

菱形セル流における攪乱の発達

相模工大・工 水島 二郎 (Jiro Mizushima)

大阪府大・工 後藤 金英 (Kanefusa Gotoh)

大阪府大・工 万井 敏寛 (Toshihiro Mann-i)

空間的周期構造をもつ流れの中で最も単純な構造をもつのは、次元の低い2次元平行周期流であるが、その中でも基本的であると考えられるのは速度分布が $U = \sin y$ (流れの方向に x 軸, 直角方向に y 軸をとる) で与えられる流れである。この流れは Kolmogorov の提起によって 1961 年に Sinai¹⁾ がその安定性を取り扱ったことに因んで、Kolmogorov 流と呼ばれることがある。

平行周期流に次いで基本的とみなされる流れはセル構造をもつ2次元周期流であって、例えば、その流れ関数が、

$$\Psi = \cos x + \cos y \quad (1-1)$$

で表される正方形セル流、

$$\Psi = \cos kx + \cos y \quad 0 < k < 1 \quad (1-2)$$

で表される菱形セル流である (図 1-1)。(1-2) は $k = 0$ および 1 の

とき Kolmogorov 流と正方形セル流になる。 $k > 1$ と $0 \leq k \leq 1$ の流れは実質的に同等である。

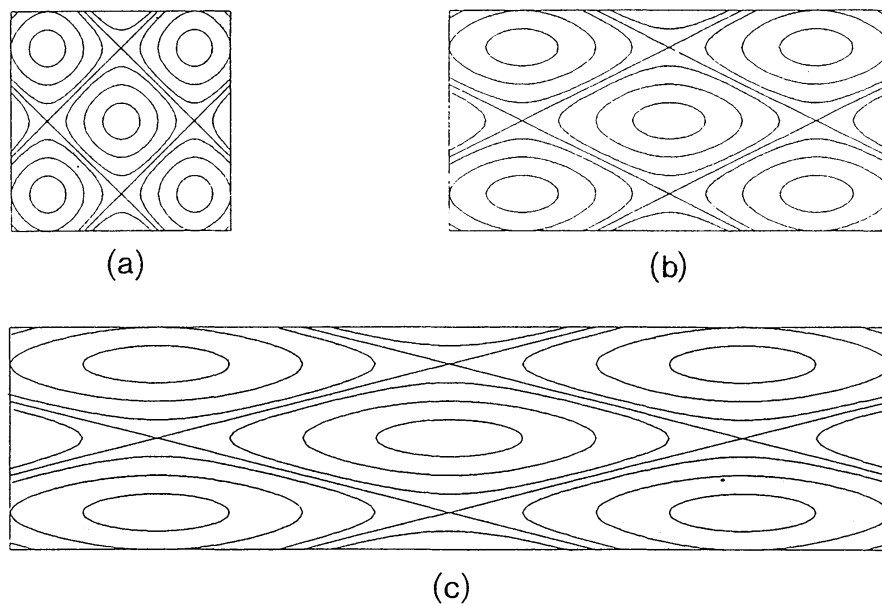


Fig. 1. Rhombic cell flow $\Psi = \cos kx + \cos y$; (a) $k = 1$; (b) $k = \frac{1}{2}$ and (c) $k = \frac{1}{4}$.

図 1-1 ref [5]

空間的周期流の安定性問題は多くの研究者によって取り扱われているが、本研究との関連における主要な結果は、

(1) 正方形セル流の臨界 Reynolds 数が $R_c = \sqrt{2}$ である。

(2) 菱形セル流 (1-2) の臨界 Reynolds 数は $k = 1$ の $R_c = \sqrt{2}$ から、

k の減少と共に単調に減少する。

(3) $k \rightarrow 0$ で $R_c \rightarrow 1$ となって、 $k = 0$ の Kolmogorov 流の $R_c = \sqrt{2}$

