数理解析研究所講究録
721巻 1990年 117-130

$\mathbb{Z}_p$上の測度のΓ-変換のλ-invariantについて。

名大理　佐藤　潤也 (Junya Satoh)

虚abel体の岩澤-invariantを考察する時、Γ-変換の理論は有効である。　Sinnott は、[4]でμ-invariantに対しその理論を応用し、Ferrero-Washington の定理の新証明を与えた。　本稿では、λ-invariantに対しSinnott流の解析を行い応用として、Hurwitz型のλ-invariantに関する関係式（木田の公式[1], [2]）の初等的な証明を与える。

主も本質的な部分は、Γ-変換のλ-invariantを$\mathbb{Z}_p$上の測度のλ-invariantに帰着させる所であるが、それに関して最初のかつ本質的に最終の結果は、木田の[3]である。　本稿では、第一部で[3]を少々一般化し、更に、より簡易化された証明を与える。　第二部ではその応用としてabel の場合の木田の公式を導く。

‖第一部(一般論).‖

pを素数とし、$\mathbb{Q}_p$上有限次拡大体の整数環$\mathcal{O}$の素idealを$\mathfrak{P}$で表わす。　またで$\mathbb{Z}_p$上の$\mathcal{O}$-valuedの測度αに対応する巾級数のn次の係数をα_n $(n \geq 0)$で表わす。この時、木田は[3]で次を示している。

<u>定理1</u>　$\lambda_p(\alpha \circ \varphi) = \frac{1}{q} \lambda_p(\alpha|_{1+q\mathbb{Z}_p})$

但し・$\varphi : \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} 1+q\mathbb{Z}_p \ ; \ x \longmapsto \kappa^x$

・$q = \begin{cases} p & (p \neq 2) \\ 4 & (p = 2) \end{cases}$, $\kappa = e^q$

・測度$\alpha \circ \varphi$ 及び $\alpha|_{1+q\mathbb{Z}_p}$は次で定義する:

$\forall O \subset \mathbb{Z}_p$ compact open set に対し

$$\begin{cases} \alpha \circ \varphi(O) = \alpha(\varphi(O)) \\ \alpha|_{1+q\mathbb{Z}_p}(O) = \alpha(1+q\mathbb{Z}_p \cap O) \end{cases}$$

・測度のλ-invariantとは、対応する巾級数のλ-invariantのことである。(μも同様)

注)　・p-進L関数の岩澤-invariantを考察するには、$\kappa = e^q$の場合で十分である。

・Childressは、[5]でκを任意として、更に別の強い仮定の下で定理1を示している。

・本稿では、κを任意として、定理1の簡易化された証明を与える。

(証明) $\mu_p(\alpha\circ\varphi)=\mu_p(\alpha|_{1+q\mathbb{Z}_p})$ であるから、
$\mu_p(\alpha|_{1+q\mathbb{Z}_p})=0$ として一般性を失わない。 測度と対応する巾級数の基本関係により、$n\geq 0$ に対して

$$(\alpha|_{1+q\mathbb{Z}_p})_n=\int_{1+q\mathbb{Z}_p}\binom{x}{n}d\alpha(x)$$
$$=\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{\kappa^x}{n}d\alpha\circ\varphi(x) .$$

ここで $^\forall x\in\mathbb{Z}_p$ に対して、

$$\binom{\kappa^x}{n}\equiv\binom{1}{n_0}\binom{\frac{\kappa^x-1}{q}}{n_1} \mod p$$

但し, $n=n_0+qn_1$ s.t. $0\leq n_0\leq q-1$
であるから、$\lambda_p(\alpha|_{1+q\mathbb{Z}_p})$ を考察するには、
$(\alpha|_{1+q\mathbb{Z}_p})_{qn}$ $(n\geq 0)$ を考察すれば十分である。

$$\therefore\ (\alpha|_{1+q\mathbb{Z}_p})_{qn}\equiv\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{\frac{\kappa^x-1}{q}}{n}d\alpha\circ\varphi(x) \mod p .$$

