数理解析研究所講究録
721巻 1990年 184-201

Mordell予想の高次元化 (Faltingsの定理の紹介)

都立大理　　辻　元

§1 序論

最近の数論には、代数幾何学的手法が広く取り入れられ数論的幾何学 (arithmetic geometry) と呼ばれる分野を形成している。ここで紹介する定理も古典的 Diophantine approximation を数論的幾何学に書き直すことによって得られる。定理は次の様に述べられる。

定理 1.1 (Faltings) K: $\mathbb{Q}$の有限次拡大

A: abelian variety $/K$

X: subvariety of A/K で A の nontrivial abelian subvariety を含まないもの

このとき、X の K-有理点 $X(K)$ は有限集合である。□

この定理は同じくFaltingsによる Mordell予想の解の高次元の場合への一つの拡張を与えている。即ち、次の系が得られる。

系 1.1 (Faltings) K: $\mathbb{Q}$の有限次拡大.
C: projective nonsingular curve $/K$. $g(C) \geqq 2$
このとき $\# C(K) < \infty$ $\square$

§2. Arakelov 交叉理論

K: $\mathbb{Q}$の有限次拡大
$S := \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$
$\pi : \mathfrak{X} \longrightarrow S$: regular curve $/S$
$S_{\inf}$: Sの無限素点．とおく。
定義 2.1. $\mathfrak{X}$の Arakelov divisor とは．次のような formal sum のことである:

$$D = D_{\mathrm{fin}} + D_{\inf} = \sum k_i C_i + \sum_{\infty \in S_{\inf}} \lambda_\infty F_\infty$$

ここで和は有限和で
$k_i \in \mathbb{Z}$, C_i: $\mathfrak{X}$上の既約かつ被約な因子
F_∞: $\mathfrak{X}$の ∞での formal な fibre,
$\lambda_\infty \in \mathbb{R}$である。 $\square$

$\operatorname{Div}(\mathfrak{X})'$で $\mathfrak{X}$の Arakelov divisor の全体を表わす。 $\operatorname{Div}(\mathfrak{X})'$には．通常の交叉理論と類似の方法で．linear equivalence が定義される． それを見よう。 各．$\mathfrak{X}_\infty := X(\overline{K}_\infty)$ ($\overline{K}_\infty \cong \mathbb{C}$) は．Riemann面とな

るが．この上に全体積が1となるような．hermitian metric ds_∞^2を定め．その volume form を $d\mu_\infty$で表わす。$\mathfrak{X}_\infty$が．種数1以上なら $\omega_1 \ldots \omega_g \in H^0(\mathfrak{X}_\infty, \Omega^1_{\mathfrak{X}_\infty})$ を $(g = g(\mathfrak{X}_\infty))$

$$\int_{\mathfrak{X}_\infty} \omega_i \wedge \overline{\omega_j} = \delta_{ij}$$

となる様にとり．$d\mu_\infty = \frac{\sqrt{-1}}{g}\sum_{i=1}^{g} \omega_i \wedge \overline{\omega_i}$ とおくのが普通のとり方で．この様にして定まる $\mathfrak{X}_\infty$上の hermitian metric を Jacobian metric と呼ぶ。

さて $\mathrm{Div}(\mathfrak{X})'$に linear equivalence を定義するには．$\mathfrak{X}$上の有理関数の定める Arakelov divisor を定義すればよい。$f \in K(\mathfrak{X})^\times$の Arakelov divisor を

$$(f) = (f)_{fin} + \sum_{\infty \in S_{inf}} v_\infty(f) F_\infty$$

$(f)_{fin}$：fの定める$\mathfrak{X}$上の divisor

$$v_\infty(f) = \int_{\mathfrak{X}_\infty} -\log |f|_\infty \, d\mu_\infty$$

で定める。$D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(\mathfrak{X})$が linearly equivalent であるとは．$\exists f \in K(\mathfrak{X})^\times$が存在して

$$D_1 - D_2 = (f)$$

となることを言う。さて

$$\mathrm{Div}(\mathfrak{X}) = \mathrm{Div}(\mathfrak{X})'/\sim \quad (\sim \text{ linear equivalence})$$

とおく。 Arakelovは $\mathrm{Div}(\mathfrak{X})$の交叉理論を定義することに成功した。 $\mathfrak{X}$はcompleteでないから$\mathfrak{X}$の上(=有限素点の上)だけの情報からは交叉理論は作れない。無限素点の上の情報をうまく取り入れることが必要である。この際のkeyは次の2つである。

(1) Artin-Whaples' product formula.

