

## 長方形管内の流れとその安定性

## I. 定常流

京大・理・物理 吉村卓弘 ( Takahiro Yoshimura )

京工繊大 巽 友正 ( Tomomasa Tatsumi )

## 1. 序論

長方形断面の直管を通る粘性流体の流れは、円管を通る Hagen-Poiseuille 流と共に、代表的な粘性流の一つであり、また、実際にもしばしば現れる流れである。この流れは、多くの工学的問題においては乱流として現れ、その統計的特性の理論的説明は今日残された重要な課題の一つである。長方形管流における乱流の発生の可能性、すなわち、この流れの外部攪乱に対する安定性は、断面のアスペクト比（縦横比）に大きく依存するものと考えられる。アスペクト比 1 の正方形断面の場合、管流の安定性は、円管内の Hagen-Poiseuille 流のそれと大差ないものと思われ、すべての Reynolds 数に対して安定であると推測される。これに対して、アスペクト比が限りなく大きくなった極限では、流れは二次元 Poiseuille 流に一致するが、この場合は、流れは有限の臨界 Reynolds 数、 $R_c = 5772.22$ 、をもつことが知られている<sup>1)</sup>。したがって、アスペクト比の 1 と  $\infty$  の間にある臨界アスペクト比が存在して、それ以下では流れは安定、それ以上では有限の Reynolds 数をもち不安定となるものと期待される。このような長方形管流の一般的安定性を調べるのが、本論文をはじめとする一連の研究の目的である。

長方形管流の安定性を調べるためには、まず、その定常流の速度分布を任意のアスペクト比に対して求めなければならない。長方形管にかぎらず、一般に任意断面形の直管を通る定常流を求める問題は、同じ断面形をもつ柱状弾性体の換れの問題と同様、二次元ポテンシャル問題に帰着される<sup>2)</sup>。この問題は、Saint-Venant<sup>3)</sup>によって、弾性体の換れの問題としてはじめて取扱われ、長方形を含むさまざまな断面形について解が求められた。長方形断面の場合、定常流の速度分布は、三角関数と双曲線関数との積の無限級数として表され、それを用いて、さまざまなアスペクト比に対する流量と大きなアスペクト比に対する流量の漸近公式などが導かれている。後に、アスペクト比が 2 の場合における断面内の等速度線が、Rouse<sup>4)</sup>によって求められている。また、速度分布に簡単な関数形を仮定してその形を変分原理によって求め、それから流量の近似公式を導くことは、対応する弾性体の問題として、Sokolnikoff<sup>5)</sup>によって行われている。今日まで、さまざまな流体力学の専門書や教科書において、長方形管流についての記述がなされているが、その多くは、以上の結果を解説しまたは引用しているにすぎない。

われわれは、長方形管流の安定性を調べるにあたって、定常流とそれに加えられた攪乱とを共に断面内の直交する 2 座標軸方向に Legendre 多項式に展開する方法をとることとする。直交関数系として、従来の三角関数に代えて Legendre 多項式を用いたのは、定常流の安定性を調べる際の便宜のためである。安定性の計算においては、攪乱に対する方程式に、定常流と攪乱との積の項が現れるが、この項は両者を同じ関数系で展開するとき、最も簡単にかつ解析的に求

められる。さらに今の場合のように、境界面上で攪乱が0となることを要求するとき、三角関数による展開よりも Legendre 多項式展開の方が収束性が優れていることが知られているのである<sup>6)</sup>。

本論文においては、定常流に関する結果だけを報告し、その安定性に関する議論は続報に譲ることとする。

## 2. 基礎方程式

流体は、速度  $u(x, t)$ 、圧力  $p(x, t)$  が次の Navier-Stokes 方程式と連続方程式に従う非圧縮粘性流体であるとする。

Navier-Stokes 方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta u, \quad (2.1)$$

連続方程式：

$$\nabla \cdot u = 0. \quad (2.2)$$

ここに、 $\rho$  は流体の密度、 $\nu$  は動粘性率であり、 $\Delta$  は Laplacian  $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$  を表す。

便宜のため、以下では流れの代表的な長さ  $L_0$ 、および代表的な速度  $U_0$  を用いて、次のように変数を無次元化する。ただし、記号はもとの記号を用いる。

$$\frac{x}{L_0} \rightarrow x, \quad \frac{u}{U_0} \rightarrow u, \quad \frac{U_0}{L_0} t \rightarrow t, \quad \frac{p}{\rho U_0^2} \rightarrow p \quad (2.3)$$

このとき、方程式 (2.1)、(2.2) は次のように無次元形で表される：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\nabla p + \frac{1}{R} \Delta u, \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot u = 0. \quad (2.5)$$

ただし、

$$R = \frac{L_0 U_0}{\nu} \quad (2.6)$$

は流れの Reynolds 数を表す。

## 3. 定常流

直角座標系  $(x, y, z)$  の  $x$  軸を、管の中心軸に沿って流れの方向にとり、 $y$  軸および  $z$  軸をそれぞれ、直交する二つの壁面に平行にとる。管の長方形断面の二つの辺の長さをそれぞれ  $2L$ 、 $2aL$  とおけば、壁の位置は無次元座標で、 $y = \pm 1$ 、 $z = \pm a$  と表される。ただし、アスペクト比  $a$  は、一般性を失うことなく、 $a \geq 1$  ととれる。

[図 1]

流れは定常で、流速は管軸に平行でかつ軸方向に変化しないものとする、無次元速度および圧力は、

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{U}(x, t) &= \mathcal{U}(x) = (U(y, z), 0, 0), \\ P(x, t) &= P(x), \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

のように表される。(3.1)を方程式(2.4)、(2.5)に代入すると、(2.5)式は自動的にみたされ、(2.4)式から  $U$  および  $P$  に対する方程式、

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\kappa = \text{定数}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad (3.2)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) U(y, z) = -R\kappa, \quad (3.3)$$

が導かれる。ただし、 $\kappa$  は正定数である。

方程式(3.3)に対する境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} y = \pm 1 \text{ において} & \quad U = 0, \\ z = \pm a \text{ において} & \quad U = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

