

局所体上の多様体の Brauer 群について

東大教養学部 斎藤秀司

序

整数論の世界において「体の Brauer 群」が大切な役割を果たす事はよく知られていると言っておいて良いでしょう。しかしそれをごく自然に一般化した「スキームの Brauer 群」(正確な定義を後で説明する)となること、またその重要性が広く一般に認識されているとは言えないかもしれない。しかし特に整数論的幾何学(あるいは幾何学的整数論といってもよい)の世界においては「スキームの Brauer 群」は大いに活躍しているのである。今ここでその 2, 3 の例についてふれてみる事にしよう。最初に次の結果は、「古典的」とも言えるものである。

定理 ([T] [M]) X を有限体上の proper smooth surface とすると次の 2 つは同値

- (1) X の Brauer 群, $Br X$ は有限群。
- (2) $\rho(X) = -ord_{s=1} \zeta(X, s)$ 。(Tate 予想)

ここに $\rho(X) = X$ の Picard 数 = rank of $NS(X)$ = rank of $Pic(X)$

$\zeta(X, s)$ は X の合同ゼータ函数。

上の定理の類似として数体上の曲線の Tate-Shafarevich 群と曲線の整数環上のモデルの Brauer 群との関係 (cf §1(G)) に肉する研究がある。又 [S-1] では数体上の多様体の Brauer 群と多様体の Hasse 原理との関係が研究されている。さてこの小論では上の例とは別のトピックにスポットをあて局所体上の多様体の Brauer 群について論じてみることにしよう。その前に一般の Brauer 群の定義を始めるよう。

§1 スキーム上の Brauer 群

以下 X をスキームとする。 A を \mathcal{O}_X -algebra の sheaf とする。

A が次の補題における同値な条件を満たす時 X 上の Azumaya algebra と呼ぶ。 (cf [G, I §5])

補題(1-1) X と A を上の通りとした時次は同値。

(1) A は \mathcal{O}_X -module として局所自由で 任意の X の点 x に対し、

$$A(x) := A \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x)$$

とおく時 $A(x)$ は $k(x)$ 上の central simple algebra。つまりある $k(x)$ の有限次分離拡大 $\mathbb{R}/k(x)$ が存在して

$$A(x) \otimes_{k(x)} \mathbb{R} \simeq M_n(\mathbb{R})$$

(2) A は \mathcal{O}_X -module として局所自由で 自然な写像 (層としての)

$$A \otimes_{\mathcal{O}_X} A^\circ \rightarrow \text{End}_{\mathcal{O}_X\text{-module}}(A)$$

は同型。ここで A° は A の逆環。

(3) 任意の X の点 x に対し 適当な オープン近傍 U と 整数 $r > 0$ が存在して

$$A \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_U \simeq M_r(\mathcal{O}_U). \quad (r \text{ を } A \text{ の } U \text{ 上の rank とす})$$

$X = \text{Spec } \mathbb{R}$ (\mathbb{R} は体) の場合は上のいづれかの条件もよく知られた \mathbb{R} 上の Azumaya algebra (= central simple algebra) の定義を与えることに注意しよう。体上の場合と同様に X の Brauer 群は X 上の Azumaya algebra の集合のある同型類として定義される。 X 上の 2 つの Azumaya algebra A, A' はある局所自由な

\mathcal{O}_X -module $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ が存在して

$$A \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{End}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}) \simeq A' \otimes_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}')$$

なるとき similar と定義する。これは同値関係を与える。

($\text{End}(\mathcal{E}) \otimes \text{End}(\mathcal{E}') \simeq \text{End}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}')$ に注意せよ!)