Mahler の定理により

$$f(x):=\binom{\frac{\kappa^x-1}{q}}{n}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\underbrace{\left\{\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^{\ell-k}\binom{\ell}{k}\binom{\frac{\kappa^k-1}{q}}{n}\right\}}_{=:I_{n,\ell}}\binom{x}{\ell}$$

と展開すれば、

$$(\alpha|_{1+q\mathbb{Z}_p})_{qn}\equiv\sum_{\ell=0}^{\infty}I_{n,\ell}\,(\alpha\circ\varphi)_\ell \mod p$$

よって、定理を示すには、

$$I_{n,\ell}\equiv\begin{cases} p\text{-adic unit} & \mod p \quad \text{if } n=\ell \\ 0 & \quad\quad\quad\ \text{if } n<\ell\end{cases}$$

を示せば十分である。

次に、$f(x)$を巾級数展開して、

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j$$

とおけば、$I_{n,l} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \sum_{k=0}^{l} (-1)^{l-k}\binom{l}{k} k^j$

ここで、$S_2(j,l)$を、第二種のStirling数とすれば、

$$x^j = \sum_{l=0}^{j} S_2(j,l)\, l! \binom{x}{l}$$

これに反転公式を用いて、

$$S_2(j,l)\, l! = \sum_{k=0}^{l}(-1)^{l-k}\binom{l}{k}k^j$$

$$\therefore \quad I_{n,l} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j\, l!\, S_2(j,l)$$

$$= \sum_{j=l}^{\infty} f_j\, l!\, S_2(j,l)$$

また、

$$f(x)n! = \prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\kappa^x-1}{q} - i\right)$$

$$\equiv \prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\log_p \kappa}{q}x - i\right) \mod p\mathbb{Z}_p[[x]]$$

であるから、$j\ge l\ge n$に対して

$$f_j\, l! \equiv \begin{cases} p\text{-adic unit} & \\ 0 & \end{cases} \mod p \quad \begin{array}{l} \text{if } j=l=n \\ \text{if } j>n \end{array}$$

以上により

$$I_{n,l} \equiv \begin{cases} p\text{-adic unit} & \\ 0 & \end{cases} \mod p \quad \begin{array}{l} \text{if } n=l \\ \text{if } n<l \end{array}$$

(証明終了)

‖第二部(応用)‖

定理1の応用として、abelの場合の木田の公式の初等的な証明を与える。

$\mathfrak{k}$：$\mathbb{Q}$上有限次abel拡大体に対して次の記法を用いる。

$\mathfrak{k}^+$：$\mathfrak{k}$内最大実部分体

$\mathfrak{k}_\infty$：$\mathfrak{k}$のcyclotomic $\mathbb{Z}_p$拡大体

$\lambda_p^-(\mathfrak{k})$：$\mathfrak{k}_\infty$の$\lambda$-invariantのminus part

$X_{\mathfrak{k}}$ ($X_{\mathfrak{k}}^-$)：$\mathfrak{k}$に対応する(odd) Dirichlet character全体

$X_{\mathfrak{k}}(l)$ ($X_{\mathfrak{k}}^-(l)$)：lを素数とする時、conductorがlで割れる$X_{\mathfrak{k}}$ ($X_{\mathfrak{k}}^-$)の元全体

$\chi_{\mathfrak{k}}$：$X_{\mathfrak{k}}$の元

$$\delta(\mathfrak{k}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathfrak{k} \ni \zeta_q \\ 0 & \text{if } \mathfrak{k} \not\ni \zeta_q \end{cases}$$

この時、木田の公式は、次のように述べられる。

<u>定理2</u>　$K \supset F$：共に$\mathbb{Q}$上有限次abel拡大。

$[K:F]$：p巾ならば、

$$\lambda_p^-(K) - \delta(K) = [K_\infty : F_\infty](\lambda_p^-(F) - \delta(F)) + \sum_{\mathfrak{l}}(e_{\mathfrak{l}} - 1) + \sum_{\mathfrak{l}_+}(e_{\mathfrak{l}_+} - 1)$$

