数理解析研究所講究録
719巻 1990年 257-269

乱流拡散の modeling について
── 数値 simulation の基本的ないくつかの問題 ──

京大理 物理 中澤 宏

1. まえおき

乱流拡散の理解の重要性は公害現象等を挙げるまでもなく明らかだが，数値実験的な試みとなると，乱流場そのものの精密な数値計算の難しさに加えて，その上で大いに不安定であろうと予測される粒子軌跡の算出可能性そのものが疑問の対象となり得る。しかしその困難をおしてでも，closures 等の近似理論の直接検証やあるいは我々の視覚的な現象把握を，再現性と共に与えてくれるだろう数値実験の価値は，もし可能ならば得難いものがあろう。ここでは現実乱流（Navier-Stokes 方程式）の枠組みは1度念頭から外して，乱流拡散の数学的構造を（いくつかの側面の犠牲のもとにではあるが）feasible に実現する模型を考え，現実乱流の数値解析に登場するであろう困難の予測と解決，あるいは困難を避けた定式化，への指針を得たいと思う。我々は模型，いわば絵空事，を考える。勿論，あまり勝手な絵空事では物理的に有用な対象にはなりにくい。以下ではどのような制限を置き，どの側面に注意すべきかについて，乱流理論の関連した発展の中から学び（オ2節），それに基づいて今迄注目されていなかったと思われる数値解析上の問題の考察を進める（オ3節）。

始めに「絵空事」として何を考えるかを明確にする。

<u>定義1</u>　d 次元空間の領域 D のベクトル $\mathbb{r}$ 上の d 次元ベクトル函数 $\mathbb{A}(\mathbb{r},t)\equiv\mathbb{A}(\mathbb{r},t;\omega)$ は見本を指定するパラメーター $\omega\in\Omega$ に依存する random な場で，D の境界 ∂D で適当な境界条件を満たすものとする。微分方程式

$$d\mathbb{r}/dt=\mathbb{A}(\mathbb{r},t;\omega),\qquad \mathbb{r}(0)=\mathbb{r}_0\in D, \tag{1}$$

の解 $\mathbb{r}(t)\equiv\mathbb{r}(t;\mathbb{r}_0,\omega)$ を「乱流拡散過程」と呼び，

$$d\mathbb{R}/dt=\mathbb{A}[\mathbb{r}(t;\mathbb{r}_0,\omega)+\mathbb{R};\omega]-\mathbb{A}[\mathbb{r}(t;\mathbb{r}_0,\omega);\omega],\quad \mathbb{R}(0)=\mathbb{R}_0 \tag{2}$$

の解 $\mathbb{R}(t)\equiv\mathbb{R}(t;\mathbb{r}_0,\mathbb{R}_0,\omega)$ を「相対拡散過程」と呼ぶ。

(2)式の右辺を random な場 $\mathbb{B}(\mathbb{R},t;\omega)$ と見れば，(2)も(1)に含まれる。我々は(1)や(2)の数値解析を目の中において，どのような $\mathbb{A}(\mathbb{r},t;\omega)$ が扱いやすく relevant か，それについて(1)や(2)では何をどのように求めるのか，問題点は何か，等を考え，いわば実験のための modeling を行いたい。(1)や(2)について次の事はよく知られている：

<u>系2</u>　$\mathbb{A}(\mathbb{r},t;\omega)$ の各成分が任意の $\omega\in\Omega$ をとめた時すべての t と $\mathbb{r}\in D$ とについて連続，特に $\mathbb{r}$ については Lipschitz 連続なら，$\mathbb{r}(t;\mathbb{r}_0,\omega)$ は任意の $\mathbb{r}_0\in D$ に対し，$\mathbb{r}(t)$ が ∂D に到達するまで1意に存在する。即ち $\mathbb{r}_0$ の異なる軌道は ∂D に達するまで決して交わらない。