定義 (1-2) X 上の Brauer 群を

$$\text{Br} X = \{X \text{ 上の Azumaya algebras} \} / \text{similarity}$$

と定める。 A の class を $[A]$ と書く時 $[A \otimes A'] = [A] \cdot [A']$

なる作用を定め、事によつて $\text{Br} X$ は可換群になる。単位元は $[\mathcal{O}_X]$,

$[A]$ の逆元は $[A^\circ]$ で与えられる。

体の場合には自然な同型

$$\text{Br}(k) \simeq H^2(k, \mathbb{G}_m) \quad (\text{ガロアコホモロジー})$$

が存在する事はよく知られている (cf [Se, X §5])。これを一般化して (cf [G-II])

定理 (1-3) 自然な単写像

$$c_X: \text{Br} X \rightarrow H^2(X_{\text{ét}}, \mathbb{G}_m) \quad (\text{エタールコホモロジー})$$

が存在する。ここに \mathbb{G}_m は $X_{\text{ét}}$ 上の乗法群の層。

上の写像の構成は体上の場合と同様に 12 行われる。

その際必要なのは次の Skolem-Noether の定理の一般化である。

定理 (1-4) A を X 上の Azumaya algebra とする。 A の任意の

自己同型 ϕ に対し X のある Zariski open covering $(U_i)_{i \in I}$ をとれば

$\phi|_{U_i}$ はある $u_i \in \Gamma(U_i, A)^*$ による内部自己同型によつて与えられる。

系(1-5) $\text{Aut } M_r(\mathcal{O}_X) \simeq \text{PGL}_r(\mathcal{O}_X)$ (sheaf として同型)

(1-5) として

$P_r(X) = \{X \text{ 上の rank } r \text{ の Azumaya algebras} \} / \text{同型}$

とすると一般論として自然な同型

$$P_r(X) \simeq H^1(X_{\text{ét}}, \text{PGL}_r(\mathcal{O}_X))$$

が存在する。 C_X は完全系列

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \text{GL}_r(\mathcal{O}_X) \rightarrow \text{PGL}_r(\mathcal{O}_X) \rightarrow 1$$

から生ずる boundary map として得られるものがある。(詳しくは [G-II])

さて上の C_X は一般には同型でない。これは X が Noether ならば $\text{Br } X$ は torsion。しかし $H^2(X_{\text{ét}}, \mathbb{G}_m)$ は non-torsion になり得るからである。(しかし予想として

予想(1-6) X が quasi-compact ならば $\text{Br } X \simeq H^2(X_{\text{ét}}, \mathbb{G}_m)_{\text{tor}}$.

(1-6) が肯定的に知られている結果として

定理(1-7) 次の場合 (1-6) は正しい

(1) $X = \text{Spec } R$ R : Henselian local ring

(2) $\dim X \leq 1$

(3) $\dim X \leq 2$ \wedge X は regular

(1-7)(2) と (3) については [G-II §2] を参照。(1) はつきより従う。([G-I §6])

定理(1-8) R は Henselian local ring として k をその剰余体

とすると $\text{Br}(R) \simeq \text{Br}(k)$.

(1-7)(3) の系と 12 次を得る.

定理 (1-9) X を次元 2 以下の正則スフ-4, K をその函数体とす.

$$\text{Br } X = \bigcap_{x \in X^1} \text{Br } \mathcal{O}_{X, x} \subset \text{Br } K$$

こゝに X^1 は X の codimension one の点全体, $\mathcal{O}_{X, x}$ は局所環とす.

言いかえると $\text{Br } X$ は $\text{Br } K$ の中で codimension one の "不分岐" な元全体として捉えられる.

次に Brauer 群について知られている結果を述べてみよう.

(A) K が以下のいずれかとするとき $\text{Br } K = 0$.

(1) R は代数体 K 上の 1 変数代数函数体

(2) R は excellent discrete valuation ring で剰余体 k は代数体, K は R の商体

(3) K は有限体

上は全て (C_1) -体なることによる. (cf [G-III])

(B) X を代数体 K 上の代数曲線とすとき $\text{Br } X = 0$

これは (A)(3) と (1-9) の 2) 従う (cf [G III Cor (1.2)])

(C) K は局所体, つまり完備 (あるいは excellent henselian) 付値環 \mathcal{O}_K で剰余体が有限なるものの商体とする. この時

(1) $\text{Br } \mathcal{O}_K = 0$

(2) $\text{Br } K \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

(1) は (A)(3) と (1-8) の 2) 直ちに従う. (2) については [Se XII].

