$\rho : G \to GL(V)$ に対する (G, ρ, V) について，次の条件を考える。

(A) $G = (\mathbb{C}^\times \times \cdots \times \mathbb{C}^\times) \times (\text{単純群}) / \{\text{中心に含まれる有限群}\}$

(B) ρ = 既約表現

即ち，表現の diagram の言葉でいうと

(A)′ 白丸の部分は連結，finite type

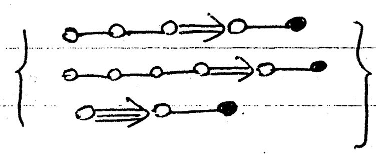
(B)′ 黒丸はひとつだけ

（注：ρ が effective とは限っていない）

定理 C

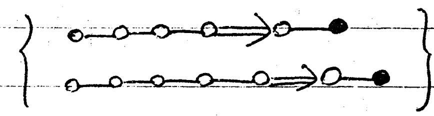
(1) $\{(G, \rho, V)$ の diagram ; (G, ρ, V) は P.V. かつ (A), (B)$\}$

$= \{$reduced weighted Dynkin diagram of finite type$\} \cup$



(2) $\{(G, \rho, V)$ の diagram ; $([G, G], \rho, V)$ は coregular かつ (A), (B)$\}$

$= \{$reduced weighted Dynkin diagram of affine type$\} \cup$



実は この分類は 昔から 知られていて

(1)の方は Sato-Shintani, Ann. of Math. 1974 及び

Sato-Kimura, Nagoya Math. J. 1977 に,

(2)の方は Kac-Popov-Vinberg, C.R. 283 (1976), 875-

に でている。

このような表現の diagram を使うと みやすくなって 例えば Sato-Shintani の表に1ヶ所 ミスプリントがある, というようなことがすぐ わかる。

証明の概略をやっておく。これだけだと P.V. と Kac-Moody Lie algebra と たまたま分類したら同じだった というだけで関係ないようにみえるけれども, reduced weighted Dynkin diagram of finite type から P.V. が得られる という片方側の ⊃ については ある程度のことがいえる。

⊃ について: exceptional なものについては 直接計算して得られる。残りの無限個ある部分について説明する。

$A = GCM$ (一般化された カルタン行列),

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ を 対応する Kac-Moody Lie algebra とする。

$\alpha \in \mathfrak{h}^\vee$ に対し $\{X \in \mathfrak{g} \mid {}^\forall H \in \mathfrak{h}$ に対し $[H, X] = \langle H, \alpha \rangle X\}$ を $\mathfrak{g}_\alpha$ とおく.

$\Delta \overset{\mathrm{def}}{=} \{\alpha \in \mathfrak{h}^\vee \,;\, \alpha \neq 0$ かつ $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$

$\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$, $\Delta \subset \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i \;(\overset{\mathrm{def}}{=} Q)$ であった。

今, $\Phi = \{\varphi : \Pi \to \mathbb{Z} \mid \varphi(\alpha) \geqq 0,\ \varphi \neq 0\}$

$\quad = \{\varphi : Q \to \mathbb{Z} \,;\, \mathbb{Z}\text{-linear} \mid \varphi(\alpha) \geqq 0\ (\alpha \in \Pi),\ \varphi \neq 0\}$

$\quad\uparrow$

同一視 ($\varphi(\sum_i n_i\alpha_i) = \sum_i n_i\varphi(\alpha_i)$ による)

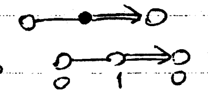
とおく.

weighted Dynkin diagram にたいして

φ(黒丸$) = 1$, φ(白丸$) = 0$ とすれば Φ の元が

得られる. 即ち

$\left\{\text{weighted Dynkin diagram} \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{underlying Dynkin diagram}\\ \text{は } A \text{ の Dynkin diagram}\end{array}\right\} \subset \Phi$

(例、 )

そこで, $\varphi \in \Phi$ にたいして

$\mathfrak{g}(i) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{\substack{\alpha \in \Delta \cup \{0\} \\ \varphi(\alpha) = i}} \mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{g}'(i) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathfrak{g}'(A) \cap \mathfrak{g}(i)$ とおく.

そうすると,

$$\begin{cases} \mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i) \\ \mathfrak{g}' = \mathfrak{g}'(A) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}'(i) \end{cases}$$ しかも

$[\mathfrak{g}'(i), \mathfrak{g}'(j)] \subset \mathfrak{g}'(i+j)$ となる.

こういうのを一般に graded Lie algebra という.

即ち weighted Dynkin diagram から

graded Lie algebra が得られる。

この場合 $[\mathfrak{g}'(0), \mathfrak{g}'(1)] \subset \mathfrak{g}'(0+1) = \mathfrak{g}'(1)$

ゆえ $\mathfrak{g}'(0)$ は $\mathfrak{g}'(1)$ に作用することに注意する。

以下 A を finite type または affine type とする。

$\mathfrak{g}'(0)$ は weight が 0 の部分で, これはまさに白丸の部分である. しかも $\varphi \neq 0$ を仮定しているが, これは黒丸が少なくとも1個はある, ということである。

表をみればわかるように finite type や affine type から ひとつでも丸を除けば, すべて finite type になる。 従って, 白丸の部分は finite type になる。