(2) Riemann面上のGreen関数の存在とその性質。

D_1, D_2を既約かつ被約なArakelov divisorで相異なるものとして、D_1とD_2の交叉数$[D_1, D_2]$を定義しよう。次の4つの場合に分けて定義する。

Case 1. D_1, D_2: 共にvertical i.e. $\pi(D_i) \subsetneqq S$ (or $\pi(D_i) = \phi$) $(i = 1, 2)$の場合。

$$[D_1, D_2] := 0$$

Case 2. D_1: horizontal (i.e. $\pi(D_1) = S$)

D_2: vertical finite (i.e. $\phi \neq \pi(D_2) \subsetneqq S$)

の場合。

$$[D_1, D_2] := m \quad (m = \deg(\pi|D_1 : D_1 \longrightarrow S))$$

Case 3. D_1: horizontal

D_2: vertical infinite (i.e. $\pi(D_2) = \phi$)

の場合。 $D_2 = F_\infty$として

$$[D_1, D_2] := e_\infty m$$

$e_\infty := [K_\infty, \mathbb{R}] \ (= 1 \text{ or } 2)$

$m = \deg(\pi|D_1 : D_1 \to S)$。

Case 4. D_1, D_2 : 共に horizontal の場合.

$[D_1, D_2] := [D_1, D_2]_{fin} + [D_1, D_2]_{inf}$

$[D_1, D_2] := \sum \log \#(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P}/(f_{1,P}, f_{2,P}))$

$f_{1,P}, f_{2,P}$: local defining eq. of D_1, D_2 around P

ここで和は $D_1 \cap D_2$ に含まれる closed point P 全てにわたる。

$$[D_1, D_2]_{inf} := \sum_{\infty \in S_{inf}} e_\infty \sum_{j,k} - G_\infty(P_{1j}^\infty, P_{2k}^\infty)$$

G_∞ : $\mathfrak{X}_\infty$ 上の metric ds_∞^2 に関する Green 関数

$\{P_{1,j}^\infty\}$ $\{P_{2,k}^\infty\}$: D_1, D_2 が各々定める $\mathfrak{X}_\infty$ 上の点。

G_∞ は次の性質を持つ。 (0) $\exp G_\infty \in C^\infty(\mathfrak{X}_\infty \times \mathfrak{X}_\infty)$,

(1) $G_\infty(P, Q) = G_\infty(Q, P)$,

(2) $\dfrac{1}{\pi\sqrt{-1}} \partial\bar{\partial} G_\infty(P, z) = d\mu_\infty \quad (z \neq P)$,

(3) $\displaystyle\int_{\mathfrak{X}_\infty} G_\infty(P, z)\, d\mu_\infty(z) = 0$ 。

以上のように定義した [,] は Green 関数の対称性から $[D_1, D_2] = [D_2, D_1]$ を満たす。

定理 2.4 (Arakelov) [,] は $\mathrm{Div}(\mathfrak{X})$ 上に symmetric-bilinear formを定める. □

定理2.1は Artin-Whaple's product formula:

$$\prod_v \|x\|_v = 1 \qquad (x \in K^\times)$$

(ここで積は全てのKのvaluation (places)をわたり.

$\|x\|_v = |x|_v^{[K_v, \mathbb{Q}_v]}$, $v | p \Rightarrow |p|_v = 1/p$)

とStokesの定理から容易に導くことができる。

最近 Gillet-Soule により. Arakelov交叉理論は高次元のregular Arithmetic variety に拡張された。この際. 通常のChow環の代りにChow環にGreen's current という無限素点での情報を付け加えた環 $\widehat{CH}$ を定義して理論が展開されている。 定理1.1の証明には. この一般化されたArakelov交叉理論が使われる。 しかし証明には. 一般化された交叉理論の深い性質は必要ないので解説は省略する。

§3. height theory, Neron-Tate height pairing

定理1.1で何故Xが Abelian variety の subvarietyでなければならないかというのは. abelian variety上の Neron-Tate height pairing の性質が証明の上で. 極めて本質的に使われているからである.