乱流拡散研究の礎石は，言うまでもなく，Taylor (1922)[1] によって与えられた。その古典的な論文で彼は乱流拡散過程を「連続な path を持つ確率過程」として認識し，乱流の流体粒子の速度，座標の1成分 $u(t)$, $x(t)$ のうち，速度は定常過程，座標は定常増分過程と把握して次の基本関係を導いた：

$$L(t)\equiv\langle u(t)u(0)\rangle\equiv \text{Lagrange 速度相関函数}, \tag{3}$$

$$x(t)-x(0)=\int_0^t u(s)\,ds, \tag{4}$$

$$\kappa(t)\equiv\langle[x(t)-x(0)]u(t)\rangle=\int_0^t L(s)\,ds \xrightarrow[t\to\infty]{} \kappa_\infty \equiv \text{乱流拡散係数}, \tag{5}$$

$$\langle[x(t)-x(0)]^2\rangle=2\int_0^t \kappa(s)\,ds=2\int_0^t (t-s)L(s)\,ds \xrightarrow[t\to\infty]{} 2\kappa_\infty t. \tag{6}$$

ここで $\langle\cdots\rangle$ は期待値であり，(4)–(6)式では空間は無限としている。(6)式の才2～才3表現間は Kampé de Fériet (1939)[2] による。Taylor は過程のガウス性等の完全な同定は与えていないが，Wiener (1923)[3] による Wiener 過程の数学的確立や Khintchine (1934)[4] によるスペクトル分解

$$L(t)=\int_0^\infty \cos\lambda t\, d\sigma(\lambda) \tag{7}$$

を想起しても，その先駆性がうかがわれる。

Taylor によって方向づけられた様に，乱流現象における基本問題は我々にとっても Lagrange 速度相関函数 $L(t)=\langle u(t)u(0)\rangle$ の構造の理論・数値的理解であり Euler 的「速度場」$\mathbb{A}(\mathbb{r},t;\omega)$ の成分の相関函数との関係である。それは最も手短かには κ_∞ のような積分量の関係だが，もっと細かな構造の関係も当然望まれる。数値解析のためにはまず確率場 $\mathbb{A}(\mathbb{r},t;\omega)$ がやさしい形に与えられなければならないのだから，勿論，現実乱流の戯画上でしかこの関係を見る事はできない。それでも通有性に富む，いろいろな問題を汲み取る事は可能である。特に(1)や(2)の数値解析では通常の微分方程式とは異なった様相も現れる。通常の偏・常微分方程式としての扱いから生じる問題への視野は才2節で review される。(1)や(2)の(確率的)微分方程式特有の問題の概観と解決への方向付けは才3節で論じられるだろう。

2. 乱流理論から

Patterson と Corrsin (1966)[5] は離散化した1次元空間（x軸）上で ±1 を値として取る速度場による離散的運動（random walk）を計算機上 simulate する事によって，Euler 相関と Lagrange 相関の関係を特に追求した。彼等の得た結果は，この意図についてはあまり成功しなかったが，乱流拡散の数値計算について多くの示唆を与えている。用いられた "dynamics" は図1 に示される。ここで影のついた cell 内では粒子の速度は +1，そうでない cell では −1 であり，"Lagrange 粒子"の運動としては現在の cell での速度に従って次の時刻での cell が選ばれる。このような random field は，x-t 平面の各 cell に独立一様乱数系列に従って ±1 を与え，それを 3×3 cells，あるいは 3×5 又は 5×3 cells 等について平均したものの符号を中央の cell の速度とする filtering を繰り返して，適当な x-t 相関を持つ「速度場」を構成して得られた。

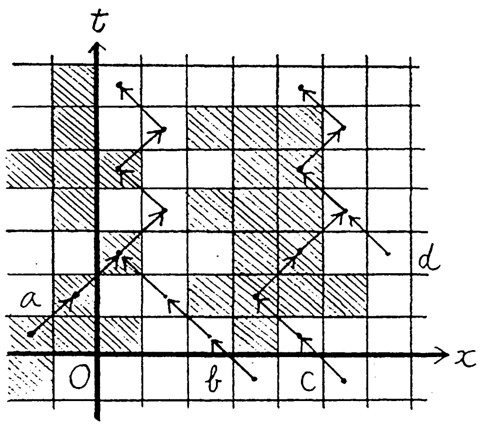

図1. "dynamics"

