数理解析研究所講究録
723巻 1990年 24-33

Higher Order Asymptotics in Some Non-Regular Estimation

赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

はじめに

最近、高次漸近理論の発展によって、適当な正則条件の下で、推定量などの高次の次数までの最適性に関する構造がかなり明らかにされた。しかし非正則な場合、すなわち必ずしも正則条件が成り立たないような場合には、その構造を解明することは容易ではない。例えば、正則な場合には「1次の漸近的有効ならば2次の漸近的有効になる」という良く知られた現象があるけれども、これは非正則な場合には成り立たない。実際、一般ベイズ推定量は1次の漸近的有効になるが、2次の漸近的有効にはならないし、それのみならず1次の次の次数が2次ではなくて、3/2次になることもあるのでその構造はいささか複雑になっている([1])。

ここでは、ある非正則分布族の場合に任意の点においてあるクラスに属する推定量が、高次の次数まで、そのクラス

の中で推定量の漸近集中確率の限界を達成するという意味で高次の漸近的有効であることを示す。そのような推定量としては、まず差分尤度方程式の解としての差分尤度推定量が考えられるが、本論では Weiss and Wolfowitz [5] の最大確率推定量をその候補の1つとして考え、それが上の意味で高次の漸近的有効であることを示す。

1. 設定

$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に、いずれも（ルベーグ測度に関して絶対連続な）密度関数 $f(x, \theta)$ $(\theta \in \Theta)$ に従う実確率変数列とし、$\Theta = R^1$ で θ は位置母数、すなわち $f(x, \theta) = f(x - \theta)$ であるとする．さらに次の条件 (A.1)〜(A.4) を仮定する。

(A.1) $f(x) > 0$, $a < x < b$ のとき、

$f(x) = 0$, $x \leq a$, $x \geq b$ のとき

(A.2) $f(x)$ は区間 (a, b) において2回連続微分可能で、

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to b-0} f(x) = c > 0,$$

$$\lim_{x \to b-0} f'(x) = -\lim_{x \to a+0} f'(x) = h \leq 0 \quad \text{である。}$$

(A.3) $f(x)$ は $x = (a+b)/2$ に関して対称である．

(A.4) $$0 < I = \int_a^b \{f'(x)\}^2 / f(x)\, dx < \infty .$$

上の条件の下では、一致性の次数はnになることが知られている。また条件(A.1)、(A.2)、(A.4)から、真の母数θ_0に対して

$$(1.1)\qquad E_{\theta_0}\left[\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(X-\theta_0)\right\}\chi_{(a,b)}(X-\theta_0)\right]<0$$

が成り立つことが分かる。

次に実数$k\geq 1$に対して、θの推定量$\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1,\cdots,X_n)$が$P_\theta\{\hat{\theta}_n\leq\theta\}=1/2+o(n^{-(k-1)})$, $P_\theta\{\hat{\theta}_n\geq\theta\}=1/2+o(n^{-(k-1)})$を$\theta$について局所一様に満足するとき、$\hat{\theta}_n$を$k$次の漸近中央値不偏(asymptotically median unbiased 略してAMU)であるといい、その推定量全体のクラスを$\mathcal{A}_k$で表す。

任意に固定した正数tに対して、区間$R=(-t,t)$を考えてθの最大確率推定量(maximum probability estimator 略してMPE)は

$$\int_{d-tn^{-1}}^{d+tn^{-1}}\prod_{i=1}^{n}f(X_i-\theta)\,d\theta$$

を最大にするdによって定義され、それを$\hat{\theta}_{MP}^{t}$によって表す。ここでMPEは区間R、従ってtに依存することに注意する必要がある([5], [6])。