で与えられる。

定常流の速度分布  $U(y, z)$  は、二次元ポテンシャル方程式(3.3)を境界条件(3.4)の下に解くことによって求められる。問題の線形性から明かなように、解  $U(y, z)$  の大きさは  $R\kappa$  に比例するから、一つの  $R\kappa$  の値に対して解を求めれば、任意の  $R\kappa$  に対する解は直ちに導かれる。後に確かめられるように、 $U(y, z)$  は  $y, z$  に関して対称であり、 $y = z = 0$  において、最大値  $U(0, 0) = U_{\max}$  をとる。

計算の便宜上、まず、

$$R\kappa = 2, \quad (3.5)$$

とおく。計算の結果、 $R\kappa = 2$  に対する  $U_{\max}$  の数値がアスペクト比  $a$  の各値に対して求まると、改めて、

$$R\kappa = 2 / U_{\max}(R\kappa = 2) \quad (3.6)$$

とおけば、(3.6) で与えられる  $R\kappa$  の値に対して、

$$U(0,0) = U_{\max} = 1 \quad (3.7)$$

となる。これは、代表的な速度  $U$ 。として、管軸上における流速の最大値をとることに相当する。

#### 4. 定常流の数値計算

条件 (3.5) により、(3.3) 式は

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma = -2, \quad (4.1)$$

となる。

(4.1) 式を長方形領域、 $-1 \leq y \leq 1$ ,  $-a \leq z \leq a$ , において解くために、 $U(y,z)$  を  $y$  および  $z$  について Legendre 多項式に展開する。(4.1) 式が偶演算子だけを含むことから明らかなように、同次境界条件 (3.4) の下での解  $U(y,z)$  は、 $y$  および  $z$  に関して偶関数でなければならず、従って、展開は、偶数次の多項式だけから構成される：

$$U(y,z) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N U_{mn} P_{2m}(y) P_{2n}(z/a). \quad (4.2)$$

ここに、 $P_{2m}(y)$  および  $P_{2n}(z/a)$  ( $m=0,1,\dots,M$ ;  $n=0,1,\dots,N$ ) は偶数次の Legendre 多項式で、 $\{U_{mn}\}$  は展開係数である。

展開 (4.2) を境界条件 (3.4) に代入すれば、 $\{U_{mn}\}$  に対する条件、

$$\sum_{m=0}^M U_{mn} = 0, \quad n=0,1,\dots,N; \quad (4.3)$$

$$\sum_{n=0}^N U_{mn} = 0, \quad m=0,1,\dots,M; \quad (4.4)$$

が得られる。

方程式 (4.1) は、汎函数、

$$J[U] = \int_{-1}^1 \int_{-a}^a \left\{ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 - 4\sigma \right\} dy dz \quad (4.5)$$

の停留値を求めることと同値である。展開 (4.2) を (4.5) に代入すると、

$$J[U] = a \sum_{\substack{m=0 \\ k=0}}^M \sum_{\substack{n=0 \\ l=0}}^N \sigma_{kl} \left\{ L_{klmn} U_{mn} - 4 S_{ko} S_{lo} \right\} \quad (4.6)$$

となる。ここに、

$$L_{klmn} = T_{km} S_{ln} + \frac{1}{a^2} S_{km} T_{ln}, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} S_{mn} &= \int_{-1}^1 P_{2m}(x) P_{2n}(x) dx \\ &= \frac{2}{4m+1} \delta_{mn}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} T_{mn} &= \int_{-1}^1 \frac{dP_{2m}(x)}{dx} \frac{dP_{2n}(x)}{dx} dx \\ &= \begin{cases} 2m(m+1) & (m \leq n), \\ 2n(n+1) & (n \leq m) \end{cases}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

である。ただし、 $\delta_{mn}$ は Kroneckerの記号を表す。

$J[U]$  が停留値をとるための条件、

$$\frac{\delta J}{\delta \sigma_{kl}} = 0, \quad k=0,1,\dots,M; l=0,1,\dots,N \quad (4.10)$$

から、条件式、

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N L_{klmn} U_{mn} - 2 S_{ko} S_{lo} + 2\alpha_l + 2\beta_k = 0, \quad (4.11) \\ k=0,1,\dots,M; l=0,1,\dots,N \end{aligned}$$

が得られる。ここに、 $\{\alpha_l\}$ 、 $\{\beta_k\}$ は未定乗数を表す。

( $N+1$ )個の方程式(4.3)、( $M+1$ )個の方程式(4.4)、および( $M+1$ ) $\times$ ( $N+1$ )個の方程式(4.11)は、未知数 $\{U_{mn}\}$ 、 $\{\alpha_l\}$ および $\{\beta_k\}$ に対する閉じた連立一次方程式を構成する。これらの方程式をCROUT法を用いて数値的に解くことによって、展開係数 $\{U_{mn}\}$ を決定し、これを(4.2)式に代入して、速度分布 $U(y,z)$ 求めた。数値計算は、京都大学大型計算機センターのVP200およびVP400を用いて、倍精度で行った。

## 5. 定常流の速度分布

定常流の速度分布  $U(y, z)$  を, アスペクト比  $a = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20$  および  $30$  に対して計算した。用いた Legendre 展開の項数  $M, N$  の値は,  $m > M$  または  $n > N$  に対する展開係数  $U_{mn}$  がすべて  $10^{-6}$  より小さくなるようにする方針のもとに, 表 1 のように選んだ。

このように選んだ展開項数  $M, N$  が十分であることを見るために,  $M, N$  を変えたときの展開係数  $U_{mn}$  の値の変化を調べた。  $a = 1$  の場合は,  $M \times N = 20 \times 20, 25 \times 25, 30 \times 30, 35 \times 35$ , その他の場合は,  $20 \times 20, 20 \times 30, 20 \times 40$  に対する  $U_{mn}$  の値を求めた。その結果から, まず, 表 1 のように選んだ  $M, N$  の値に対して, 展開係数  $U_{mn}$ ,  $m > M, n > N$  がすべて  $10^{-6}$  より小さいことが確認された。つぎに, 展開係数  $U_{mn}$ ,  $m \leq M, n \leq N$  について,  $M, N$  を表 1 の値より大きくとった場合,  $10^{-6}$  の大きさの範囲でよく収束しており, 表 1 の  $M, N$  の値で十分であることが確かめられた。