K : $\mathbb{Q}$ の有限次代数拡大

$P \in \mathbb{P}^n(K)$, $P = [x_0 : \dots : x_n]$ $(x_i \in K)$ とする時．Pの height を

$$H_K(P) = \prod_v \max\{\|x_0\|_v, \dots, \|x_n\|_v\}$$

で定義する．ここで積は Kの全ての素点をわたる。前述の Artin-Whaple の積公式から H_K は well-defined である。

$$h_K(P) = \log H_K(P)$$

を logarithmic height という。

さて，一般のK上の projective variety X と X上の invertible sheaf $\mathcal{L}$ に対して $X(\overline{\mathbb{Q}})$ 上の log-height $h_{\mathcal{L}}$ を定義しよう。まず L を Kの有限次拡大とすると

$$h_L = [L:K]\, h_K$$

となっていることはすぐにわかるので

$$h(P) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} h_K(P)$$

とおくと $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ 上の関数が得られる。これを absolute log-height という。$h_{\mathcal{L}}$ を定義するには．次のようにすればよい。

Case 1　$\mathcal{L}$ が very ample の場合

linear system $|\mathcal{L}|$ の定める XのK上の埋め込み $\varphi: X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ を1つとる.

$$h_{\mathcal{L}} := \varphi^* h$$

とおく。この定義は φ のとり方に依存しているので well-defined ではない。そこで次の様にする。

<u>Def</u> $\mathcal{H}(X) = \{\text{functions} : X(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{R}\}/\sim$

ここで $f, g : X(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{R}$ について

$$f \sim g \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f - g = O(1) \qquad \square$$

この定義を用いると(nontrivial な議論により)、$h_{\mathcal{L}}$ は $\mathcal{H}(X)$ の中に一意的に定まることがわかる。即ち 2つの $|\mathcal{L}|$ に付随する埋め込み $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$, $\psi : X \longrightarrow \mathbb{P}^m$ について

$$\varphi^* h = \psi^* h + O(1)$$

となる。

<u>Case 2.</u> 一般の $\mathcal{L}$ について.

$\mathcal{L}, \mathcal{M}$ を X 上の 2つの very ample invertible sheaf とすると

$$h_{\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}} = h_{\mathcal{L}} + h_{\mathcal{M}} \quad (\text{in } \mathcal{H}(X))$$

が成り立つ。

$\mathcal{L}$ を X の任意の invertible sheaf とすると 2つの very ample invertible sheaf $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ を用いて $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2^{-1}$ と書けるので

$$h_{\mathcal{L}} := h_{\mathcal{L}_1} - h_{\mathcal{L}_2} \quad (\text{in } \mathcal{H}(X))$$

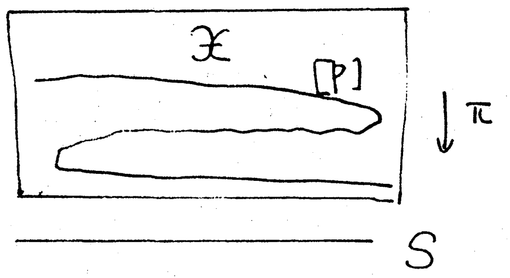
とおけばよい。次の事実は古典的である。

<u>Fact</u>. $C \in \mathbb{R}$ を fix すると $\mathcal{L}$ が ample なら

$\{P \in X(K) \mid h_{\mathcal{L}}(P) \leqq C\}$ は有限集合 □

証明は容易である。

さて．前節の Arakelov 交叉理論との関係を述べよう。今．$\pi : \mathfrak{X} \longrightarrow S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ を regular arithmetic variety．$\mathcal{L}$ を $\mathfrak{X}$ 上の invertible sheaf とする。各 $\infty \in S_{\inf}$ について $\mathfrak{X}_\infty = \mathfrak{X}(\mathbb{K}_\infty)$ 上の $\mathcal{L}$ の hermitian metric を定める。metric の定め方は．必ずしも canonical でないが．一つ定めると．Gillet－Soule の $\widehat{CH}$ の元として Arakelov－divisor D が定まる．今 $P \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ とすると P は $\pi : \mathfrak{X} \longrightarrow S$ の multi section を定める．その image を $[P]$ で表わす．



この時．次が成り立つ。

定理 3.4. $h_{\mathcal{L}}(P) = \mathcal{L} \cdot [P] := D \cdot [P]$

in $\mathcal{H}(X)$ □

次に Abelian variety 上の height function の性質を見よう。次の定理はよく知られている。

定理 3.2 (Neron-Tate)