彼等の得た主な結論は次の通りである。

[1] x-t 時空のどんな曲線に沿って1次元化した Eulerian 速度場の correlation も，Lagrange 相関を定性的にも再現できなかった。しかし乱流拡散係数を与える integral scale $\int_0^\infty L(t)dt$ については，Euler 場の x-t 時空の対角線（粒子がつねに速度 +1 又は −1 で動くとした線）に沿っての Eulerian integral scale と大体合致した。

[2] 粒子の運動で特徴的な事は，ひとつは $u=+1$ の時空領域と −1 のそれとの境界に軌跡が図1中のように絡むこと，もうひとつは図1 a と b，c と d に見られるように

異なるcellからの粒子が合体し得る事である。前者は、連続模型への極限で得られる(1)では、安定な fixed point $A=0$ のまわりでの粒子の停留に収束するべきもので、問題は少ない。後者は連続極限でも、特に(2)の相対拡散で $R\sim 0$ で打ち切り誤差と絡んで問題となるだろう。少し皮肉な事実は、1～2次元でのブラウン運動は再帰的で、この $R\sim 0$ の近傍での(2)の積分上の問題 —— 右辺の精度 —— が繰り返し問題となるだろうに、3次元では非再帰的なので、$A(\mathbf{r},t;\omega)$ の精度よい算出は難しかろうが $R\sim 0$ での(2)の右辺の消失はあまり深刻な問題ではない、という対比である。

このような離散モデルの欠点のない数値実験は Kraichnan (1970)[6] によって行われた。彼は Roberts (1961)[7] の解析結果の検証に目的を置いた。Roberts は $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^d$ の Eulerian 速度場 $A(\mathbf{r},t)\equiv A(\mathbf{r},t;\omega)$ 中の粒子が(1)に従う軌道 $\mathbf{r}(t)$ を持つとして、$\psi(x,t)\equiv\psi(x,t;\omega)\equiv\delta[x-\mathbf{r}(t;\omega)]$ を考えた。次の方程式が成り立つ:

$$\partial\psi(x,t;\omega)/\partial t+\operatorname{div}_x[\psi(x,t;\omega)A(x,t;\omega)]=0,\quad \psi(x,0)=\delta(x-\mathbf{r}_0). \tag{8}$$

時刻 t での位置 x での平均粒子存在密度は次である:

$$G(x,t\,|\,\mathbf{r}_0,0)=\langle\psi(x,t;\omega)\rangle,\quad G(x,0\,|\,\mathbf{r}_0,0)=\delta(x-\mathbf{r}_0). \tag{9}$$

<u>命題 3</u> (Roberts[7]) $A(\mathbf{r},t;\omega)$ が一様・定常なら、$G(x,t\,|\,\mathbf{r}_0,0)=G(x-\mathbf{r}_0,t)$ である。この時 Kraichnan (1959)[8] の DIA 近似[9] は次の方程式を与える:

$$\left.\begin{aligned}\partial G(x,t)/\partial t&=\int_0^t dt'\int dx'\sum_{j,k=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x'_k}C_{jk}(x',t')G(x',t')G(x-x',t-t'),\\ C_{jk}(x,t)&\equiv\langle A_j(x+\mathbf{r},t+s)A_k(\mathbf{r},s)\rangle\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

特に $\operatorname{div}_{\mathbf{r}}A(\mathbf{r},t)=0$ (非圧縮)なら、(10)は次でも与えられる:

$$\partial G(x,t)/\partial t=\sum_{j,k=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}\int_0^t dt'\int dx'\,C_{jk}(x',t')G(x',t')G(x-x',t-t'). \tag{11}$$