但し$\mathfrak{l}$ ($\mathfrak{l}_+$)はp上にないK_∞ (K^+_∞)のprime ideal全体を動き、$e_{\mathfrak{l}}$ ($e_{\mathfrak{l}_+}$)はK_∞/F_∞ (K^+_∞/F^+_∞)における$\mathfrak{l}$ ($\mathfrak{l}_+$)の分岐指数を表わす。

注)
- $pq \nmid$ (Kのconductor), $p \nmid [F^+:\mathbb{Q}]$と仮定しても一般性は失われない。
- 上の仮定の下、分岐指数等の計算により、Eを

K 内最大 p 巾部分体とすれば、

$$\sum_{\mathfrak{l}}(e_{\mathfrak{l}}-1)+\sum_{\mathfrak{l}^+}(e_{\mathfrak{l}^+}-1)$$
$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\ell} p^{n_\ell-1}\,\#X_E(\ell)\,\#\{\chi_F:\mathrm{odd},\ \chi_F(\ell)=1\} & \text{若 } p\neq 2\\[2ex] \displaystyle\sum_{\ell} 2^{n_\ell-2}\{\#X_E^-(\ell)-[K:F]\,\#X_{E\cap F}^-(\ell)\}\times\#\{\chi_{F^+}:\chi_{F^+}(\ell)=1\} & \text{若 } p=2\end{cases}$$

但し ℓ は p 以外の素数全体を動き、$\mathbb{Z}_p^\times$ 内で

$\ell=\omega(\ell)(1+\ell_1p^{n_\ell})$ $((\ell_1,p)=1)$ と分解する。

(証明) $\chi_K\in X_K^-$ $\neq\omega^{-1}$ に対して $L_p(s,\chi\omega)$ を表わす岩澤の巾級数の λ-invariant を λ_χ とすれば、

$$\lambda_p^-(K)=\sum_{\chi_K:\mathrm{odd}\neq\omega^{-1}}\lambda_\chi$$

であり、後で独立に証明する補助定理を用いれば、

○ $p\neq2$ の時。

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\ F \arrow[d, dash] & E \arrow[dl, dash] \\ \mathbb{Q} & \end{tikzcd}$$

$$\lambda_p^-(K)=\sum_{\chi_F:\mathrm{odd},\ \chi_E\neq1}\lambda_{\chi_F\chi_E}+\sum_{\chi_F:\mathrm{odd}\neq\omega^{-1}}\lambda_{\chi_F}$$
$$=([K:F]-1)\lambda_p^-(F)+\delta(F)\sum_{\chi_E\neq1}\lambda_{\chi_E}$$
$$+\sum_{\ell}p^{n_\ell-1}\cdot\#X_E(\ell)\times\{\#\{\chi_F:\mathrm{odd},\ \chi_F(\ell)=1\}-\delta(F)\}$$
$$+\lambda_p^-(F)$$

$\delta(K)=\delta(F)$ であるから、

$$\therefore\ \lambda_p^-(K)-\delta(K)=[K:F](\lambda_p^-(F)-\delta(F))+\sum_{\ell}p^{n_\ell-1}\,\#X_E(\ell)\,\#\{\chi_F:\mathrm{odd},\ \chi_F(\ell)=1\}$$

○ $p=2$ の時。　初めに、$\lambda_2^-(E)$ を計算すれば、

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & K \arrow[dd, dash] \\ F^+ \arrow[ur, dash] \arrow[dd, dash] & \\ & E \\ \mathbb{Q} \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

補助定理により、

$$\lambda_2^-(E) = \sum_\ell 2^{n_\ell-2}\,\#X_E^-(\ell) - \{\#X_E^- - \delta(E)\}$$
$$= \sum_\ell 2^{n_\ell-2}\,\#X_E^-(\ell) - [K:F] + \delta(K)$$