[ 表 1 ]

展開係数  $U_{mn}$  の代表的な値として,  $U_{00}$  の値を表 2 に示す。展開 (4. 2) を考慮するとき,

$$\frac{1}{4a} \int_{-1}^1 \int_{-a}^a U(y, z) dy dz = U_{00}, \quad (5. 1)$$

となるから,  $U_{00}$  は,  $U_{\max}=1$  としたときの単位面積当りの無次元流量に一致する,

$$Q_{nd}(U_{\max}=1) = U_{00}, \quad (5. 2)$$

ことがわかる。

[ 表 2 ]

速度分布  $U(y, z)$  の計算結果から  $U_{\max}(R\kappa = 2)$  を求めると, 表 3 の上欄のようになる。この結果と (3. 6) から,  $R\kappa$  の値を求めると, 表 3 の下欄のようになる。

[ 表 3 ]

このようにして求められた無次元速度分布  $U(y, z)$  ( $-1 \leq y \leq 1, -a \leq z \leq a$ ) を, 図 2~7 に示す。 図 2 は, 正方形断面  $a = 1$  について,  $U = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$  に対する等速度線と,  $y$  および  $z/a = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$  の各断面における速度分布を示す。 図 3, 4, 5, 6 および 7 は, それぞれ  $a = 2, 3, 4, 5$  および 10 について, 同様の等速度線と速度分布を示す。 ただし,  $a = 4$  以下のアスペクト比に対しては, 流れの対称性を考慮して半領域,  $0 \leq z \leq a$ , における結果を, そして,  $a = 5$  および 10 に対しては, 短い壁面の近傍の領域,  $a - 4 \leq z \leq a$ , における結果のみを示した。 さらに大きいアスペクト比  $a = 20$  および 30 に対しても数値結果が得られているが, 領域,  $a - 4 \leq z \leq a$ , においては  $a = 10$  の結果と可視的な差が認められないため, 図示することは割愛した。 なお,  $a = 2$  の場合については,  $U = 0.2, \dots, 0.8$  に対する等速度線が, Rouse<sup>4)</sup> によって与えられている。

[ 図 2~7 ]

以上の結果から明かなように, アスペクト比  $a$  が増大するにつれて, 壁  $z = \pm a$  から離れた領域では, 速度分布は急速に二次元 Poiseuille 流 ( $a \rightarrow \infty$ ) の速度分布,

$$U(y, z) = 1 - y^2 \quad (5. 3)$$

に近づき, 壁  $z = \pm a$  の影響は, 壁近傍の領域,  $-a \leq z \leq 4 - a$  および  $a - 4 \leq z \leq a$ , においてのみ現れるようになる。 しかも, 壁近傍の領域における定常流の速度分布は,  $a \geq 10$  では  $a$  によってほとんど変わらなくなる。 このことを数値的に確かめるために, 壁  $z = a$  の近傍の領域,  $a - 4 \leq z \leq a$ , の  $z$  座標を 10 等分した点,

$$z_n = a - 4 + 0.4 n, \quad n=0, 1, \dots, 9, \quad (5. 4)$$

における各断面内の速度分布を, アスペクト比  $a = 10, 20$  および 30 に対して計算すると, それらは  $10^{-5}$  以下の誤差の範囲内で一致し, この領域における速度分布は普遍的な形をとることがわかる。 この普遍速度分布を数式的に表すため,  $z_n$  の各断面において,  $y$  に関する多項式,

$$U(y, z_n) = b_0^{(n)} + b_2^{(n)} y^2 + b_4^{(n)} y^4 + b_6^{(n)} y^6 + b_8^{(n)} y^8 \quad (5. 5)$$

として表示すると, 展開係数は展開 (4. 2) から直ちに求められる。  $a = 30$  の結果から求めた係数は, 表 4 のようになる。

[ 表 4 ]

表4から明かなように、最も中央に近い断面  $z = a - 4$  ( $z = z_0$ ) においては、速度分布は、 $10^{-3}$ 以下の誤差において、二次元 Poiseuille 流 (5. 3) と一致していることがわかる。表4の数値と多項式表示 (5. 5) を用いて計算した速度分布は、上に述べた普遍速度分布に比べて、壁の極く近傍 ( $n \geq 7$ ) では  $10^{-3}$ 以下の誤差、それ以外の領域 ( $n \leq 6$ ) では、 $10^{-5}$ 以下の誤差で一致している。したがって、多項式表示 (5. 5) は、実用的には十分な近似で、長方形管流の壁近傍における普遍速度分布の表式として使えることがわかる。

#### 6. 定常流の流量

与えられた圧力勾配のもとでの長方形管流の全断面を通る流量は、有次元形で次のように表される：

$$Q_d = -\frac{1}{\rho \nu} \frac{dP}{dx} 2 a L^4 \cdot Q_{nd} \quad (6. 1)$$

ここに、 $Q_{nd}$ は  $R \kappa = 2$  とした時の単位面積当りの無次元流量であり、(5. 2) を用いて、

$$Q_{nd} = Q_{nd}(U_{\max}=1) \cdot U_{\max}(R \kappa=2) = U_{\infty} \cdot U_{\max}(R \kappa=2) \quad (6. 2)$$

で与えられる。表2および3から、 $Q_{nd}$ を求めると、表5および図10に示すようになる。 $Q_{nd}$ は、正方形管  $a = 1$  に対して最小値をとり、アスペクト比  $a$  と共に単調に増加して、 $a \rightarrow \infty$  のとき、二次元 Poiseuille 流に対する値  $2/3$  に近づく。

[ 表 5 ]

[ 図 1 0 ]