従って ある connected reductive group $G'(0)$ で,

$\mathrm{Lie}\, G'(0) = \mathfrak{g}'(0)$,

$G'(0)$ が $\mathfrak{g}'(1)$ に作用し, その微分が, もとの $\mathfrak{g}'(0)$ の $\mathfrak{g}'(1)$ への (adjoint の) 作用になるもの が存在する。

定理（Vinberg, Math. USSR Izv. 10 (1976)）
(1) A = *finite type* ならば，$(G'(0), \mathfrak{g}'(1))$ は有限個の orbits しかもたない。とくに P.V. である。
(2) A = *affine type* ならば，$(G'(0), \mathfrak{g}'(1))$ は <u>coregular</u> である。

注）(1)′ 代数群が代数多様体に作用し orbits が有限個なら少なくとも一つは open である。
(2)′ coregular を cofree という人もある。

(1) の証明

1. $X \in \mathfrak{g}'(1)$ ならば X は nilpotent，即ち
$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}') \ni \mathrm{ad}(X)$ を $Y \mapsto [X, Y]$ で定義するとき，$\mathrm{ad}(X)^N = 0$ となる N が存在する。

∵）$\mathrm{ad}(X)\mathfrak{g}'(i) = [X, \mathfrak{g}'(i)] \subset \mathfrak{g}'(i+1)$

くり返して，$\mathrm{ad}(X)^m \mathfrak{g}'(i) \subset \mathfrak{g}'(i+m)$

しかし finite type ゆえ $\mathfrak{g}'$ は有限次元，従て $\mathfrak{g}'(i)$ たちは有限個しかないから，十分大きな m に対して $\mathfrak{g}'(i+m) = 0$ となる。 //

2. G'を単純群で $Lie(G') = \mathfrak{g}'$ となるものを考えると G'は$\mathfrak{g}'$に $g : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}'$ と作用する

$$X \mapsto gXg^{-1}$$

(すべて行列と思ってよい)。 そのとき

$\{\text{nilpotent element of } \mathfrak{g}'\}/G'$ は有限集合.

これを $\{O_1, O_2, \cdots, O_r\}$ とおく。

これはDynkin-Kostant理論といわれるもので、Springer-Stenberg (Springer Lecture Note 131) にその理論が書いてある.

実は$\mathfrak{g}'$のnilpotent elementsのG'-共役類は分類されている. 分類結果は,

А.Р. Элашвили, Труды Тбилисского Мат 46 (1975) 109〜 (英訳されていないが表はわかる)

分類されてるくらいだから, 有限個というのは勿論わかる.

3. $O_j \cap \mathfrak{g}'(1) = O_1' \cup \cdots \cup O_b'$ と連結成分へ分解すると, 各O_i'が$G'(0)$-orbitになっている.

∵) O_jはG'-orbitで $G' \supset G'(0)$ ゆえ $G'(0)O_j \subset O_j$, しかも $G'(0)\mathfrak{g}'(1) \subset \mathfrak{g}'(1)$ ゆえ $O_j \cap \mathfrak{g}'(1)$ は$G'(0)$-orbits

に分解する。 $G'(0)$ は連結ゆえ，$G'(0)$-orbit は各連結成分に含まれるから，$O'_i = \bigsqcup_p G'(0)\cdot p$ と表わせる．ここで $G'(0)\cdot p$ が open subset であることがいえれば O'_i がそれらの disjoint union でかつ連結だから $O'_i = G'(0)\cdot p$ を得る。 $G'(0)\cdot p$ が open であることをいうのは，

$$\begin{array}{ccc} G'(0) & \longrightarrow & O'_i \\ \Psi & & \Psi \\ g & \longmapsto & g\cdot p \end{array}$$

の Jacobian の計算に帰着する．これは Springer Lecture Note 131 で計算が書いてある．

4． 以上で準備が終わり，(1) の証明に入る．

1．より $\mathfrak{g}'(1)$ の元はすべて nilpotent であったから，2．より $\mathfrak{g}'(1) \subset \bigcup_{j=1}^{n} O_j$， 故に $\mathfrak{g}'(1) = \mathfrak{g}'(1) \cap (\bigcup_{j=1}^{n} O_j)$

$$= \bigcup_{j=1}^{n} (\mathfrak{g}'(1) \cap O_j) \underset{3.}{=} \bigcup_{j=1}^{n} (O'_1 \cup \cdots \cup O'_{b_j})$$

ここで各 O'_i は，$G'(0)$-orbit である．

即ち $\mathfrak{g}'(1)$ は有限個の $G'(0)$-orbits に分解する。 // (1) の証明．

Remark. G = reductive 代数群, が

表現 $\rho: G \to GL(V)$ によって, V に作用しているとする。

このとき, (G, V) が stable

$\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ V に G-stable open dense subset V_0 が

あって, $\forall x \in V_0$ に対し Gx は V の中で closed

となる. 但し すべて Zariski-topology で考える.

次の条件を考える.

(*) V のある open dense subset U があって

$\forall x \in U$ に対して $G_x \overset{def}{=} \{g \in G \mid gx = x\}$ が

reductive になる。

(1) (G, ρ, V) が P.V. のとき

(*) $\Longleftrightarrow$ (G, ρ, V) は regular P.V.

(2) (G, ρ, V) が一般のとき

(*) $\Longleftrightarrow$ $([G, G], \rho, V)$ stable

が知られている (V.L. Popov, Math. USSR Izv. 1970 学位論文)

※ 定理C で (*) を仮定すると 分類結果は きたなくなる.

分類するとき 正則を仮定しない方が きれいになる.