A : Abelian variety $/\overline{\mathbb{Q}}$

$\mathcal{L}$: invertible sheaf on A

$\Rightarrow$ (a) $\exists_1\, \hat{h}_{\mathcal{L}} : A(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{R}$ s.t

(i) $\langle P, Q \rangle := \hat{h}_{\mathcal{L}}(P+Q) - \hat{h}_{\mathcal{L}}(P) - \hat{h}_{\mathcal{L}}(Q)$

symmetric bilinear

(ii) $\hat{h}_{\mathcal{L}} = h_{\mathcal{L}}$ in $\mathcal{H}(A)$

(b) $\mathcal{L}$: ample symmetric

$\Rightarrow$ (i) $\hat{h}_{\mathcal{L}} \geq 0$

(ii) $\hat{h}_{\mathcal{L}}(P) = 0 \iff P$: torsion point

(iii) $\hat{h}_{\mathcal{L}}$: positive definite on

$A(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{R}$ □

$\langle\ ,\ \rangle$ を Neron-Tate height pairing という。

さて、この Neron-Tate height pairing と Arakelov intersection theory との関係を述べよう

これは簡単で A も $\mathcal{L}$ も代数体 K 上定義されているとし

$$s_a : A \times A \longrightarrow A$$

を $s_a(P, Q) = P + Q$ で定め

$$\delta = s_a^*\mathcal{L} - pr_1^*\mathcal{L} - pr_2^*\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(A \times A)$$

とおくと　$P, Q \in A(K)$ に対し

$$\langle P, Q \rangle = \delta \cdot [(P, Q)] \quad \text{in } \mathcal{H}(A \times A)$$

となる。　ここで $[(P, Q)]$ は $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ 上の A の Neron model $\mathcal{A}$ の適当なコンパクト化の section である。

§4. Faltings の定理の証明の概略

定理 1.1 は方法論的には、古典的 Diophantine approximation の定理、例えば、Roth の定理や、整数点に関する Siegel の定理等と殆んど変わらない。Auxiliary polynomial の方法を使って証明される。　しかし、P. Vojta による Diophantine approximation の Arakelov 交叉理論による幾何への翻訳への idea が随所で使われ、特に後で述べる "vanishing part" では、P. Vojta の観察が本質的に使われている。

証明は 3つの Step に分解される。

Step 1. Ample divisor の構成

A, X を定理 1.1 のものとする。

m を正整数 ≥ 2 として

$$\alpha_m : X^m \longrightarrow A^{m-1} \text{ を}$$

$\alpha_m(x_1, \ldots, x_m) = (2x_1 - x_2, 2x_2 - x_3, \ldots, 2x_{m-1} - x_m)$

で定める。このとき X が A の nontrivial abelian subvariety を含まないという仮定から簡単に十分大きな m に対し α_m はその image への finite morphism となることがわかる。m をそのように fix しよう。

さて A^m 上の $\mathbb{Q}$-line bundle を次のように定義する。

$$\mathcal{L}(-\varepsilon, s_1, \ldots, s_m) = -\varepsilon \sum s_i^2 pr_i^*(\mathcal{L}) + \sum (s_i x_i - s_{i+1} x_{i+1})^*(\mathcal{L})$$

ここで

$\mathcal{L}$: A 上の ample symmetric line bdle

$s_1 \ldots s_m \in \mathbb{Q}^+$

$\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$

である。$\varepsilon = 0$ $s_i = 2^{m-i}$ とおくと α_m の有限性から $\mathcal{L}(0, s_1 \ldots s_n)$ は ample on X^m であることに注意する。従って $\exists \varepsilon_0 > 0$ を適当にとれば $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ なる限り

$$\mathcal{L}(-\varepsilon; s_1 \ldots s_m)^{\dim X^m} \cdot X^m > 0$$

となることがわかる。ところが、次の定理が成り立つ。

定理4.1 (Faltings) $\exists s > 0$ s.t.