(D) $\text{Br } \mathbb{R} \simeq \frac{1}{2} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ non-trivial な Class の Hamilton 4 元数体 H と 5 元数体

(E) K は \mathbb{Q} の有限次代数拡大 または \mathbb{F}_p 上の一次代数関数体とする。 P_f を K の有限素点全体とし P_{real} を K の実素点全体とする。 各 $v \in P_f \cup P_{\text{real}}$ に対し K_v を K の v の完備化とし

$$\iota_v : Br K \rightarrow Br K_v \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad (v \in P_f)$$

$$\iota_v : Br K \rightarrow Br \mathbb{R} \cong \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \quad (v \in P_{\text{real}})$$

を自然な写像と (C), (D) における同型の合成とする。この時二次は完全系列。(cf. ex. [W. XIII §6])

$$0 \rightarrow Br K \xrightarrow{\iota} \left(\bigoplus_{v \in P_f} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \right) \oplus \left(\bigoplus_{v \in P_{\text{real}}} \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \right) \xrightarrow{s} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

ここに $\iota = \bigoplus_v \iota_v$, s は和をとる写像。これと (1-9) の系と

$X = \text{Spec } \mathcal{O}_K$ ($\text{ch } K = 0$) または K の \mathbb{F}_p 上の projective smooth model ($\text{ch } K = p > 0$) とすると

$$Br X \cong \bigoplus_{i=1}^{r-1} \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

ここに $r = \# P_{\text{real}}$.

(F) ([K]) n 次元局所体とする。つまり体の系列

$$K_0, K_1, \dots, K_n = K \text{ があり、2次を2度おとする}$$

の K_0 は有限

(1) 211 に対し K_i は excellent discrete valuation field で剰余体は K_{i-1} 。

この時自然な単射

$$\Phi : Br K \rightarrow K_{n-1}^M(K) \text{ の指標群}$$

がある。 211 K_{n-1}^M は Milnor K -群。 $n=1$ の場合 $K_0^M(K) = \mathbb{Z}$ で

上は (C)(2) の同型を与える。

(G) X を次のいずれかとする。

(ア) F_q 上の proper smooth geometrically connected surface.

(イ) 2次元正則スキームで、ある代教体 K の整数環 \mathcal{O}_K 上 proper & flat の時

予想 (*) (Artin-Tate, Tate-Shafarevich) $Br X$ は有限

(ア) の場合 予想 (*) が Tate 予想に同値であることは既に序の中での定理で述べた。(イ) の場合にはそれは以下の Tate-Shafarevich 予想と同値である。(cf [G II §4])

今 X の Tate-Shafarevich 群を

$$\text{III}(X/\mathcal{O}_K) = \text{Ker} (H^1(\mathcal{O}_K, J(\bar{K})) \rightarrow \bigoplus_{v \in P_f \cup P_{\text{real}}} H^1(\mathcal{O}_{K_v}, J(\bar{K})))$$

と定義する。ここに J は K 上の代教曲線 $X \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ の Jacobian variety. 予想は $\text{III}(X/\mathcal{O}_K)$ が有限群なることを主張する。

[S-2] においては 予想 (*) を X の函数体の Brauer 群に結びつけたように言いかえている。 K をその函数体とする。この時古典的な代教体のイデール類群の類似物が K に対して定義され \mathcal{I}_K を C_K とした時 自然な写像

$$\Phi: Br K \rightarrow (C_K \text{ の指標群})$$

が定義される。この時

(1) $\text{Ker } \Phi = Br X$

(2) $Br X$ が有限なることと Φ が全射なることは同値。

§2 局所体上の多様体の Brauer 群

以下 R を局所体 (cf §1(c)), X を R 上の proper smooth variety とする. 今 X 上の Azumaya algebra A を固定しよう.