さて$\underline{\theta}=\max_{1\leq i\leq n}X_i-b$, $\overline{\theta}=\min_{1\leq i\leq n}X_i-a$とし、$S=n(\underline{\theta}+\overline{\theta})/2$, $T=n(\overline{\theta}-\underline{\theta})/2$とおく。上の条件(A.1)～(A.4)の下で、$\theta$のMPE $\hat{\theta}_{MP}^{t}$は次のように求められる。

$$n\hat{\theta}_{MP}^{t} = \begin{cases} S & (T \le t), \\ n\bar{\theta} - t & (T > t,\ \hat{\theta}_0 \ge \bar{\theta} - \frac{t}{n}), \\ n\underline{\theta} + t & (T > t,\ \hat{\theta}_0 \le \underline{\theta} + \frac{t}{n}), \\ n\hat{\theta}_0 & (\underline{\theta} + \frac{t}{n} < \hat{\theta}_0 < \bar{\theta} - \frac{t}{n}). \end{cases}$$

ここで $\hat{\theta}_0$ は θ の最尤推定量であって、また(1.1)から対数尤度関数が区間 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ の中に唯1つの局所解をもつことは保証されている。

2. 両側漸近有効性

対称に切断された正規分布の場合に、推定量のクラス $\mathcal{A}_1$ の中での漸近有効性に関する結果はすでに得られている (Akahira and Takeuchi [3], [4]). それらは第1節の設定の下でも論じることができる. まずクラス $\mathcal{A}_1$ の推定量の漸近集中確率の限界は1次の次数まで次のように与えられる.

定理 2.1. 条件(A.1)〜(A.3)の下で、任意の $\hat{\theta}_n \in \mathcal{A}_1$, 任意の $\theta \in \Theta$, 任意の $z > 0$ に対して

(2.1) $$P_\theta\{n|\hat{\theta}_n - \theta| \le z\} \le 1 - e^{-2cz} + o(1)$$

が成り立つ.

なおこの節の議論では、条件(A.3)の $f'(x)$ に関する条件を除いたものを(A.3)と考えてよい。定理2.1の証明は Akahira [1] の定理4.1のそれと同様である.

次に、条件 (A.1) ～ (A.3) の下で、θ の Pitman 推定量 $\hat{\theta}_{PT}$ または一般ベイズ推定量は漸近的に $o_p(1)$ まで $S=(\bar{\theta}+\underline{\theta})/2$ に等しいことが分かっている ([1])。また θ の最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ は漸近的に次数 $o_p(1)$ まで

$$\tilde{\theta}_n = \begin{cases} \bar{\theta} & \text{with probability } 1/2, \\ \underline{\theta} & \text{with probability } 1/2 \end{cases}$$

に等しい。そこで $\hat{\theta}_{PT}$, MPE $\hat{\theta}_{MP}$ および $\hat{\theta}_{ML}$ の両側漸近有効性については、次のようになる。

<u>定理 2.2.</u> 条件 (A.1) ～ (A.3) の下で、任意の $\theta \in \Theta$、任意の $z>0$ に対して

$$P_\theta\{n|\hat{\theta}_{PT}-\theta| \le z\} = 1-e^{-2cz}+o(1),$$

$$P_\theta\{n|\hat{\theta}^t_{MP}-\theta| \le z\} = \begin{cases} 1-e^{-2cz}+o(1) & (0<z<t), \\ 1-e^{-c(z+t)}+o(1) & (z \ge t), \end{cases}$$

$$P_\theta\{n|\hat{\theta}_{ML}-\theta| \le z\} = 1-e^{-cz}+o(1)$$

が成り立ち、$\hat{\theta}_{PT}$ は定理 2.1 の漸近集中確率の限界 (2.1) を $o(1)$ まで一様に達成するという意味で一様両側漸近有効推定量であり、$\hat{\theta}^t_{MP}$ は $z=t$ において定理 2.1 のその限界 (2.1) を $o(1)$ まで達成するという意味で、点 t において両側漸近有効推定量であり、$\hat{\theta}_{ML}$ は上のような意味で (一様) 両側漸近有効推定量ではない。

さらに次節において高次の次数まで論じる。

3. 3/2次の両側漸近有効性

高次の次数の場合には、一般には一様両側漸近有効推定量は存在しないから、ある点において両側漸近有効推定量になるものを見つけることは意義がある。そこで、まずクラス$\mathcal{A}_{3/2}$の推定量の漸近集中確率の限界は、3/2次の次数すなわち$n^{-1/2}$の次数まで次のように与えられる。