にならない。

などである。

底に棒磁石を敷きつめた容器の中に電解質の溶液を入れ、磁石が周期的に変化する方向に一様電流を流すと、周期的な

Lorentz力が発生し、これを駆動力とする周期流が実現し、表面にKolmogorov流が現れる(図1-2)。但し、この流れは深さ方向に構造をもつので2次元的ではなく、底の影響が速度に比例する抵抗として流れに働くので、攪乱の長波長成分が安定化され、Kolmogorov流が無限大波長の攪乱に対して R_c を与えるのと違って、有限波長の攪乱に対して臨界状態が現れる。その結果、超臨界ではセル構造をもった周期流が見られる(図1-3)(N. F. Bondarenko et al.)²⁾。この流れは厳密にはKolmogorov流ではないが、実験可能という点で興味深い。



図1-2 ref [2]

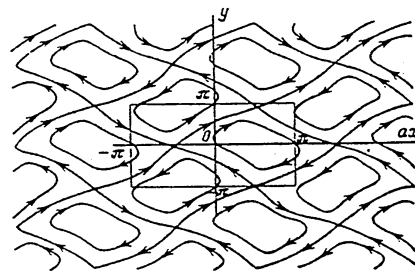
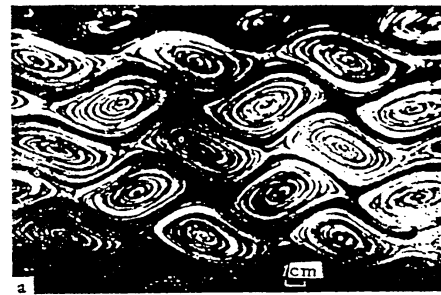


図1-3 ref [2]

速度に比例する抵抗を入れた運動方程式を基礎にした解析では、超準臨界状態で攪乱のカオス的振舞いが報告されている(G. I. Sivashinsky)³⁾。一方、Kolmogorov流における攪乱の

振舞いの数値シミュレーションでは、高 Reynolds 数における乱流への遷移も報告されている (R. Grappin et al.)⁴⁾。

今回の研究は、(1-2)の菱形セル流を対象として、外力

$$G = k(1 - k^2) \sin kx \sin y - \frac{k^2 \cos kx + \cos y}{R}$$

による菱形セル流 (1-2) の実現性 (亜臨界問題) をはじめとし、線形臨界条件の再確認、超臨界流れにおける有限攪乱の振舞いなどを数値シミュレーションで調べることを目的とする。

[1] 数値計算の方法

2次元非圧縮流体の運動方程式は、流れ関数 $\Psi(x, y, t)$ を用いて、

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial(\Delta \Psi, \Psi)}{\partial(x, y)} - \frac{1}{R} \Delta^2 \Psi = G, \quad (1)$$

$$G = k(1 - k^2) \sin kx \sin y - \frac{k^2 \cos kx + \cos y}{R}$$

の形に表される。ここに R は Reynolds 数、 G は外力項であり、外力を $Q = (Q_x, Q_y)$ とすると、 $G = \partial Q_x / \partial y - \partial Q_y / \partial x$ 、 Δ はラプラス演算子、 $\partial(f, g) / \partial(x, y) = (\partial f / \partial x)(\partial g / \partial y) - (\partial f / \partial y)(\partial g / \partial x)$ である。

この方程式を基礎にして、時間発展は Runge-Kutta-Gill 法を用い、空間変化は離散フーリエ展開を用いて数値計算をおこなう。計算領域は $(X, Y) = (2\pi L_x, 2\pi L_y)$ を (M, N) 等分する。 $(x_k, y_l) = (2\pi L_x k / M, 2\pi L_y l / N)$ 上の Ψ で Ψ_{kl} (k, l は整数) を定義

すると、 Ψ の離散フーリエ展開は、

$$\begin{aligned}\psi_{kl} &= \sum_{m=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} a_{mn}(t) e^{i(m\frac{x_k}{L_x} + n\frac{y_l}{L_y})} \\ &= \sum_{m=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} a_{mn}(t) e^{i(m\frac{2\pi k}{M} + n\frac{2\pi l}{N})}\end{aligned}$$