よって、

$$\lambda_2^-(K) = \sum_{\chi_{F^+}\neq 1,\ \chi_E:\,\mathrm{odd}} \lambda_{\chi_{F^+}\chi_E} + \sum_{\chi_E:\,\mathrm{odd}\neq\omega^{-1}} \lambda_{\chi_E}$$

$$\therefore\ \lambda_2^-(K)-\delta(K) = [K:F]\Big(\sum_{\chi_{F^+}\neq 1}\lambda_{\chi_{F^+}} - 1\Big)$$
$$+ \sum_\ell 2^{n_\ell-2}\,\#X_E^-(\ell)\,\#\{\chi_{F^+} : \chi_{F^+}(\ell)=1\}$$

ここで上の等式で $K=F$ とすれば、

$$\lambda_2^-(F)-\delta(F) = \sum_{\chi_{F^+}\neq 1}\lambda_{\chi_{F^+}} - 1 + \sum_\ell 2^{n_\ell-2}\,\#X_{E\cap F}^-(\ell)$$
$$\times\,\#\{\chi_{F^+} : \chi_{F^+}(\ell)=1\}$$

以上により、

$$\lambda_2^-(K)-\delta(K) = [K:F]\,(\lambda_2^-(F)-\delta(F))$$
$$+ \sum_\ell 2^{n_\ell-2}\{\#X_E^-(\ell) - [K:F]\,\#X_{E\cap F}^-(\ell)\}$$
$$\times\,\#\{\chi_{F^+} : \chi_{F^+}(\ell)=1\}$$

(証明終了)

注) $p \nmid f$ (Kの conductor) により $[K_\infty : F_\infty] = [K:F]$。

そこで、上の議論の本質的部分である補助定理について述べよう。 $\chi\in X_K$ を一つ固定し、更に χ は次の分解をもつものとする：

$\chi = \theta\psi$　但し、ψ の order は p 巾で conductor は素数 ℓ、更に $\forall a \in \mathbb{Z}$ に対して $\theta\psi(a) = \theta(a)\psi(a)$。

次に、f を θ の conductor とした時、$\mathbb{N} \ni c > 1$ s.t. $c \equiv 1 \bmod \ell f$, $(c, \ell) = 1$ なる c を一つ固定する。

$\mathcal{O}$ として $\mathbb{Q}_p(\chi)$ の整数環をとり、

$$F_\chi(T) := \sum_{a=1}^{g} \frac{\varepsilon_\chi(a) T^a}{T^g - 1} \quad \in \mathcal{O}[[T-1]]$$

と定める。　但し、$\varepsilon_\chi(a) = \begin{cases} \chi(a) & \text{if } c \nmid a \\ (1-c)\chi(a) & \text{if } c \mid a \end{cases}$

g は ε_χ の周期の任意の倍数。

χ: odd $\neq \omega^{-1}$ ならば [4] により

$$\lambda_\chi = \lambda_p(\Gamma_{\alpha_\chi}(s)) - p^{n_c}/g$$

が成立する。　更にここでは、一般の χ に対しても上式により λ_χ を定義する。　但し α_χ は $F_\chi(T)$ に対応する $\mathbb{Z}_p$ 上の $\mathcal{O}$-valued の測度で、$\Gamma_{\alpha_\chi}(s) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \langle x \rangle^s d\alpha_\chi(x)$ for $s \in \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p^\times = V \times (1 + g\mathbb{Z}_p)$ の分解を $x = \omega(x)\langle x \rangle$ で表わす。V は $\mathbb{Z}_p^\times$ 内の 1 の巾根全体。

<u>補助定理</u>　上の仮定の下で

(i) $\theta \neq \omega^{-1}, 1$ の時

$$\lambda_{\theta\psi} = \begin{cases} \lambda_\theta + p^{n_\ell}/g & \text{if } \theta(\ell) = 1 \\ \lambda_\theta & \text{if } \theta(\ell) \neq 1 \end{cases}$$