$X_0 = \{X \text{ の 閉 点 全 体}\}$ とし $x \in X_0$ に対して

$$A(x) = A \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x) \quad (\mathcal{O}_x \text{ は } X \text{ の 構造層, } k(x) \text{ は } x \text{ の 剰余体})$$

とするとこれは $k(x)$ 上の Azumaya algebra でその $Br k(x)$ における class を $[A(x)]$ とする. $k(x)$ は R の有限次拡大だから自然に局所体の構造を持っている. よって §1(c)(2) により自然な同型 $Br k(x) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ がある. これによる $[A(x)]$ の像を $\langle A, x \rangle \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ とかく. 次に X 上の 0-cycles の群を

$$Z_0(X) = \bigoplus_{x \in X_0} \mathbb{Z}$$

$$\text{とし } c \in Z_0(X) \\ c = \sum_{x \in X_0} n_x [x]$$

$$\text{に対して } \langle A, c \rangle := \sum_x n_x \langle A, x \rangle \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

とおく. 明らかにこれは A の $Br X$ における class にしか依らない.

これによる自然な pairing

$$Br X \times Z_0(X) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

を得たわけである.

定理(2-1) $c \in Z_0(X)$ が $c \sim 0$, 有理同値に zero とすると任意の $w \in Br X$ に対し $\langle w, c \rangle = 0$.

先の定理により我々は自然な pairing

$$(2-2) \quad \langle , \rangle : \text{Br} X \times \text{CH}_0(X) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

を得た。こゝに $\text{CH}_0(X) = \mathbb{Z}_0(X)/\sim$ は X 上の 0-cycles の有理同値類の群で X の 0次元 Chow 群と呼ばれるものである。

以下我々の興味は (2-2) がどの程度の完全性を持つかということにある。これは言いかえると (2-2) によつて誘導される

$$(2-3) \quad \text{Br} X \rightarrow \text{CH}_0(X)^\vee := \text{Hom}(\text{CH}_0(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \quad (\text{指標群})$$

がどの程度同型に近いのか？ といふこともよい。

まず $\dim X = 0$ つまり $X = \text{Spec} k$ の場合のみれば $\text{CH}_0(X) = \mathbb{Z}$, $\text{CH}_0(X)^\vee = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ となり (2-3) は先の $\mathbb{Z}(C)(2)$ に他ならない。

次に最初の自明でない場合、 $\dim X = 1$ の時について見てみよう。この場合 $\text{CH}_0(X)$ は X のピカル群つまり X 上の因子類群 $\text{Pic} X$ に一致する。 $J = \text{Jac}(X)$ を X の Jacobian variety とし $J(k)$ をその k -有理点全体の友群とするとよく知られているように完全系列

$$0 \rightarrow J(k) \rightarrow \text{Pic} X \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z}$$

が存在する。 $J(k)$ は k の p -adic topology より誘導される位相によりコンパクト位相群になる。よつて $\text{Pic} X$ には $J(k)$ を open

(こゝの群構造と compatible な位相が unique に定まり) これにより $\text{Pic} X$ が局所コンパクト群になる。

定理(2-4) (2-2)は自然な同型

$$\text{Br } X \simeq \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{CH}_0(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

を誘導する。ここに Hom_{cont} は上で与えた位相に對し連続な指標全体を表わす。

上の定理は Lichtenbaum ([L]) によつて p -part と素因子 part に制限して示された。 p -part に對する制限の理由は (2-4) が次の同じ制限の下において示されている Tate の定理 ([T-2]) に帰着されて示されていることによるものである。

定理(2-5) R を局所体, A を R 上のアーベル多様体, B を R の双対 Abel 多様体とする。この時自然な同型

$$W_C(B/R) \simeq \text{Hom}_{\text{cont}}(A(\bar{R}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