実際はRobertsは非圧縮な$\mathbb{A}(\mathbb{r},t)$を$\mathbb{r}\in R^3$で考えたが，一様性や定常性は外せる事を述べている。Robertsの論理を逐次追うと，d次元でも，また$\mathrm{div}\,\mathbb{A}=0$を使わないでも(10)が仮定「d-次元の必ずしも非圧縮でない$\mathbb{A}(\mathbb{r},t;\omega)$について，Kraichnan[8]のweak statistical dependenceが成り立つ」の下に得られるから，上の導出の詳細は省く。同じ考え方に立って，Robertsは相対乱流拡散も解析した。最も簡単な量として，$t=0$に$\mathbb{R}_0$離れていた2つのLagrange粒子の時刻tでの相対位置が$\mathbb{R}$である確率密度$H(\mathbb{R},t\,|\,\mathbb{R}_0)$は一様定常なEulerian fieldでは

$$\left.\begin{aligned}
&H(\mathbb{R},t\,|\,\mathbb{R}_0)=\int dx\,\langle\varphi(x+\mathbb{R},t;\omega)\,\psi(x,t;\omega)\rangle,\\
&\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}(x,t;\omega)+\underset{x}{\mathrm{div}}\left[\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}(x,t;\omega)\,\mathbb{A}(x,t;\omega)\right]=0,\\
&\varphi(x,0)=\delta(x+\mathbb{R}_0-\mathbb{r}_0),\quad \psi(x,0)=\delta(x-\mathbb{r}_0)
\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

を考えて得られる。もっともφ,ψへのDIA近似は$H(\mathbb{R},t\,|\,\mathbb{R}_0)$の方程式に$\varphi,\psi$の始時刻，終時刻が異なる量の導入を要求するが。斉藤，中内，大嶋(1989)[10]のMHD乱流の問題は$\varphi=\psi$とした2次元相対拡散問題(12)と類似しており，いろいろな欠点はあろうけれどDIA近似をRobertsにならって適用する事ができれば興味深く思われる。

再びKraichnan (1970)[6]に戻る。彼は波数空間を離散化して，場$\mathbb{A}(\mathbb{r},t)$のフーリエ成分の初期値を独立ガウス分布にとり，それらの線型な(従って人工的な)時間発展を定義して，非圧縮・一様・定常・ガウス型の場$\mathbb{A}(\mathbb{r},t;\omega)$を構成し，その上で(1)式のsimulationを行った。memoryに貯えられるのはフーリエ成分であり，$\mathbb{A}(\mathbb{r},t;\omega)$はLagrange粒子の場所で必要に応じて実空間に合成された。換言すれば離散化はフーリエ空間に移され，実空間では自動的に∞回可微分な$\mathbb{A}(\mathbb{r},t;\omega)$が得られている。Eulerian相関$C_{jk}$は数式で算出でき，RobertsのDIAの結果(11)は初期

値問題として解かれ，$G(x,t)$から Lagrangian 相関が

$$L_{jk}^{(\mathrm{Roberts})}(t) \equiv \int dx\, C_{jk}(x,t)\, G(x,t)$$

と算出された。(1)の直接 simulation での $L_{jk}(t)$との合致は驚くほどよい。[8),11)] もちろん，Gauss型場 $A(\mathbf{r},t;\omega)$は 相関 $C_{jk}(\mathbf{r},t)$で完全に規定される。だから何か非Gauss的な場 $A(\mathbf{r},t;\omega)$を作って，その上でもDIAの精度を確かめる事は興味がある点として残っているが，どちらにせよ DIAは強力な才一近似であろう。