アスペクト比  $a$  の大きい値に対しては、 $z$  の全領域  $-a \leq z \leq a$  のうち、速度分布が二次元 Poiseuille 流のそれと一致する領域が  $a$  に比例して増大するのに対して、それからずれた普遍速度分布をとる領域は有限の幅にとどまる。このことから、無次元流量  $Q_{nd}$  の漸近値  $2/3$  からのずれは、 $a$  の大きい値に対して、 $1/a$  に比例することがわかるが、具体的には、

$$Q_{nd} = \frac{2}{3} - 0.4201 / a \quad (6. 3)$$

のように表される。ただし、係数は  $a \geq 3$  の結果を用いて決定した。近似式 (6. 3) は、 $a \geq 3$  において  $10^{-4}$ 以下の誤差で成立しており、長方形管流の流量公式として3以上のアスペクト比に対して、十分実用的に使えることがわかる。



第1節にも述べたように、長方形管内の定常流を求めるだけの目的には、Saint-Venant<sup>3)</sup>の用いた三角関数と双曲線関数による展開、

$$\begin{aligned} \psi(y, z) &= 1 - y^2 - 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{m^3} \cdot \frac{\cos m y \cdot \cosh m z}{\cosh m a}, \\ m &= \frac{2n+1}{2} \pi, \end{aligned} \quad (6.4)$$

および、この展開から導かれる流量の表示、

$$Q_{nd} = \frac{2}{3} - \frac{4}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m^5} \tanh m a \quad (6.5)$$

が便利であり、また収束性も良好である。Love<sup>2)</sup>が引用している Saint-Venant による  $a=1$  の場合の  $Q_{nd}$  の数値結果は、本論文の表4の値に一致し、また、漸近公式(6.3)の係数も有効数字4桁まで一致している(代表的な長さのとり方の差から、数値はいずれも1/8倍する必要がある)。われわれが、本論文で採用した  $a$  の値に対して、改めて(6.5)式を用いて  $Q_{nd}$  を計算した結果は、表5の5桁の数値と完全に一致することが確かめられた。ちなみに、この問題は Saint-Venant 以後にもさまざまな概説や専門書において取扱われ、表5に相当する結果も導かれているが、例えば、Pöschl<sup>7)</sup>の結果は有効数字3桁目に誤差を含んでおり、その結果がそのまま、Berker<sup>8)</sup>によって引用されている。また、Timoshenko & Goodier<sup>9)</sup>は有効数字3桁の正しい結果を与えている。

## 7. 結論

本論文においては、長方形管を通る定常流を Legendre 多項式展開の方法を用いて取扱い、断面のアスペクト比  $a=1, 2, 3, 4, 5, 10, 20$  および  $30$  に対して、断面内の等速度線と速度分布を数値的に計算した。アスペクト比  $a$  の大きな値に対しては、定常流は断面内の大部分において、二次元 Poiseuille 流 ( $a \rightarrow \infty$ ) のそれと一致し、それとの偏差は、長さ方向に直角な壁の近傍の領域においてのみ現れ、しかもその偏差の速度分布は、 $a \geq 10$  に対して、 $a$  によらない普遍的分布となることを示した。

定常流の速度分布に関する以上の結果から、定常流の流量をアスペクト比  $a$  の関数として求め、また、 $a$  の大きな値に対する流量の漸近公式を導いた。流量に関するこれらの結果は、Saint-Venant<sup>3)</sup>による三角関数と双曲線関数を用いた展開から求めた結果と、有効数字5桁まで完全に一致することが確かめられた。

## 謝辞.

著者の一人、吉村は、本研究の期間を通じて川原琢治博士(京都大学理学部)および山田道夫博士(京都大学防災研究所)から賜った絶大なる御指導と御激励に対して、深い感謝を捧げるものである。また、本研究は文部省科学研究費一般研究(C) No. 63540291の援助のもとに行われたことを記して、厚く感謝の意を表したい。

## 参考文献

- 1) S. A. Orszag: Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation, J. Fluid Mech. 50 (1971) 689-703.
- 2) A. E. H. Love: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity (Cambridge U. P., 1927) 314-318.
- 3) B. de Saint-Venant: Mémoire sur la torsion des prismes, Mémoires de l'academie des sciences des savants etrangers, 14 (1855) 233-560.
- 4) H. Rouse ed.: Advanced Mechanics of Fluids (John-Willey & Sons, 1959) 220.
- 5) I. S. Sokolnikoff: Mathematical Theory of Elasticity (McGraw-Hill, 1956) 128-134, 416-418.
- 6) S. A. Orszag: Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries. 1. Galerkin (Spectral) representations, Studies Appl. Math. 50 (1971) 293-327.
- 7) T. Pöschl: Zusammenfassende Berichte, Bisherige Lösungen des Torsionsproblems, Z. angew. Math. Mech. 1 (1921) 312-328.
- 8) R. Berker: Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible, Encyclopedia of Physics, Vol. VIII/2 (Springer-Verlag, 1963) 1-384.
- 9) S. Timoshenko and J. N. Goodier: Theory of Elasticity (McGraw-Hill, 1951) 275-278.

a	1	2	3	4	5	1 0	2 0	3 0
M	2 0	2 0	2 0	2 0	2 0	2 0	2 0	2 0
N	2 0	2 0	2 0	3 0	3 0	4 0	4 0	4 0

表1 Legendre 展開の項数.

a	1	2	3	4	5	1 0	2 0	3 0
U <sub>00</sub>	0.47704	0.50206	0.53658	0.56380	0.58310	0.62465	0.64566	0.65266

表2 Legendre 展開の係数U<sub>00</sub>.

a	1	2	3	4	5	1 0	2 0	3 0
U <sub>max</sub> (R $\kappa$ =2)	0.58937	0.91097	0.98146	0.99615	0.99920	1.0000		
R $\kappa$ (U <sub>max</sub> =1)	3.3935	2.1955	2.0378	2.0077	2.0016	2.0000		

表3 R $\kappa$ =2のときのU<sub>max</sub>と、U<sub>max</sub>=1とするR $\kappa$ の値.