定理3.1（[1]）．条件(A.1)～(A.4)の下で、任意の$\hat{\theta}_n \in \mathcal{A}_{3/2}$、任意の$\theta \in Ⓗ$、任意の$z > 0$に対して

$$P_\theta\{n|\hat{\theta}_n - \theta| \le z\} \le 1 - e^{-2cz} + \sqrt{\frac{2I}{\pi n}}\, z e^{-2cz} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

が成り立つ．

さらに、MPE $\hat{\theta}^t_{MP}$ の3/2次の漸近集中確率およびその3/2次の両側漸近有効性は次のようになる．

定理3.2． 条件(A.1)～(A.4)の下で、任意の$\theta \in Ⓗ$、任意の$z > 0$に対して

$$P_\theta\{n|\hat{\theta}^t_{MP} - \theta| \le z\}$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-2cz} + \dfrac{4hz}{\sqrt{2\pi I n}} e^{-2ct} + \sqrt{\dfrac{2I}{\pi n}}\left\{z - \dfrac{c}{2}(z-t)^2\right\} e^{-2ct} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) & (z \le t), \\ 1 - e^{-c(t+z)} + \dfrac{2h}{\sqrt{2\pi I n}}(t+z) e^{-c(t+z)} + \sqrt{\dfrac{2I}{\pi n}}\, z e^{-c(t+z)} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) & (z > t) \end{cases}$$

が成り立つ．特に$h = 0$のとき、MPE $\hat{\theta}^t_{MP}$ は$\mathcal{A}_{3/2}$の中で

$z=t$ において、定理3.1の漸近集中確率の限界を $o(1/\sqrt{n})$ まで達成するという意味で、点 t において 3/2次の両側漸近有効推定量である.

証明は、(S, T) の漸近密度、$\underline{\theta}$, $\overline{\theta}$ が与えられたときの $Z_1=-(1/\sqrt{n})\sum_{i=1}^{n}\{f'(X_i)/f(X_i)\}\chi_{(a,b)}(X_i)$ の条件付分布の Edgeworth 展開等を求めることによって得られる.

定理3.1、定理3.2から、$h<0$ の場合に、MPE $\hat{\theta}_{MP}^{t}$ は $z=t$ において上の漸近集中確率の限界を達成しない、すなわち $\hat{\theta}_{MP}^{t}$ は 3/2次の両側漸近的有効でない。また本論の設定の下で、一致性の次数は n であるが、定理3.1の漸近集中確率の限界および定理3.2のMPEの $o(1/\sqrt{n})$ までの漸近分布の中に、$n^{-1/2}$ の次数の項が現れる。従って、非正則な場合には、漸近有効性の次数が 3/2 のような分数になることがあり、このことは正則な場合にその次数が正の整数しかとらないことと本質的に異なることが分かる.

4. 2次の両側漸近有効性

前節では 3/2次の次数の有効性について論じたが、この節においてその次の2次の次数、すなわち n^{-1} の次数の両側漸近有効性を考察する。まず、クラス A_2 の推定量の漸近集中確率の限界は、2次の次数まで次のように与えられている。

<u>定理 4.1 ([2])</u>. 条件 (A.1) ～ (A.4) の下で、任意の $\hat{\theta}_n \in \mathcal{A}_2$、任意の $\theta \in \Theta$、任意の $z > 0$ に対して

$$P_\theta\{n|\hat{\theta}_n - \theta| \le z\} \le 1 - e^{-2cz} + \sqrt{\frac{2I}{\pi n}}\, z e^{-2cz} + \frac{2}{n}(c^2 - h) z^2 e^{-2cz} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

が成り立つ.