(ii) $\theta = \omega^{-1}, 1$ の時

$$\lambda_{\theta\psi} = p^{n_e}/q - 1$$

注) ε_θ を定める時は、χ に対して求めた c をそのまま使う。　また $\ell \neq p$ により $\theta(\ell) \equiv 1 \bmod q$ は $\theta(\ell) = 1$ と同値。

定理1により補助定理は、次の命題と同値である。

命題　補助定理と同じ仮定の下で、

(i) の場合。

$$\lambda_p(H_{\theta\psi}(T)) = \begin{cases} \lambda_p(H_\theta(T)) + p^{n_e} & \text{if } \theta(\ell) = 1 \\ \lambda_p(H_\theta(T)) & \text{if } \theta(\ell) \neq 1 \end{cases}$$

(ii) の場合。 $\lambda_p(H_{\theta\psi}(T)) = p^{n_c} + p^{n_e} - q$ 。

但し、 $\alpha \leftrightarrow F(T) \in \mathcal{O}[[T-1]]$ の時、$\alpha^{(i)} := \alpha|_{i+q\mathbb{Z}_p}$ に対応する巾級数を $F^{(i)}(T) = (F(T))^{(i)}$ で表わし

$H_\chi(T) := \frac{1}{2}\sum_i F_\chi^{(i)}(T^{\omega^{-1}(i)}) \in \mathcal{O}[[T-1]]$ とおく。

対応する測度は、$\frac{1}{2}\sum_{\gamma \in V} \alpha_\chi \circ \gamma|_{1+q\mathbb{Z}_p}$ である。

i は、$p \neq 2$ の時 $i = 1, 2, \cdots p-1$, $p = 2$ の時 $i = 1, 3$ を動く。

注) [4]により、$\lambda_p(\Gamma_\chi(s)) = \lambda_p(\sum_{\gamma \in V} \alpha \circ \gamma \circ \varphi)$ である。

証明には、以下のいくつかの lemma が必要であるのでそれを述べる。

<u>Lemma 1</u> $m=\sum_{i=0}^{\infty} m_i p^i$, $n=\sum_{i=0}^{r} n_i p^i$

$0 \le m_i, n_i \le p-1$ に対して

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{r} \binom{m_i}{n_i} \mod p$$

注)、今後文字nに対してのみ $n=n_0+n_1 q$ s.t. $0 \le n_0 \le q-1$, と表示し他の文字に対しては、これまで通り、$l=\omega(l)(1+l_1 p^{n_l})$ s.t. $(l_1, p)=1$と表示する。

<u>Lemma 2</u> $\mu_p(F^{(i)}(T))=0$ ならば、$\lambda_p(F^{(i)}(T))=\lambda$ とおく時、$\alpha^{(i)}{}_n \equiv \binom{i}{n_0} \alpha^{(i)}{}_{qn_1} \mod p \quad (n \geq 0)$

特に、

$$\lambda \equiv 0 \mod q \text{ であり } \alpha^{(i)}{}_{\lambda+1} \not\equiv 0 \mod q$$

(証明) 測度と対応する巾級数の基本関係により、$n \geq 0$ に対して $\alpha^{(i)}{}_n = \int_{i+q\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} d\alpha(x)$

$$\equiv \binom{i}{n_0} \int_{i+q\mathbb{Z}_p} \binom{x}{qn_1} d\alpha(x) \mod p$$

$$\equiv \binom{i}{n_0} \alpha^{(i)}{}_{qn_1} \mod p$$

(証明終了)

<u>Lemma 3</u> $\alpha \leftrightarrow F(T)$, $\beta \leftrightarrow G(T)$ の時、

$$\alpha \equiv \beta \mod q \Leftrightarrow F(T) \equiv G(T) \mod q[[T-1]]$$

<u>Lemma 4</u> $\mathbb{Z}_p^\times \ni a \equiv 1 \mod q$ に対して

$$(F(T^a))^{(i)} = F^{(i)}(T^a)$$

(証明) 左辺の対応する測度は、

$$\alpha\circ a^{-1}|_{i+q\mathbb{Z}_p}=(\alpha|_{i+q\mathbb{Z}_p})\circ a^{-1}$$