となる。この表式のフーリエ係数 a_{mn} は次の性質をもつ。

$$a_{(-m)(-n)} = a_{mn}^* \quad , \quad a_{\frac{M}{2}n} = a_{(-\frac{M}{2})n} \quad , \quad a_{m\frac{N}{2}} = a_{m(-\frac{N}{2})}$$

$$a_{(M+m)n} = a_{mn} \quad , \quad a_{m(N+n)} = a_{mn}$$

$$a_{mn} = a_{(M-m)(N-n)}^*$$

$$a_{0n} = a_{Mn} \quad , \quad a_{0(N-n)} = a_{Mn}^* = a_{0n}^*$$

$$a_{m0} = a_{mN} \quad , \quad a_{(M-m)0} = a_{mN}^* = a_{m0}^*$$

この性質を用いると計算領域 $(-M/2+1 \leq X < M/2 \quad , \quad -N/2+1 \leq Y < N/2)$ を $(-M/2+1 \leq X < M/2 \quad , \quad 0 \leq Y < N/2)$ にとることができる。

(1) 式の各項を離散フーリエ展開すると次のようになる。

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} = - \sum_{m=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \left\{ \left(\frac{m}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n}{L_y} \right)^2 \right\} \frac{\partial a_{mn}}{\partial t} e^{i(m\frac{x_k}{L_x} + n\frac{y_l}{L_y})}$$

$$\frac{1}{R} \Delta^2 \Psi = \frac{1}{R} \sum_{m=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \left\{ \left(\frac{m}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n}{L_y} \right)^2 \right\}^2 a_{mn} e^{i(m\frac{x_k}{L_x} + n\frac{y_l}{L_y})}$$

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} = - \sum_{m=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} i \frac{m}{L_x} \left\{ \left(\frac{m}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n}{L_y} \right)^2 \right\} a_{mn} e^{i(m\frac{x_k}{L_x} + n\frac{y_l}{L_y})}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \sum_{m=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} i \frac{n}{L_y} a_{mn} e^{i(m \frac{x_k}{L_x} + n \frac{y_k}{L_y})} \\ \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} &= - \sum_{m=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} i \frac{n}{L_y} \left\{ \left(\frac{m}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n}{L_y} \right)^2 \right\} a_{mn} e^{i(m \frac{x_k}{L_x} + n \frac{y_k}{L_y})} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \sum_{m=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} i \frac{m}{L_x} a_{mn} e^{i(m \frac{x_k}{L_x} + n \frac{y_k}{L_y})} \\ G &= \sum_{m=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \left\{ -\frac{1-k^2}{4} \cdot \frac{m}{L_x} \cdot \frac{n}{L_y} \delta_{|m|kL_x} \delta_{|n|L_y} e^{i(m \frac{x_k}{L_x} + n \frac{y_k}{L_y})} \right. \\ &\quad \left. - \frac{k^4}{2R} \delta_{|m|kL_x} \delta_{|n|0} e^{i(m \frac{x_k}{L_x} + n \frac{y_k}{L_y})} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2R} \delta_{|m|0} \delta_{|n|L_y} e^{i(m \frac{x_k}{L_x} + n \frac{y_k}{L_y})} \right\} \end{aligned}$$

ここに $\delta_{|m|kL_x}$ は Kronecker の δ である。

これらを (1) 式に代入すると、 $a_{mn}(t)$ の時間発展を支配する $M \times N$ 個の連立方程式が得られる。

(2) 線形安定性理論

菱形セル流 $\Psi = \cos kx + \cos y$ の線形安定性については次のことがわかっている。Floquet の定理によってこの場合の微小攪乱は、