3. 数値 simulationのいくつかの問題

乱流拡散を(1)によって simulate するには，まず random な $A(\mathbf{r},t;\omega)$を与えなければならない。Patterson と Corrsin[5)] のように，実空間で離散化し「力学」を与えて，但し空間・時間的に補間したものを(1)の右辺とする事もできる。あるいは Kraichnan[6)] のように，Fourier空間を離散化しそこで力学を与える方法もある。もう少し現実に近づくなら，Navier-Stokes 乱流についての large eddy simulation 上での同様な試みになるだろう。ここではるかに簡単だが「流体」に近い模型として forced Burgers 流体上の simulation (cf. Love and Leslie (1979),[12)] Nakazawa (1987)[14)]) を考える。Static な Eulerian 場上の Lagrangian turbulence も考えられるが，「乱流拡散」とは離れるように思われるので，ここでは採らない。

Simulationの便宜上は random な定常場 $A(\mathbf{r},t;\omega)$が具合がよい。$d=1$ の Burgers 流体で言えば，これは random force によって実現される：

$$\partial u(x,t)/\partial t + \tfrac{1}{2}\partial u^2/\partial x = \nu \partial^2 u/\partial x^2 + F(x,t;\omega), \quad \nu > 0. \tag{13}$$

特に簡単な random force の形 $F(x,t;\omega) = \sigma(x) f(t;\omega)$ を考えよう。我々は

まず天下りに $f(t;\omega)$ が standard Gaussian white noise である場合,

$$\langle f(t;\omega)\rangle = 0, \quad \langle f(s;\omega) f(t;\omega)\rangle = \delta(s-t), \tag{14}$$

を取る。理由は，これが下に見るように，数値 simulation 上大変好ましい性質を持つからである。この場合 (13) の解の存在とその性質はくわしく調べられている。[13]
次が成り立つ：

命題 4 $\nu>0$, $\sigma(x)$ と $u(x,t;\omega)$ は x の有限区間上同じ境界条件（周期，固定，…）を満たすとし，σ は 3 回連続微分可能とする。この時 (13) の解は一意で，連続な $u_{xx}(x,t;\omega)$ を持つ。また極限 $\nu\downarrow 0$ でも，$u(x,t;\omega)$ が初期に滑らかなら，任意の有限の $t>0$ においてもそれは有限個の shock しか持たない。

要するに，$\nu>0$ であり $\sigma(x)$ が十分滑らかなら，$u(x,t;\omega)$ は $d=1$ の (1) 式の右辺として適格であり，その上の「乱流拡散」を考えることができる。

実際に (13) の $u(x,t;\omega)$ を用いて (1) を解くためには，まず (13) そのものを数値的に解かなくてはならない。実空間を離散化するか，あるいはスペクトル的諸方法かを問わず，(13) からは次の形の確率(常)微分方程式

$$du/dt = D[u(t),t] + \alpha f(t,\omega), \quad \alpha = 定数, \tag{15}$$

の連立形が得られる。もちろん，Gaussian white noise $f(t,\omega)$ は函数ではないから，Wiener 過程，形式的には

$$B(t;\omega) \equiv \int_0^t f(s;\omega)\,ds, \tag{16}$$

に基いて (15) は次の確率積分方程式で定義される：

$$u(t;\omega) = u(0;\omega) + \int_0^t D[u(s),s]\,ds + \alpha B(t;\omega). \tag{17}$$

Wiener 過程 $B(t;\omega)$ は（殆んどすべての ω に対して）t の連続函数で，次の性質

①〜③で規定される：

① $B(0;\omega)=0$, ②$\langle B(t;\omega)\rangle=0$, ③$\Delta(t,h;\omega)\equiv B(t+h;\omega)-B(t,\omega)$ は任意の$h>0$に対し$B(s;\omega)$ $(s\leqq t)$と独立なGaussianで$\langle\Delta^2(t,h;\omega)\rangle=h$.