	$b_0$	$b_2$	$b_4$	$b_6$	$b_8$
$z_0$	$9.9807 \times 10^{-1}$	$-9.9762 \times 10^{-1}$	$-4.8901 \times 10^{-4}$	$4.0951 \times 10^{-5}$	$1.2255 \times 10^{-7}$
$z_1$	$9.9639 \times 10^{-1}$	$-9.9554 \times 10^{-1}$	$-9.1623 \times 10^{-4}$	$7.4404 \times 10^{-5}$	$-5.7712 \times 10^{-6}$
$z_2$	$9.9323 \times 10^{-1}$	$-9.9165 \times 10^{-1}$	$-1.7176 \times 10^{-3}$	$1.4163 \times 10^{-4}$	$-4.7555 \times 10^{-6}$
$z_3$	$9.8731 \times 10^{-1}$	$-9.8434 \times 10^{-1}$	$-3.2185 \times 10^{-3}$	$2.6388 \times 10^{-4}$	$-1.0726 \times 10^{-5}$
$z_4$	$9.7621 \times 10^{-1}$	$-9.7065 \times 10^{-1}$	$-6.0258 \times 10^{-3}$	$4.8867 \times 10^{-4}$	$-2.1336 \times 10^{-5}$
$z_5$	$9.5540 \times 10^{-1}$	$-9.4501 \times 10^{-1}$	$-1.1250 \times 10^{-2}$	$8.8485 \times 10^{-4}$	$-1.9433 \times 10^{-5}$
$z_6$	$9.1642 \times 10^{-1}$	$-8.9709 \times 10^{-1}$	$-2.0793 \times 10^{-2}$	$1.4436 \times 10^{-3}$	$3.1921 \times 10^{-5}$
$z_7$	$8.4343 \times 10^{-1}$	$-8.0814 \times 10^{-1}$	$-3.7104 \times 10^{-2}$	$1.4387 \times 10^{-3}$	$4.5302 \times 10^{-4}$
$z_8$	$7.0714 \times 10^{-1}$	$-6.4696 \times 10^{-1}$	$-5.8598 \times 10^{-2}$	$-3.1977 \times 10^{-3}$	$1.3675 \times 10^{-3}$
$z_9$	$4.5489 \times 10^{-1}$	$-3.7601 \times 10^{-1}$	$-6.0547 \times 10^{-2}$	$-1.5633 \times 10^{-2}$	$-3.6670 \times 10^{-3}$

表4  $z_n$  の各断面における速度分布を表す (5.5) 式の係数.

a	1	2	3	4	5	10	20	30	$\infty$
Qnd	0.28115	0.45736	0.52663	0.56163	0.58263	0.62465	0.64566	0.65266	$\frac{2}{3}$

表5 単位面積当りの無次元流量.

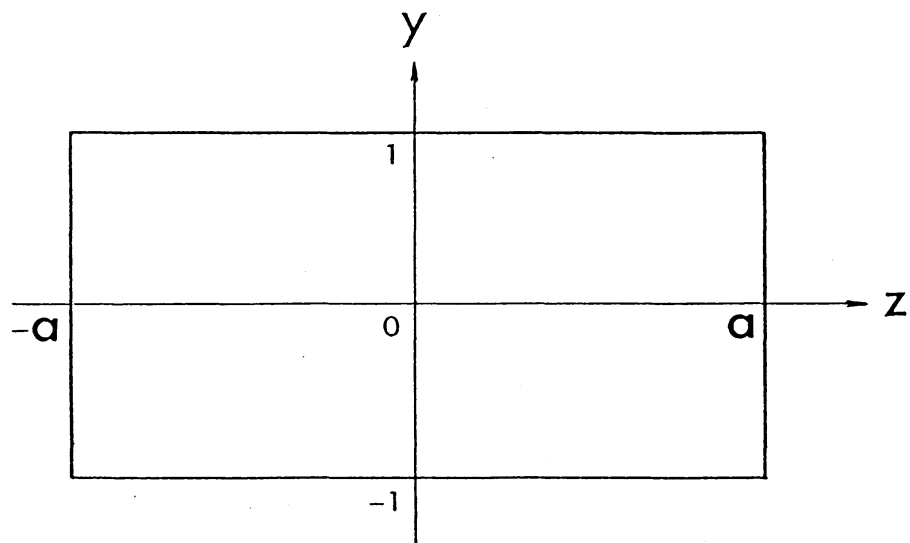


図1 長方形管の断面.

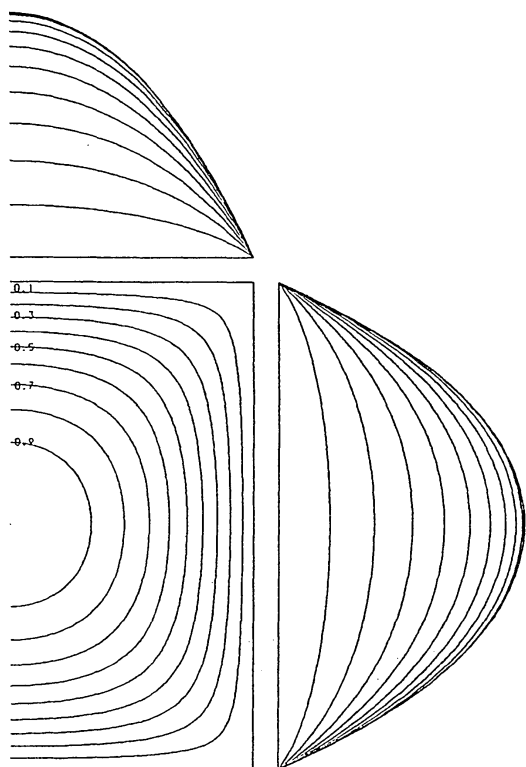


図2 等速度線と速度分布  $a = 1$  .