$$\psi = e^{\sigma t + i(\alpha kx + \beta y)} F(kx, y)$$

の形をとる。ここに、 σ は複素増幅率、 α, β は Floquet 指数、 $F(kx, y)$ は周期性

$$F(kx + 2\pi, y) = F(kx, y + 2\pi) = F(kx, y)$$

をもつ周期関数である。

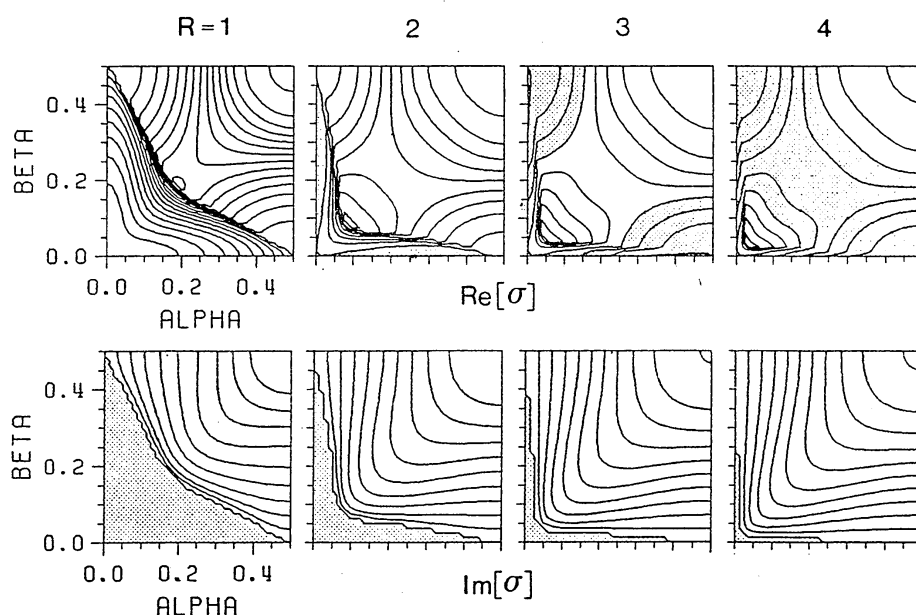
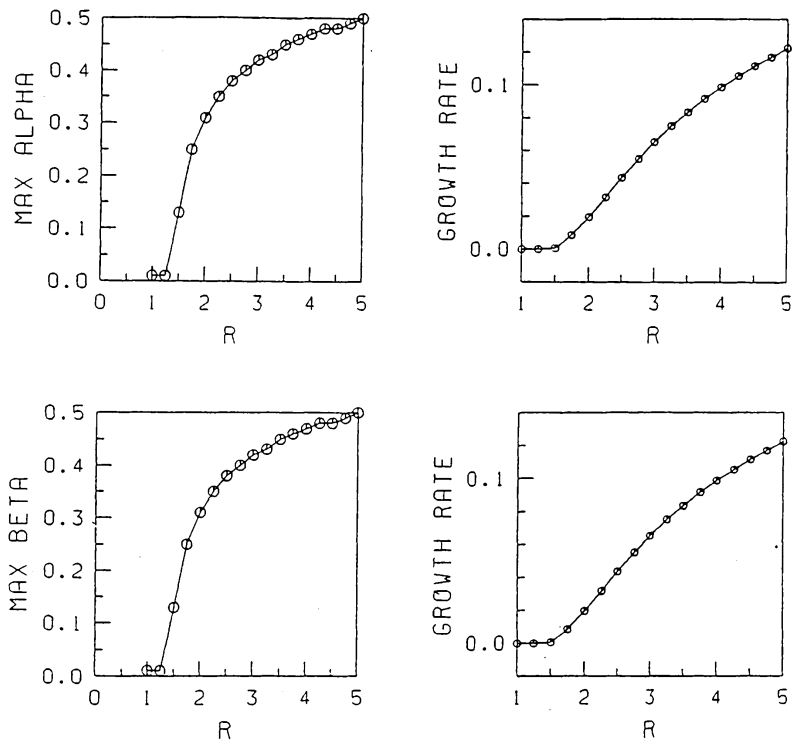


図 1 $k = 1$ の場合の σ の値の分布 ref [5] から転載

複素増幅率 σ は α , β および R , k に依存するが、 $k = 1$ の場合の σ の分布を図 1 に引用する。この図は $Re[\sigma]$ と $Im[\sigma]$ の等高線図であり、それぞれ 0.02 の間隔でプロットしてある。陰をつけた領域は $Re[\sigma]$ の図では不安定領域 ($Re[\sigma] > 0$) に対し、 $Im[\sigma]$ の図では $Im[\sigma] = 0$ をあらわす。図 1 の上列 $Re[\sigma]$ の図を見ると、増幅率最大のモードが、 α 軸上および β 軸上にあらわれている。おのおのの Reynolds 数での最大増幅率をもつモードの α および β の値と増幅率を図 2 に引用する。例えば $k = 1$ で $R = 1.75$ のとき、最大増幅率をもつのは $\alpha = 0.25$, $\beta = 0$ および $\alpha = 0$, $\beta = 0.25$ のモードで増幅率 $Re[\sigma] = 0.00826072$ である。