これは、右辺の対応する測度である。　(証明終了)

<u>Lemma 5</u>　$\alpha\leftrightarrow F(T)$，$\lambda_p(F(T))=\lambda$ の時、

$\mathbb{Z}_p^\times\ni a$ に対して

$$F(T^a)\equiv\alpha_\lambda\, a^\lambda (T-1)^\lambda \mod(\mathfrak{P},\deg(\lambda+1))。$$

<u>Lemma 6</u>　Lemma 5 の状況の下、更に

$\lambda\equiv 0 \mod q$，$a\equiv 1 \mod q$ ならば

$$F(T^a)\equiv F(T)+a_1\alpha_{\lambda+1}(T-1)^{\lambda+p^{n_a}}$$
$$\mod(\mathfrak{P},\deg(\lambda+p^{n_a}+1))$$

注) Lemma 2 より $F^{(i)}(T)$ s.t. $\mu_p(F^{(i)}(T))=0$ に対して Lemma 6 が使える。

(証明)　$T^a-1\equiv T-1+a_1(T-1)^{p^{n_a}}+a_1(T-1)^{p^{n_a}+1}$
$$\mod(\mathfrak{P},\deg(p^{n_a}+2))$$

であるから、これを $F(T^a)=\sum_{n=0}^\infty \alpha_n(T^a-1)^n$ に代入して

$$F(T^a)\equiv F(T)+a_1\alpha_{\lambda+1}(T-1)^{\lambda+p^{n_a}}$$
$$\mod(\mathfrak{P},\deg(\lambda+p^{n_a}+1))$$

(証明終了)

<u>Lemma 7</u>　$\widehat{F}_\psi(T):=\sum_{a=1}^{\ell}\dfrac{\psi(a)T^a}{T^\ell-1}$　とすれば、

$$\widehat{F}_\psi^{(i)}(T)\equiv -i\,\ell_1(T-1)^{p^{n_f}-q} \mod(\mathfrak{P},\deg(p^{n_f}-q+1))$$

注) ψ に対する仮定により $\ell\equiv 1 \mod p$ である。

(証明) 測度と対応する巾級数の基本関係により，

$$\hat{F}_\psi^{(i)}(T)=\frac{1}{q}\sum_{\zeta_q}\zeta_q^{-i}\hat{F}_\psi(\zeta_q T)$$

$$=\sum_{a=0}^{\ell-1}\frac{\psi(i+qa)\,T^{i+qa}}{T^{q\ell}-1}$$

$$\therefore (T^{q\ell}-1)\tilde{F}_\psi^{(i)}(T)=\sum_{a=0}^{\ell-1}\psi(i+qa)\,T^{i+qa}$$

$$\equiv\sum_{a=0}^{\ell-1}T^{i+qa}-T^{\ell j} \mod q[[T-1]]$$

但し $p=2$，$\ell\equiv 3 \mod 4$ の時のみ $j=4-i$ その他の場合は $j=i$。

$\sum_{a=0}^{\ell-1}T^{i+qa}-T^{\ell j}$ の $(T-1)^n$ の係数を I_n $(n\geq 0)$ とすれば，

$$I_n=\sum_{a=0}^{\ell-1}\binom{i+qa}{n}-\binom{\ell j}{n}$$

$$\equiv\binom{i}{n_0}\sum_{a=0}^{\ell-1}\binom{a}{n_1}-\binom{\ell j}{n} \mod p$$

$$\equiv\binom{i}{n_0}\binom{\ell}{1+n_1}-\binom{\ell j}{n} \mod p$$

$$\equiv\begin{cases}\binom{i}{n_0}\left\{\binom{1+\ell_1 p^{n_\ell}}{1+n_1}-\binom{i\ell_1 p^{n_\ell}/q}{n_1}\right\} & \text{if } i=j\\ \binom{i}{n_0}\left\{\binom{2^{n_\ell}-1-(\ell_1+1)2^{n_\ell}}{1+n_1}-\binom{2^{n_\ell-2}-1-\{(4-i)\ell_1+1\}2^{n_\ell-2}}{n_1}\right\} & \text{if } i\neq j\end{cases}$$

$$\equiv\begin{cases}0 & \text{if } n<p^{n_\ell}\\ -i\ell_1 & \text{if } n=p^{n_\ell}\end{cases} \mod p$$