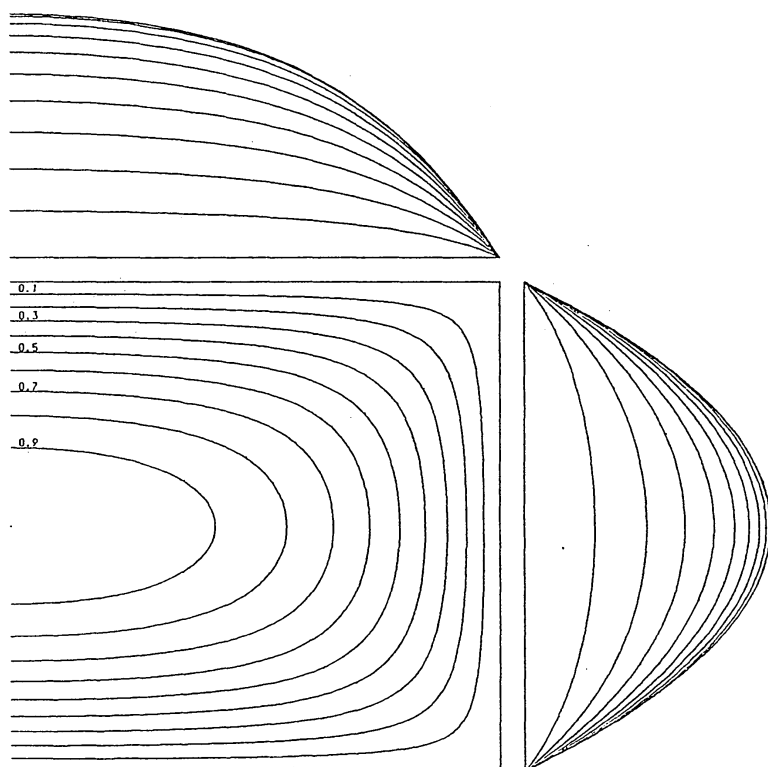


図3 等速度線と速度分布  $a = 2$  .

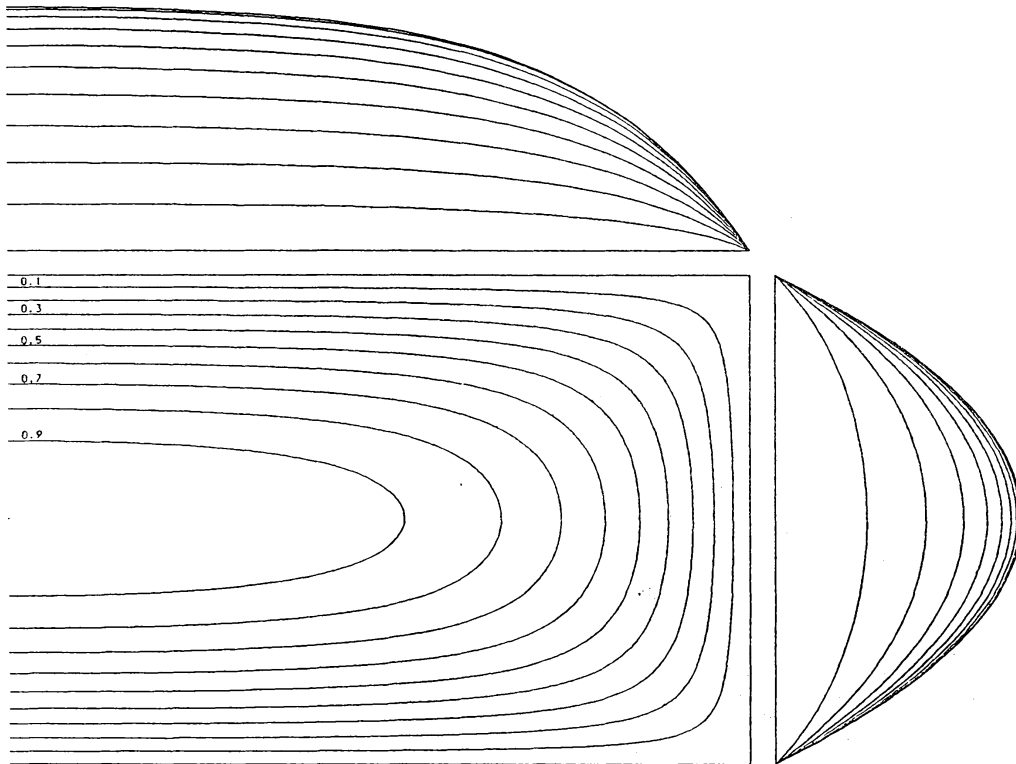


図4 等速度線と速度分布  $a = 3$  .