$\varepsilon < \varepsilon_0$ $s_1/s_2 \geqq s, \ldots s_{m-1}/s_m \geqq s$

$\Longrightarrow \mathcal{L}(-\varepsilon, s_1, \ldots, s_m)$ ample on X^m □

この定理の証明は Faltings の独創的 idea が用いられ大変興味深い。しかし、それは主に技術的なものであって定理4.4の証明の本質ではないと思われるので解説は省略する。$\mathcal{L}(-\varepsilon, s_1, \ldots, s_m)$ が、なぜこのように定義されるのかは、、Stepで明らかになる。

Step 2. nonvanishing

今 $d > 0$ とし $f \in \Gamma(X^m, \mathcal{L}(-\varepsilon, s_1, \ldots, s_m)^{\otimes d})$ をとる。$d_i = 4s_i^2 d$ として $x \in X^m$ での f の index $i(x, f)$ を

$$i(x, f) = \max\{\sigma \in \mathbb{Q} \mid D_1 \cdots D_m(f)(x) = 0$$
$$\text{if} \quad j_1/d_1 + \cdots + j_m/d_m < \sigma$$
$$D_i : \text{local dif. operator of order } j_i \text{ on}$$
$$i\text{-th factor around } x_i \}$$

で定義する。index は $f \neq 0$ なら有限で、f の x での重みつきの vanishing order である。

A^m の Spec $\mathcal{O}_K$ 上の Neron model $\mathcal{A}^m$ の適当なコンパクト化 B をとり $\mathcal{L}(-\varepsilon, s_1, \ldots, s_m)$ が B 上の line bundle に拡張しているものとする。X^m の B での closure を $\mathfrak{X}$ とおく。このとき、次が

成り立つ。

定理4.2(Faltings)

$x \doteq (x_1, \ldots, x_m) \in X^m_{reg}$

$0 < \sigma < \varepsilon < \varepsilon_0$, $s_i/s_{i+1} \gg 0$

$\Longrightarrow$ 十分大きな $d > 0$ に対して

$\exists f \in \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{L}(\sigma-\varepsilon, s_1, \ldots, s_m)^{\otimes d})$, $c = c(\sigma, \varepsilon)$

が存在し

$\mathrm{ind}(f, x) < \sigma$

$\| f \|_\infty < \exp(c \cdot \sum d_i)$ ($\forall \infty$; Kの infinite place)

が成り立つ。但しここで $\| \ \|_\infty$ は $\mathcal{L}$の hermitian metric から誘導される $\mathcal{L}(\sigma-\varepsilon, s_1 \ldots s_m)^{\otimes d}$ の hermitian metric に関する L^2-ノルムである。 □

この定理の証明は次の2つの事実から従う

(1) $\Gamma(X^m, \mathcal{L}(\sigma-\varepsilon, s_1 \ldots s_m)^{\otimes d})$ の subspace

$V = \{ f \in \Gamma(X^m, \mathcal{L}(\sigma-\varepsilon, s_1 \ldots s_m)^{\otimes d} \mid \mathrm{ind}(f\, x) \geq \sigma \}$

が $\mathrm{codim}\, V \geq \mathrm{const}(\prod d_i^{\dim_K X_K})$ を満たす

(2) $\Gamma(X^m, \mathcal{L}(\sigma-\varepsilon; s_1 \ldots s_m)^{\otimes d})$ の lattice

$\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{L}(\sigma-\varepsilon\, s_1 \ldots s_m)^{\otimes d})$ の基本領域の $\| \ \|_\infty$ に対する体積が $< \exp(c \sum d_i)$ をみたすこと.

この2つの事実と Siegel の補題 (Dirichlet の box principle) から定理4.2が従う。

Step. 3. vanishing (主に P. Vojta の idea による).

この部分が証明の核心である.

$\# X(K) = \infty$ と仮定する。 $X \subset \mathbb{P}^n$ とし($\mathcal{L}$で埋め込む)

各 i について K 上の projection $(1 \leqq i \leqq m)$

$$\pi_i : X \longrightarrow P_i = \mathbb{P}^{\dim X}$$

を上手くとって.

$$\deg(Y_i) < \operatorname{codim} X \cdot \deg(X)$$

なる hypersurface Y_i で I_Y (Y の ideal) が.

Ω_{X/P_i} を annihilate するものが存在するようにできる。

この部分は簡単な代数幾何的考察でできる.

$\dim X$ に関する帰納法から $\bigcup_{i=1}^{m} Y_i$ の外に $X(K)$ の元が無限個あるとしてよい。

ε, s を定理 4.1 のようにとる.