<u>注意 4.1.</u> [2] の 46 頁において与えられた漸近集中確率の 2 次の次数までの限界は、n^{-1} の次数の項に誤りがあるので上記のように訂正する。

次に、MPE $\hat{\theta}^t_{MP}$ の 2 次の漸近集中確率およびその 2 次の両側漸近有効性は次のようになる。

<u>定理 4.2.</u> 条件 (A.1) ～ (A.4) の下で、$h = 0$ ならば、任意の $\theta \in \Theta$、任意の $z > 0$ に対して

$$P_\theta\{n|\hat{\theta}^t_{MP} - \theta| \le z\}$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-2cz} + \sqrt{\dfrac{2I}{\pi n}}\left\{z - \dfrac{c}{2}(z-t)^2\right\} e^{-2ct} + \dfrac{2}{n} c^2 t^2 e^{-2ct} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) & (z \le t), \\[2ex] 1 - e^{-c(t+z)} + \sqrt{\dfrac{2I}{\pi n}}\, e^{-c(t+z)} \\ \quad + \dfrac{1}{n}\Big[2c^2t^2 e^{-2ct} + \left\{\dfrac{c^2}{2}(t+z)^2 + \dfrac{1}{2}(2c^2 - 3c)(t+z) + c - \dfrac{3}{2}\right\} e^{-c(t+z)} \\ \quad - \left\{2c^2t^2 + (2c^2 - 3c)t + c - \dfrac{3}{2}\right\} e^{-2ct}\Big] + o\left(\dfrac{1}{n}\right) & (z > t) \end{cases}$$

が成り立ち、MPE $\hat{\theta}^t_{MP}$ は $\mathcal{A}_2$ の中で、$z = t$ において定理 4.1

の漸近集中確率の限界を $o(1/n)$ まで達成するという意味で点 t において2次の両側漸近有効推定量である.

証明は定理3.2のそれと同様の方針で得られる.

5. おわりに

本論において、条件 (A.4) で $I>0$ であることを仮定したが、$I=0$ の場合には密度関数 $f(x)$ は区間 (a, b) 上の一様分布のそれになり、Akahira [1], [2] において、一般ベイズ推定量が 3/2次、2次の一様両側漸近的有効となることが示されている。

正則な場合には、条件 (A.4) において定義された

$$I = E_f\left[\{(\partial/\partial x)\log f(X)\}^2 \chi_{(a,b)}(X)\right]$$

は f に関する Fisher 情報量になる。しかし非正則な場合にはこの I は $f(x)$ の区間 (a, b) の内部の情報を表しているだけで、端点 a, b のもつ情報を含んでいないから、正則な場合とは異なる。また非正則の場合には、一般に

$$E_\theta\left[\{(\partial/\partial\theta)\log f(X-\theta)\}^2 \chi_{(a,b)}(X-\theta)\right] = -E_\theta\left[\{(\partial^2/\partial\theta^2)\log f(X-\theta)\}\chi_{(a,b)}(X-\theta)\right]$$

は成り立たない。例えば、対称に切断された正規分布の密度関数

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x^2/2} & (|x|<1), \\ 0 & (|x|\geq 1) \end{cases}$$

の場合には、上の等式は成り立たない。このことも正則な場合と本質的に異なることである。

References

[1] Akahira, M. (1988). Second order asymptotic properties of the generalized Bayes estimators for a family of non-regular distributions. In: Statistical Theory and Data Analysis II (K. Matusita Ed.), North-Holland, 87-100.

[2] Akahira, M. (1988). Second order asymptotic bounds for the concentration probability of estimators in a family of truncated distributions. (In Japanese), Proc. Symp., Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., No. 645, 37-51.

[3] Akahira, M. and Takeuchi, K. (1979). Remarks on asymptotic efficiency and inefficiency of maximum probability estimators. Rep. Stat. Appl. Res., JUSE, 26, 132-138.

[3] Akahira, M. and Takeuchi, K. (1981). Asymptotic Efficiency of Statistical Estimators: Concepts and Higher Order Asymptotic Efficiency. Lecture Notes in Statistics 7, Springer, New York.

[5] Weiss, L. and Wolfowitz, J. (1967). Maximum probability estimaotrs. Ann. Inst. Statist. Math., 19, 193-206.

[6] Weiss, L. and Wolfowitz, J. (1974). Maximum Probability Estimators and Related Topics. Lecture Notes in Mathematics 424, Springer, Berlin.