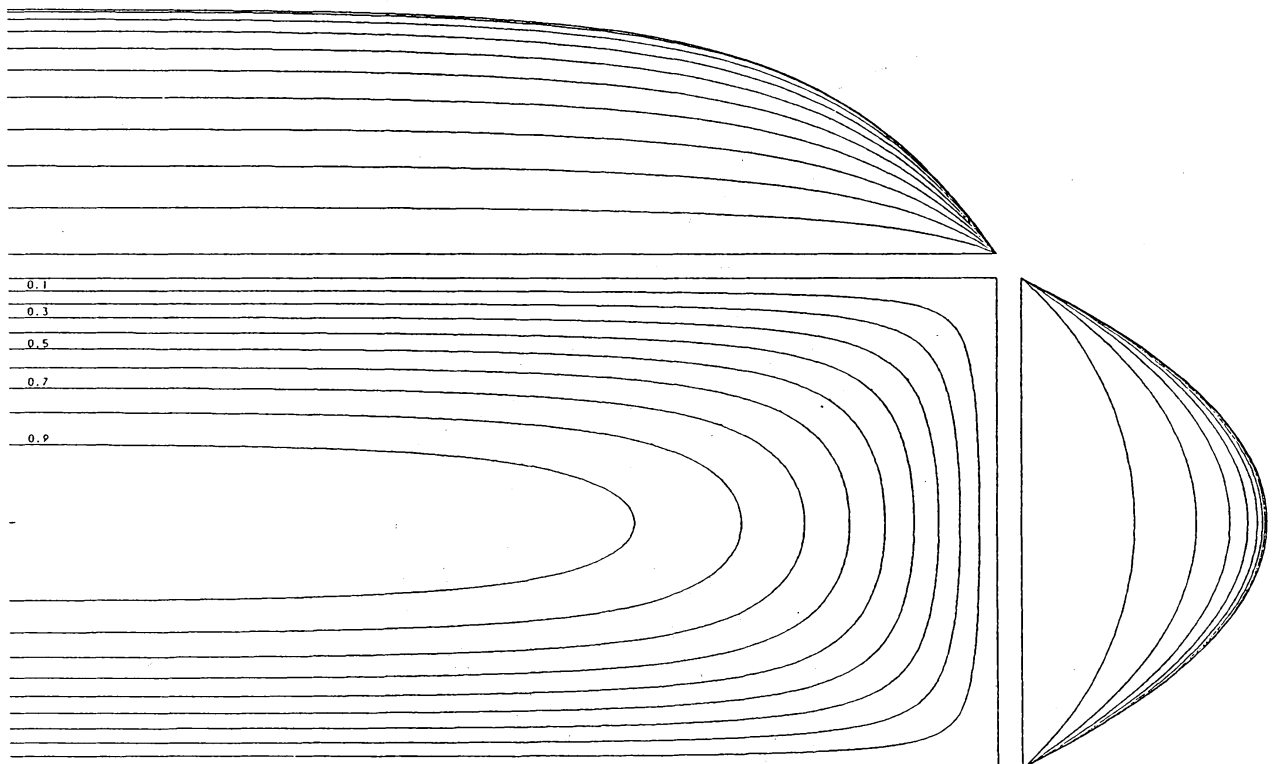


図5 等速度線と速度分布  $a = 4$  .

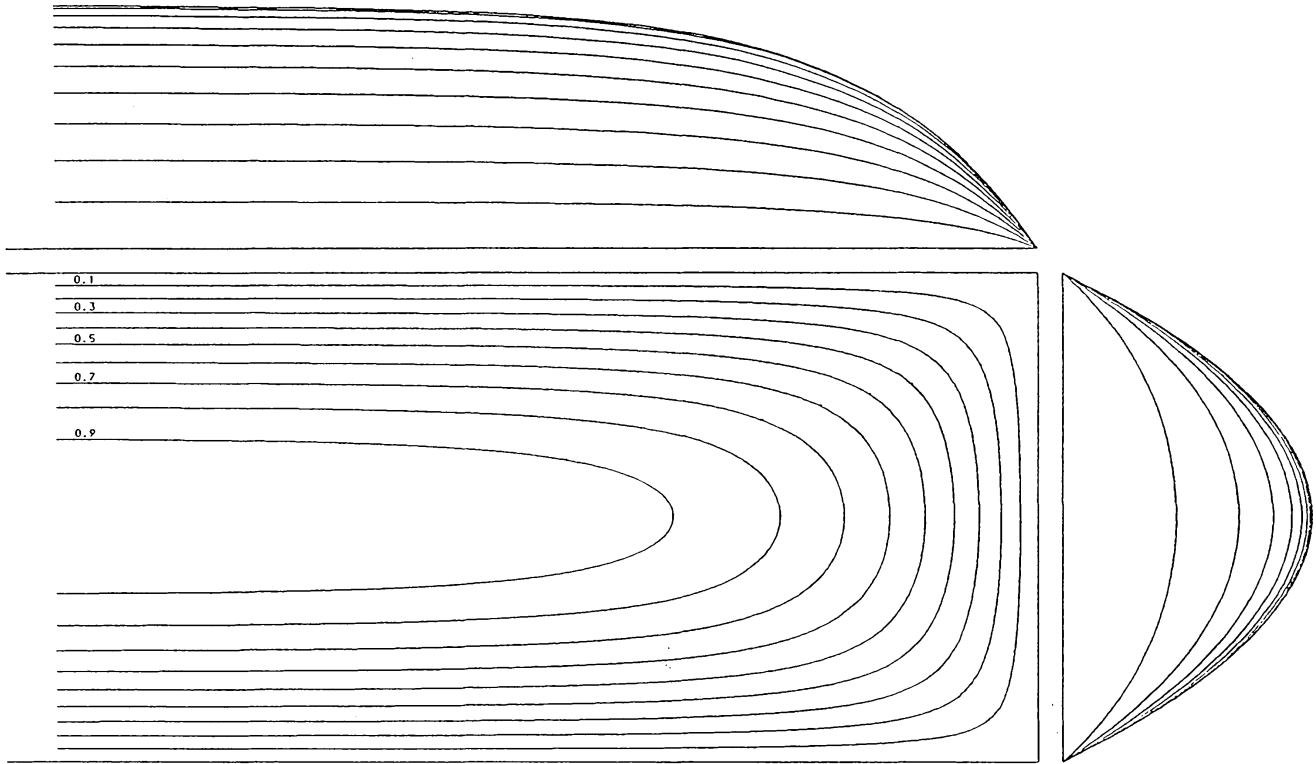


図6 等速度線と速度分布  $a = 5$  .