(17)の数値解法を考えよう。まず時間を$\Delta t=h$の刻みで離散化する。必要な才1の事は時点$t=nh$ $(n=0,1,2,\cdots)$での$B(t)=B(nh;\omega)$の構成である。次の簡単な手続きがこれに十分な事は①〜③から直ちにわかる：

$$B(nh)=\begin{cases}0, & n=0\\ \sqrt{h}\,(e_1+\cdots+e_n), & n\geqq 1\end{cases}, \quad \left(\{e_1,e_2,\cdots\}\text{は互いに独立な標準正規変数}\right) \tag{18}$$

数値計算上は時間刻みの変更による精度確認を行わなければならない。一般の確率過程ではあらかじめすべての必要な時点で値を与えておかないと，後からの補間は容易でない。ガウス型白色雑音$f(t;\omega)$の大きな利点は，これが非常に容易に行える点にある：

<u>Lemma 5 (Lévy)</u>　$\{e_1,e_2,\cdots\}$, $\{f_1,f_2,\cdots\}$はすべて独立な標準正規変数列とし，$B(nh)$を(18)で定めるとする。新しく$B'(t)$を

$$B'(0)\equiv 0,\quad \begin{cases}B'[(2n-1)\frac{h}{2}]\equiv B'[2(n-1)\frac{h}{2}]+\frac{\sqrt{h}}{2}(e_n-f_n)\\ B'[(2n)\frac{h}{2}]\equiv B'[(2n-1)\frac{h}{2}]+\frac{\sqrt{h}}{2}(e_n+f_n)\end{cases},\quad n\geqq 1 \tag{19}$$

と定義すると，$\{B'(t);\ t=n\cdot\frac{h}{2}\}$は$\frac{h}{2}$刻みの離散点でWiener過程の性質を満たし，$B'(2n\cdot\frac{h}{2})=B(nh)$が成り立つ。

証明は$\{(e_n-f_n)/\sqrt{2},\ (e_n+f_n)/\sqrt{2}\}$が互いに独立な標準正規変数である事に注意すれば直ちに得られる。

以上のように(17)の最右辺が（原理上任意精度で）得られたからには，様々な

解法が考えられる。最も直観的には，$v(t) \equiv v(t;\omega) \equiv u(t;\omega) - \alpha B(t;\omega)$を取り，(17)のかわりに微分方程式

$$dv/dt = D[v(t;\omega) + \alpha B(t;\omega), t] \tag{20}$$

を解いてもよい；我々の用途には一般に$D(X,t)$はXの多項式であり，(20)はなめらかな解を保証されている。しかし(20)右辺はtについて連続性以上は持たず，$v(t)$は2階以上の導函数を持たない。この事は数値解析での通常の道具立て，高階微分の存在を前提にした補間法，*Simpson*法等の積分法，*Runge-Kutta*等の微分方程式解法，の(20)への直接の適用の利点を失わせる。もちろんこれらを形式的に用いる事はでき，それは$B(t,\omega)$を十分滑らかなもので近似（即ちガウス型白色雑音$f(t;\omega)$を(17)で十分滑らかなピンクノイズで置換）した場合[13]の解法の意味を持つ。しかしやはりそれは別の方程式への近似であって，(17)そのものへの時間刻みhの高次までの精度は保証されない。これは*Lemma* 5の好性質とひきかえの困難である。

今少し原則面を言うと，確率(偏)微分方程式の直接数値解法はひとつ又は少数個の見本解を得る数値*simulation*であり，必ずしも時間的に恒常とは限らない構造を見出す重要な手段と考える。このような構造の消長は長時間にわたり得るから，それを得るための解法の安定性は不可欠である。*Forced Burgers*乱流(13)の数値シミュレーション[14]では，この観点から，簡単だが安定な*Lax* (1954)[15]の方法が採用された。これは(13)の最も単純な離散近似に対する最良予測[16]に相当し，空間xの1次元性による自由度の少なさから$h \ll 1$での使用に堪えたが，より大きい時間刻みを許す効率的な解法の開発は急務である。マルコフ性は侵すが，陰解法も試みるべきか。可能性の展望を求めて安定性を問う事をやめれば，例えば$\sigma(x)$が少数の長波長フーリエ