図 2
ref [5]



〔 3 〕 攪乱の発達

本研究の目的は k の幾つかの値について攪乱の発達を追跡し、超臨界主流における平衡状態の有無、そのときの流れの定常・非定常性、亜臨界主流における臨界振幅の分布などを調べることであるが、数値計算はまだ完了には至っていないので、以下では中間報告としてこれまでに得られた結果について述べる。

図 3 は $k = 1$ の正方形セル流に微小攪乱を加えたときの攪乱の発達であり、初期条件として $\phi = \cos x + \cos y + 0.02 * \cos(x/4)$ を与え、 $(L_x, L_y) = (4, 4)$ 、 $(M, N) = (64, 64)$ (従って計算点は計算領域 $(X, Y) = (8\pi, 8\pi)$ を 64×64 等分した点)、時間刻み 0.01 で計算を行った。以下特に断わらない限り、計算は (L_x, L_y) 、

(M, N)、時間刻みとしてこの値を用いた結果である。

図 3 において、 $|\psi_{40}|$ 、 $|\psi_{04}|$ および $|\psi_{10}|$ は、それぞれ $\cos x$ 、 $\cos y$ および $\cos(x/4)$ の振幅の $\frac{1}{2}$ の値を表す。 $|\psi_{10}| = C e^{t \cdot \text{Re}[\sigma]}$ とおくと、

$$\log |\psi_{10}| = \log C + t \cdot \text{Re}[\sigma] \cdot \log e$$

であるから、この図の $|\psi_{10}|$ の傾きから $\text{Re}[\sigma]$ の値が求められるが、その値は $\text{Re}[\sigma] = 0.00825$ であり、前述の線形理論で得られる固有値 0.00826072 と一致する。

次に初期条件として、

$$\phi = \cos x + \cos y + 0.1 * \cos(x/4),$$

$$\phi = \cos x + \cos y + 0.1 * \cos(x/4) * \cos(y/4),$$

$$\phi = \cos x + \cos y + 0.1 * \cos(x/4) * \cos(y/4)$$

$$+ 0.1 * \cos(x/4) + 0.1 * \cos(y/4).$$

を与えたときの各モードの時間発展を図 4、図 5 および図 6 に示す。図中の $|\psi_{01}|$ および $|\psi_{11}|$ は、それぞれ $\cos(y/4)$ および $\cos(x/4) * \cos(y/4)$ の振幅の $\frac{1}{2}$ の値を表し、 $|\psi_{40}|$ 、 $|\psi_{04}|$ および $|\psi_{10}|$ は図 3 と同様である。

初期攪乱として $\cos(x/4)$ のモードだけに振幅 $|\psi_{10}| = 0.05$ を与えた場合(図 4)には、 $|\psi_{10}|$ がほぼ 0.1 になるまで線形増幅をつづけ、その後主流の $\cos x$ 成分と相互作用して非線形成長し、 $\cos(y)$ 成分と $\cos(x/4) * \cos(y/4)$ 成分を生成する。

これに対し、クロスモード $\cos(x/4) * \cos(y/4)$ だけに振幅

$|\psi_{11}| = 0.05$ の初期値を与えた場合(図5)は、線形成長モードであるにもかかわらず初期に減衰し、ひき続き成長と減衰を繰り返す。攪乱のこの振舞いについては、次のような2つのメカニズムが考えられる。1つは、初期攪乱の形が固有解になっていないために、固有解への変形に伴って過渡期にこの成分の減衰と必要他成分の生成があり、その後のこの成分の盛衰は他成分との相互作用によるとするものである。今1つは、このモードに非線形減衰のメカニズムがあるとする説明で、攪乱は振幅 10^{-3} の程度にまで減衰すると線形成長モードの性質が復活して成長し、振幅0.1の程度にまで成長すると再び非線形減衰する。初期の段階における主流モードの定常性から、この過程は自己相互作用によると考える。いずれにしても攪乱は振幅0.1の程度以上で主流と相互作用して、 $\cos(x/4)$ 成分と $\cos(y/4)$ 成分を生成する。