が存在する。ここに $W_C(B/R)$ は B/R 上の主等質空間の同型類, $A(\bar{R})$ は A の \bar{R} -有理点全体で \bar{R} の p -adic topology より導かれるコンパクトなトポロジーが与えられている。

上の同型は

$$A(\bar{R}) = H^0(\bar{R}, A(\bar{R}))$$

$$B = \text{Ext}^1(A, \mathbb{G}_m)$$

$$W_C(B/R) = H^1(\bar{R}, B(\bar{R}))$$

より準同型より導かれる自然な pairing

$$H^0(\bar{R}, A(\bar{R})) \times H^1(\bar{R}, B(\bar{R})) \rightarrow H^2(\bar{R}, \mathbb{G}_m) = \text{Br } \bar{R} \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

から導かれるものである。(2-5)の証明に對しては, Tate による

局所体のガロアコホモロジーの双対定理 ([Se-2] §5) が本質的な役割を果たす。

次に (2-4) の高次元化を考えてみよう。Lichtenbaum - Tate の手法をそのまま適用しようとして突き当たる問題点は $CH_0(X)$ は $\dim X > 1$ の場合一般には多様体の \mathbb{A}^1 -有理点としては表わせないという事である。よって (2-2) は先の様に \mathbb{A}^1 のガロアコホモロジーに関する双対定理に結びつかない。そこで別の観点からのアプローチが必要となる。[S-3] では (2-4) の別証明が与えられている。そのひとつの利点はそれが p -part を含めたものである事、よって (2-5) の p -part も含めた別証をも与える事である。さらにもうひとつの利点はそれが高次元化に通用するものであることである。以下その概略を説明する。

\mathcal{O} を \mathbb{A}^1 の整数環, m をその極大イデアル, $F = \mathcal{O}/m$ とおく。
 X の \mathcal{O} 上の regular model \mathcal{X} をひとつ固定する。定義により \mathcal{X} は \mathcal{O} 上 proper flat な regular scheme で $\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{O}} F \simeq X$ なるものとする。
 この時 $CH_0(X)$ の部分群の下降列

$$CH_0(X) = U^0 CH_0(X) \supset U^1 CH_0(X) \supset \cdots \supset U^v CH_0(X) \supset U^{v+1} CH_0(X) \supset \cdots$$

が定義される。正確な定義については代数的 K -理論を駆使した technical なものなのでここでは省略するが、イテラティブ的には $U^v CH_0(X)$ を "modulo m^v (して trivial となる 0-cycle classes)" として

なる部分群として考えられよう。特に $\dim X = 1$ の場合 $\text{CH}_0(X)$ の部分群 Γ が先に説明した \mathbb{Z} の p -adic topology より誘導される $\text{CH}_0(X)$ の位相に因り open なる事と十分大なる ν に対し $U^\nu \text{CH}_0(X)$ を含む事は同値である。

補題 $w \in \text{Br } X$ に対し十分大なる ν をとれば

$$\langle w, c \rangle = 0 \quad \text{for } \forall c \in U^\nu \text{CH}_0(X).$$

上の補題を言い換えれば

系(2-6) 写像(2-3)は

$$\overline{\Phi}_X: \text{Br } X \rightarrow \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{CH}_0(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

を誘導する。こゝに右辺は指標 $\chi: \text{CH}_0(X) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ で十分大なる ν に対し $\chi(U^\nu \text{CH}_0(X)) = 0$ なるものの全体を表わす。

さて(2-4)の高次元版として我々は次の予想を提出しよう。

予想(2-7) $\overline{\Phi}_X$ は全射。

この予想に対しこれまで得られた結果を述べよう。

定理(2-8) $\dim X = 1$ ならば(2-7)は正しい。

先に注意(1)程にこれは(2-4)と(2-5)の p -part を含めた別証明を与えている。

定理(2-9) $\dim X = 2$ とする。

- (1) $\chi \in \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{CH}_0(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の位数が $\text{ch}(F)$ と素ならば $\overline{\Phi}_X$ の像に入る。
- (2) X が good reduction を持つならば $\overline{\Phi}_X$ は全射