$x_1, \ldots, x_m \in X(K)$ を次のようにとる。ここで

$h_i = h_{\mathcal{L}}(x_i)$ とする

i) $h_1 \gg 0$

ii) $h_2/h_1, h_3/h_2, \ldots, h_m/h_{m-1} > s^2$

iii) $\langle x_i, x_{i+1} \rangle \geqq (1 - \varepsilon/2) \| x_i \| \| x_{i+1} \|$

iv) $x_i \notin Y_i$

このような $x_1 \ldots x_m$ は仮定から必ず存在する.

このとき $x = (x_1 \ldots x_m)$ とおき.

s_i を $h_i^{-1/2}$ に非常に近くとると.

$$\mathcal{L}(\sigma-\varepsilon, s_1, \ldots, s_m)^{\otimes d}[X] \leqq d(\sigma-\varepsilon/2)\cdot m + \mathrm{const}\sum d_i$$

となることが単純計算でわかる。右辺第2項は大さ d/h_1 位の大きさ(この部分は Arakelov intersection と Neron-Tate height pairing の誤差からくる)なので h_1 を十分大きくとっておけば $\sigma < \varepsilon/2$ でさえあれば

$$\mathcal{L}(\sigma-\varepsilon, s_1 \ldots s_m)^{\otimes d}[X] < 0$$

となる。f を定理4.2のような $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}(\sigma-\varepsilon\ s_1 \ldots s_m)^{\otimes d})$ の元とする。$[X]$ と f の定める Arakelov divisorは

$$(f)\cdot[X] \leqq d(\sigma-\varepsilon/2)m + \mathrm{const}\sum d_i < 0$$

を満たすが $(f)\cdot[X]$ を有限素点から来る部分と無限素点の部分から来る部分に分解して

$$(f)[X] = [(f)\cdot[X]]_{fin} + [(f)\cdot[X]]_{inf}$$

と書くと、f の無限素点のノルムの評価から

$$[(f)\cdot[X]]_{inf} \geqq -c\sum d_i$$

となるので

$$[(f)\cdot[X]]_{fin} < 0$$

となり.

$$f(X) = 0$$

となる。

さて σ を適当にとって

$$\mathrm{ind}(x, \mathfrak{F}) \geq \sigma$$

となれば、矛盾（$\mathfrak{F}$の選び方参照）を得て証明は終る。
この為に D_i を π_i によって $P_i = \mathbb{P}^{\dim X}$ 上の regular multi vector field を引き戻して得られる meromorphic differential operator として

$$D_1 \cdots D_m \mathfrak{F}(X) = 0$$

を見て $\mathrm{ind}(x, \mathfrak{F})$ を下から評価すればよい。
これも基本的には $\mathfrak{F}(x) = 0$ を見るのと変わらないが、
D_i が meromorphic なので $D_1 \cdots D_m \mathfrak{F}$ は
$\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{L}(\sigma-\varepsilon, s_1, \cdots s_m)^{\otimes d})$ には入らず、
$\mathcal{L}_i = pr_i^* \mathcal{L}$ として

$$D_1 \cdots D_m \mathfrak{F} \in \Gamma(X^m, \mathcal{L}(\sigma-\varepsilon, s_1, \cdots s_m)^{\otimes d} \otimes \mathcal{L}_i^{a_i})$$

（a_iは $\deg Y_i$ と D_i による正整数）
となる。 $\mathrm{ind}(x, \mathfrak{F}) \geq \sigma$ は、σ を十分小さくとり
$D_1 \cdots D_m \mathfrak{F}$ が integral section となるように
整数をかける等して工夫すれば得られる。ここでは
詳細は省略する。

§5 まとめ

以上のように Mordell 予想の解だけでなく、その一般化さえ Arakelov 交叉理論により、完全に幾何学になり

難かしい道具を全く使わずに証明される。Rothの定理のような難かしいDiophantine approximationの古典的大結果もArakelov交叉理論をもって解釈し直すことによりここで述べたFaltingsの定理と全く同じ手続きにより証明されていることがわかる。このように数論の難しい問題も幾何学的に捉え直すと簡単に解ける場合がある。今の所、Arakelov交叉理論がそのような翻訳の主要な道具であるが、将来はさらに新たな道具が期待できると思われる。

参考文献

G. Faltings, Diophantine Approximation on Abelian Varieties preprint