以上により $\hat{F}_\psi^{(i)}(T)\equiv -i\ell_1(T-1)^{p^{n_\ell}-q} \mod (q,\deg(p^{n_\ell}-q+1))$

(12) (証明終了)

以上の準備の下に、命題を証明する。

(証明)　(i)の場合。

$$F_{\theta\psi}(T) \equiv F_\theta(T) - \theta(\ell) F_\theta(T^\ell) \mod \mathfrak{g}[[T-1]]$$

ここで $p=2$, $\theta \neq 1$ なら $F_\theta(T^{-1}) \equiv F_\theta(T) \mod \mathfrak{g}[[T-1]]$ であることに注意して　更に $\ell \equiv 1 \mod p$ であるから、Lemma 3, 4 により

$$F^{(i)}_{\theta\psi}(T) \equiv F^{(i)}_\theta(T) - \theta(\ell) F^{(i)}_\theta(T^{\langle\ell\rangle}) \mod \mathfrak{g}[[T-1]]$$

$$\therefore H_{\theta\psi}(T) \equiv H_\theta(T) - \theta(\ell) H_\theta(T^{\langle\ell\rangle}) \mod \mathfrak{g}[[T-1]]$$

[4]により $\mu_p(H_\theta(T))=0$ であるから、Lemma 2, 6 により、

$$H_{\theta\psi}(T) \equiv (1-\theta(\ell))H_\theta(T) + \text{“p-adic unit”}(T-1)^{\lambda+p^{ne}}$$
$$\mod (\mathfrak{g}, \deg(\lambda+p^{ne}+1))$$

但し　$\lambda = \lambda_p(H_\theta(T))$

よって(i)の場合が得られた。

(ii)の場合。　$F^{(i)}_{\theta\psi}(T) = F^{(i)}_{\psi}(T)\theta(i)$　である。ここで、

$F_\psi(T) = \tilde{F}_\psi(T) - c\psi(c)\tilde{F}_\psi(T^c)$　であるから、Lemma 3, 4 により

$$\tilde{F}^{(i)}_\psi(T) = \tilde{F}^{(i)}_\psi(T) - c\psi(c)\tilde{F}^{(i)}_\psi(T^c)$$

Lemma 2, 6, 7 により

$$\tilde{F}^{(i)}_\psi(T) \equiv \text{“}i\text{に依らない p-adic unit”} \times i^2 (T-1)^{p^{nc}+p^{ne}-q}$$
$$\mod (\mathfrak{g}, \deg(p^{nc}+p^{ne}-q+1))$$

Lemma 5により

$$H_{\theta\psi}(T) \equiv \text{“p-adic unit”} \times (T-1)^{p^{nc}+p^{ne}-q}$$

$$\mod (\gamma, \deg(P^{nc}+p^{ne}-q+1))$$

(証明終了)

参考文献

[1]: Y. Kida, l-extensions of CM-fields and cyclotomic invariants, J. Number Theory 12 (1980), 519-528

[2]: ——, Cyclotomic $\mathbb{Z}_2$-extensions of J-fields, J. Number Theory 14 (1982), 340-352

[3]: ——, The λ-invariants of p-adic measures on $\mathbb{Z}_p$ and $1+8\mathbb{Z}_2$, Sci. Rep. Kanazawa Univ. 30 (1986), 33-38

[4]: W. Sinnott, On the μ-invariant of the Γ-transform of a rational function, Invent. Math. 75 (1984), 273-282

[5]: N. Childress, λ-invariants and Γ-transforms, Manuscripta math. 64 (1989), 359-375