以下上の定理の証明の Key Idea を説明してこの小論を終える事にしよう。 $\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}$ を先の通りとし $Y = \mathcal{O}_X \otimes F$ とおく

$$\begin{array}{ccccc} X & \hookrightarrow & \mathcal{O}_X & \twoheadrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } R & \hookrightarrow & \text{Spec } \mathcal{O} & \twoheadrightarrow & \text{Spec } F \end{array}$$

今 $\dim X = n$ とし $p = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ を Y の (スキーム論的) 点の列で次を満たすものとする。

y_0 は Y の閉点

y_1 は y_0 を含む Y の既約部分内スキームで次元 1 なるもの生成点

⋮

y_n は y_{n-1} を含む Y の既約部分内スキームで次元 n なるもの生成点

$P(Y)$ を上の様な p 全体としよう。 K を X の函数体とし (E 時各 $p \in P(Y)$ に対し “ K の p に沿った hensel 局所化 K_p ” なるものが定義され、 K_p は $(n+1)$ 次元局所体 (cf. §1(F)) の有限個の積となっている。(cf. [K-S, §5]) よって §1(F) によって自然な pairing

$$(2-10) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_p : \text{Br } K_p \times K_n^M(K_p) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

が存在する。(有限個の体の積の Br や K_n^M は各 component の体の Br , K_n^M の積として定義する。) 一方 2 つの写像

$$(2-11) \quad \text{Br } X \rightarrow \prod_{p \in P(Y)} \text{Br } K_p$$

$$(2-12) \quad \varinjlim_V \text{CH}_0(X)/\mathcal{O}_V^* \text{CH}_0(X) \leftarrow \prod_{p \in P(Y)} K_n^M(K_p)$$

が構成される。(2-11)については Br なる functor の自然なものである。(2-12)は代数的 K-理論的手法によるものである。しかも (2-11) を 2 つの pairing (2-2) と (2-10) に肉し双対に移したものが (2-12) になっている。そこで問題は (2-11) の像の双対を $\prod_{\text{pecy}} K_n^M(K_F)$ の中で記述する事に帰着され、実際 (2-8) と (2-9) の条件の下でこれが遂行されるのである。

REFERENCES

- [L] S. Lichtenbaum, *Duality theorems for curves over p-adic fields*, Invent. Math. 7 (1969), 120-136.
- [M] J. Milne, *On a conjecture of Artin and Tate*, Annals of Math. 102 (1975), 517-533.
- [G] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer I, II et III*, in Dix Exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam.
- [K] K. Kato A generalization of local class field theory by using K-groups I, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo Sec. IA 26 (1979), 303-376; II, ibid 27 (1980), 603-683; III, ibid 29 (1982), 31-43.
- [Se] J.-P. Serre, "Corps Locaux," Hermann, Paris, 1962.
- [Se-2] J.-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne*, Lecture Notes in Math. 5 (1965), Springer-Verlag.
- [T] J. Tate, *On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog*, in Dix Exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam.
- [T-2] J. Tate, *WC-groups over p-adic fields*, Séminaire Bourbaki 10 (1957/1958).
- [K-S] K. Kato and S. Saito, *Global class field theory of arithmetic schemes*, Contemporary Math. 55 I (1986), 255-331.
- [S-1] S. Saito, *Some observations on motivic cohomologies of arithmetic schemes*, Invent. Math. 98 (1989), 371-404.
- [S-2] S. Saito, *Arithmetic theory on an arithmetic surface*, Annals of Math. 129 (1989).
- [S-3] S. Saito, *Arithmetic on two dimensional local rings*, Invent. Math. 85 (1986), 379-414..