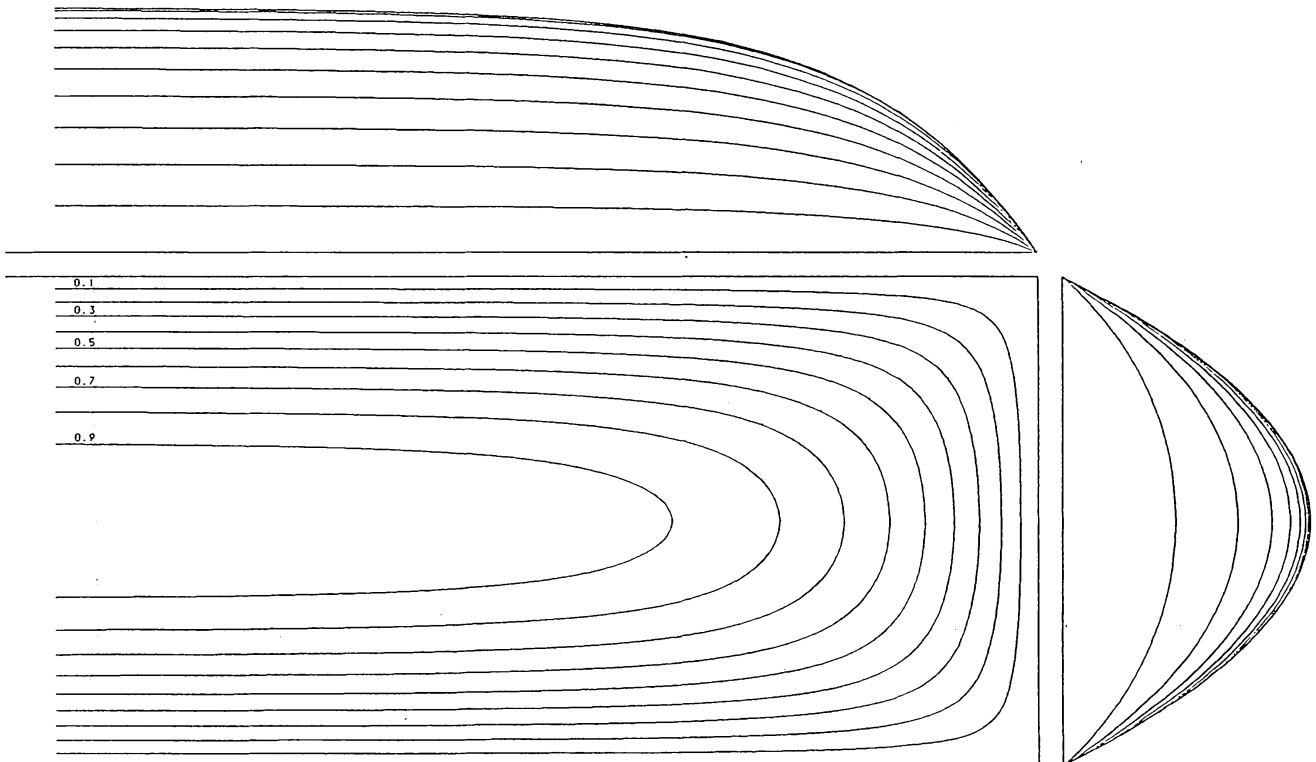


図7 等速度線と速度分布  $a = 10$  .

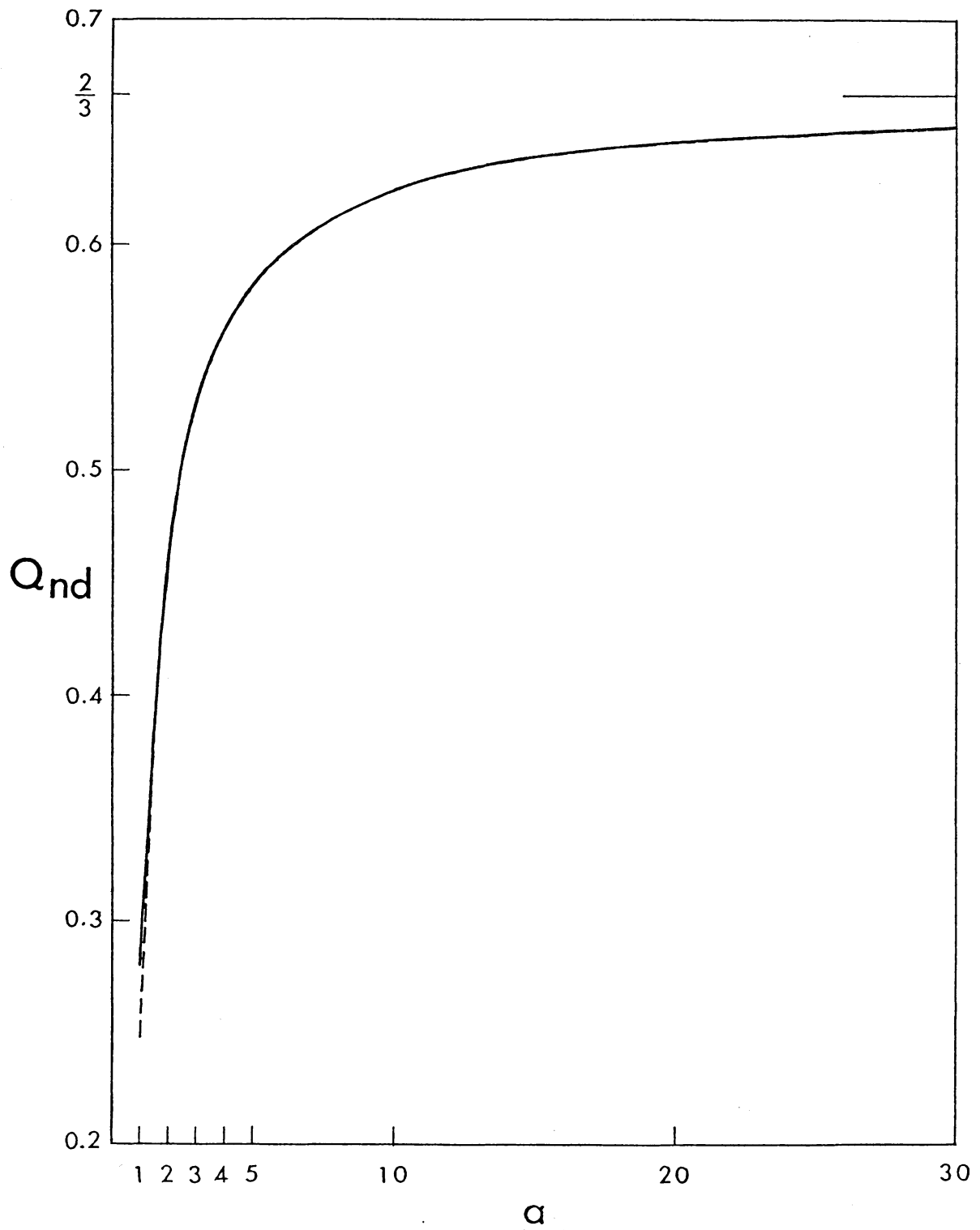


図8 流量のアスペクト比に対する依存性.