モードから成る時，スペクトル的方法によってx空間から波数空間へ移るのはどうか。t微分不可能性の克服に関連して特記すべきは*Helfand* (1979)[17]の方法である。確率微分方程式(15)に即して述べよう。(17)に対応する*Picard*の反復法

$$u_{n+1}(t+h;\omega)=u(t;\omega)+\alpha\Delta(t,h;\omega)+\int_0^h D[u_n(t+s;\omega),t+s]\,ds, \qquad (21)$$

を適当な次数nまで，$0<h<1$に対する1 step $t\to t+h$に用いる。右辺では$\alpha\Delta\sim O(h^{\frac{1}{2}})$が大きいから$u_0(t+s;\omega)=u(t;\omega)+\alpha\Delta(t,s;\omega)$から出発するのがよい。*Helfand*が示したのは，$D(X,t)$をXについて*Taylor*展開し，結果の期待値の$h^{\frac{1}{2}}$での展開を望む次数まで正確に再現する*Runge-Kutta*的な前進差分*scheme*が構成可能な事であった。

再び(13)に戻れば，問題はx微分も含めて安定な(実あるいはフーリエ空間での)高精度積分方法の開発である。例えば(21)を*Lemma* 5と共に直接用いる反復法も，より大きいhに亘って有用かもしれない。多くのなすべき事がそこにはあろう。それらが越えられた時，$u(x,t;\omega)$上の，あるいはより一般に$A(x,t;\omega)\equiv u(x,t;\omega)-\langle u(x,t;\omega)\rangle$，$J(X)$は自由に選ぶ函数として$A(x,t;\omega)\equiv J[u(x,t;\omega)]$等々の上での乱流拡散(1)は，乱流の構造の検出と解析のひとつの有用な手段を準備するだろう。

---

1) G. I. Taylor (1922): *Diffusion by continuous movements.* Proc. London Math. Soc. Ser. 2, 20, 196-211.

2) J. Kampé de Fériet (1939): *Sur les equations de la diffusion thermique par turbulence.* Ann. Soc. Sci. de Brux. 57, 67.

3) N. Wiener (1923): *Differential space.* J. Math. and Phys. 2, 131-174.

4) A. Khintchine (1934): Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse. Math. Ann. 109.

5) G. S. Patterson, Jr. and S. Corrsin (1966): Computer experiments on random walks with both Eulerian and Lagrangian statistics. In "Dynamics of Fluids and Plasmas," edited by S. I. Pai, pp. 275–307.

6) R. H. Kraichnan (1970): Diffusion by a random velocity field. Phys. Fluids 13, 22–31.

7) P. H. Roberts (1961): Analytical theory of turbulent diffusion. J. Fluid Mech. 11, 257–283.

8) R. H. Kraichnan (1959): The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers. J. Fluid Mech. 5, 497–543.

9) S. A. Orszag (1977): Lectures on the statistical theory of turbulence. In "Les Houches 1973 Summer School," edited by R. Balian and J. L. Peube (Gordon and Breach), pp. 235–374.

10) 斎藤善雄, 中内紀彦, 大嶋洋 (1989): 外部磁場による乱流の2次元化と場の構造 「流れの不安定性と乱流の構造」研究集会 (京都).

11) A. S. Monin and A. M. Yaglom (1975): "Statistical Fluid Mechanics," Vol. II (MIT Press), pp. 530–531.

12) M. D. Love and D. C. Leslie (1979): Studies of subgrid modelling with classical closures and Burgers equation. In "Turbu-

lent Shear Flows I," edited by E. Durst et al. (Springer 1979), pp. 353-369.

13) H. Nakazawa (1982): Stochastic Burgers equation in the inviscid limit. Adv. Appl. Math. 3, 18-42.

14) H. Nakazawa (1987): Quasistationary structures on a class of forced Burgers turbulence between walls. Phys. Rev. A35, 5137-5148.

15) P.D. Lax (1954): Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Comm. Pure Appl. Math. 7, 159-193.

16) A. H. Jazwinski (1970): "Stochastic Processes and Filtering Theory," (Academic Press).

17) E. Helfand (1979): Numerical integration of stochastic differential equations. Bell System Tech. J. 58, 2289-2299.