3つのモードを初期条件として与えた場合(図6)では、どのモードも初期の段階では、図4と図5の場合のモードの成長過程と完全に同じ振舞いをする。 $\cos(x/4)$ と $\cos(y/4)$ の振幅が0.1程度になると3つのモードが互いに相互作用をはじめて定常状態に近い振舞いをする。

結論

図4, 図5および図6に示したような超臨界流れにおける有

限 Floquet 指数の攪乱の発達は線形理論からもある程度予測されることであるが、このことは弱非線形理論の適用の際に問題となった亜臨界流れにおける有限波長の中立攪乱の存在の問題が、超臨界の流れでは主要な問題にはならないことを意味する⁶⁾。有限 Floquet 指数 ($\leq \frac{1}{2}$) の攪乱の発達の結果、それが振動的な振舞いをするにしても、2次流に発達するにしても、いずれにしても流れはより大きな空間構造をもつようになる。但し、本報告で示したような Floquet 指数の限られた個数の離散モードの発達は、計算スキームに依存する性質であり、確定的な結果を得るにはより多数の離散モードの相互作用を調べる必要がある。それには適当に大きな計算領域を設定しなければならないし、長時間の計算も必要である。

参考文献

- 1) L. D. Meshalkin and Ya. G. Sinai, J. Appl. Math. Mech. (PMM) 25 (1961) 1700.
- 2) N. F. Bondarenko, M. Z. Gak and F. V. Dolzhansky, Atmospheric and Oceanic Physics 15 (1979) 711.
- 3) G. I. Sivashinsky, Physica D 17 (1985) 243.
- 4) R. Grappin, J. Leorat and P. Londrillo, J. Fluid Mech. (1988), vol. 195 pp. 239-256
- 5) K. Gotoh and M. Yamada, Fluid Dynamics Research

(1986) pp.165-176 North-Holland

6) G. Sivashinsky and V. Yakhot, Phys. Fluids 28 (1985)

1040.

parameters:

$k=1.0.$ $R=1.75$

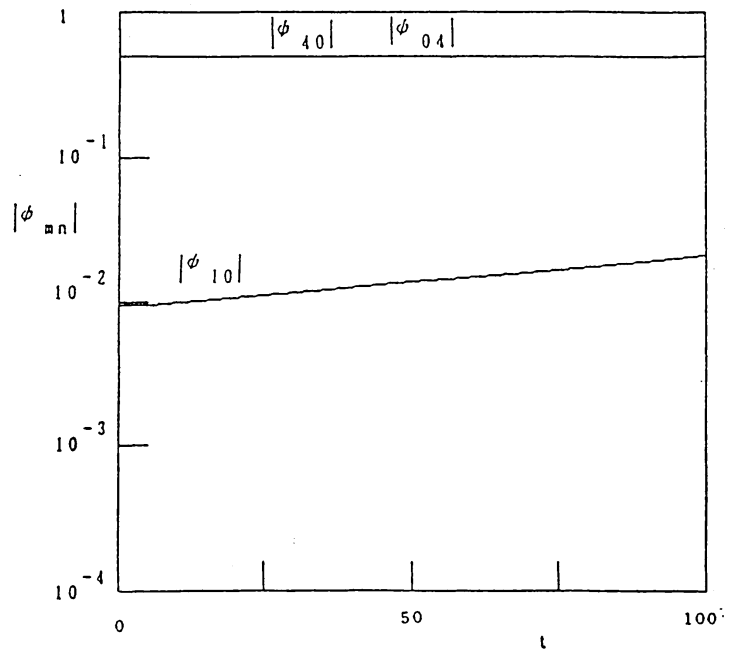
$N_x=N_y=64.$ $L_x=L_y=4$

$dt=0.01.$ $t=0-100.$

⊗ 3

initial condition:

$\phi = \cos kx + \cos y + 0.02 * \cos x/4$



parameters:

$k=1.0.$ $R=10.0.$

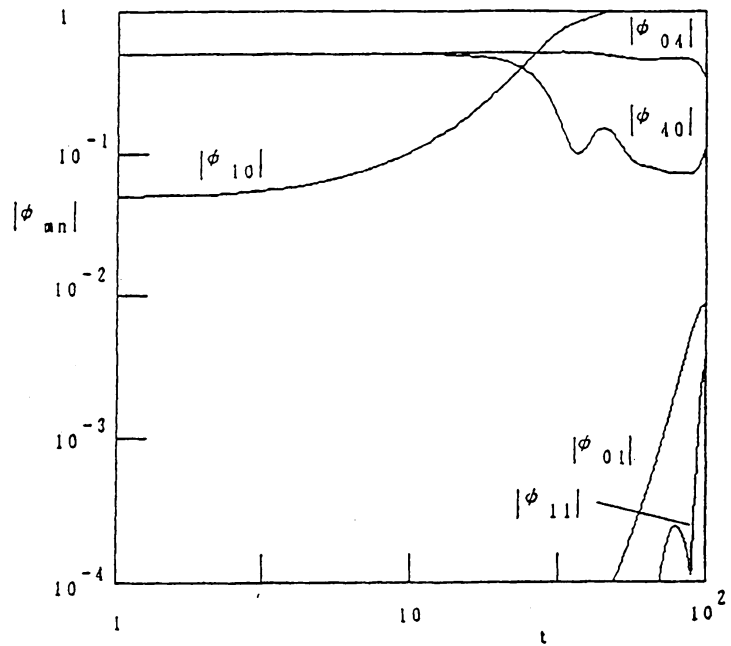
$N_x=N_y=64.$ $L_x=L_y=4$

$dt=0.01.$ $t=0-100.$

⊗ 4

initial condition:

$\phi = \cos kx + \cos y + 0.1 * \cos x/4$



parameters:

$k=1.0$. $R=10.0$.

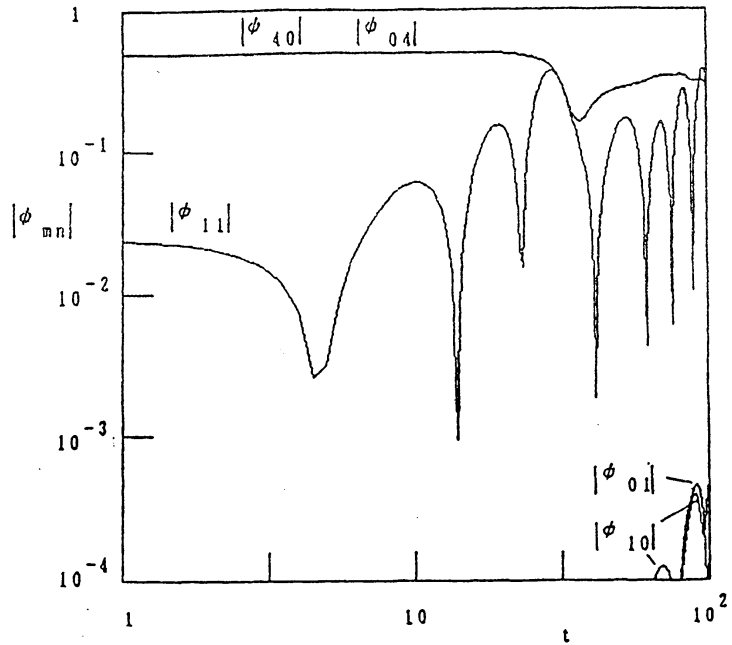
$N_x=N_y=64$. $L_x=L_y=4$

$dt=0.01$. $t=0-100$.

initial condition:

$$\phi = \cos kx + \cos y + 0.1 * \cos x/4 * \cos y/4$$

⊗ 5



parameters:

$k=1.0$. $R=10.0$.

$N_x=N_y=64$. $L_x=L_y=4$

$dt=0.01$. $t=0-100$.

initial condition:

$$\phi = \cos kx + \cos y + 0.1 * \cos x/4 * \cos y/4 + 0.1 * \cos x/4 + 0.1 * \cos y/4$$

⊗ 6

