数理解析研究所講究録
726巻 1990年 190-198

Sequential Allocation of Airline Seats

関西大学　中井暉久（Teruhisa Nakai）

1．はじめに

航空機の座席は航空会社の商品であるが、空席で飛び立てばその瞬間に商品価値が永久にゼロとなる特徴をもっている。したがって航空会社としては、できるだけ乗客を乗せて空席をなくすようにしなければならない。一方、昨今では乗客のニーズに応じた多種類の航空券が売り出されており、一枚の航空券による収益もまちまちである。そこで航空会社としては収益の高い乗客を多く乗せる必要がある。しかし収益の高い乗客のみでは満席にならないかもしれないので、収益の低い乗客もいくらか乗せることにより空席になるのを防がねばならない。ここに各種の乗客をそれぞれどのくらい乗せるべきかという問題が生じる。これが航空機の座席管理問題である。ここでは塔乗客は普通客と割引客の２種類とする．収益の高い普通客が割引客より先に到着する場合は、普通客をど

んどん受け入れ、それでも空席が生じるようなら割引客で埋めればよいから問題は起きない。逆に、割引客が先に到着する場合は、割引客を何人まで受け入れるかを決める最適停止問題となり、既にいくつかの論文が見られる。ところが実際には、普通客と割引客はどちらが先にということはなく時間的にバラバラにやってくるものである。したがってモデルは動的となり座席の逐次配分問題が生じる。この方面の研究はまだ殆んどやられていない。本稿では、こうした動的モデルのうちの最も基本的なものを扱う。

2、Model and Formulation

航空機1機の1 flight における座席管理問題を考える。総座席数をC，航空券の売り出し期間をTとし、時間は flight までの残り時間で表わす。搭乗客は個人でやってくる普通客（1人当り収益 a 円）と、団体でやってくる割引客（1人当り収益 b 円：$0<b<a$）の2種類とする。普通客は到着率 $\lambda(t)\,(\geq 0)$ の、団体客は到着率 $\mu(t)\,(\geq 0)$ のともに非斉次ポアソン過程に従って到着するものとする。各団体が k 人の客から成っている確率を p_k $(k=1,2,\cdots)$ とする。つぎの仮定をおく。

（仮定1）割引客から普通客への変更およびその逆の変更はない。

（仮定2）客による cancell はない。従って会社側が対抗

してとる overbooking もない。

(仮定3) 残り座席数より多い人数から成る団体は全員を一括して reject する。

(仮定4) 途中搭乗降は考えない。

問題は 1 flight 当りの期待総収益を最大ならしめる座席管理政策を求めることである。

状態は (n, t, k) で表わされる。ここに

n = 残り座席数 , t = 残り時間

k = 現在到着しているが、受け入れ未決定で待機中の団体の成員数

とする。普通客は空席がある限り accept されるので decision point は $n \geq 1$, $t \geq 0$, $1 \leq k \leq n$ の場合のみである。従って policy は次のように表わされる。

$$\varphi \equiv \{ \varphi_n(t, k) \mid n = 1, 2, \cdots \ ; \ t \geq 0 \ ; \ k = 1, \cdots, n \}$$

$\varphi_n(t, k)$ = state (n, t, k) のとき、到着している団体(k人より成る)を accept する確率

いま state $(n, t, 0)$ および (n, t, k) $(k \geq 1)$ から出発して以後最適政策を用いた時の期待総収益をそれぞれ $f_n(t)$, $g_n(t, k)$ とおくと、

$$(1) \quad f_n(t) = \lambda(t)\Delta\{a + f_{n-1}(t-\Delta)\} + \mu(t)\Delta\left\{\sum_{k=1}^{n} p_k\, g_n(t-\Delta, k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k\, f_n(t-\Delta)\right\} + \{1 - \lambda(t)\Delta - \mu(t)\Delta + o(\Delta)\} f_n(t-\Delta) + o(\Delta)$$

が得られ、これより次の微分方程式を得る。

$$(2)\quad f_n'(t) = \lambda(t)\left[a + f_{n-1}(t) - f_n(t)\right] + \mu(t)\left[\sum_{k=1}^{n} p_k\, g_n(t,k) - \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right) f_n(t)\right]$$

一方 $g_n(t,k)$ は次式を満足する。

$$(3)\quad g_n(t,k) = \max_{0 \le \varphi_n(t,k) \le 1}\left[\varphi_n(t,k)\left\{kb + f_{n-k}(t)\right\} + \left\{1 - \varphi_n(t,k)\right\} f_n(t)\right]$$

初期条件は次のとおり：

$$(4)\quad f_0(t) = f_n(0) = 0 \quad , \quad g_n(0,k) = kb$$

3. Results

(3)式より最適決定は次のようになる。

$$(5)\quad kb + f_{n-k}(t) \begin{Bmatrix} \ge \\ < \end{Bmatrix} f_n(t) \implies \varphi_n^*(t,k) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Lemma 1. 関数 $f_n(t)$ は次の性質をもつ。

(i) $0 \le f_n(t) - f_{n-1}(t) \le a$ $\quad (n \ge 1,\ t \ge 0)$

(ii) $f_n(t)$ は t に関し単調非減少 $\quad (n \ge 0)$

(iii) $f_n(t) - f_{n-1}(t) \ge f_{n+1}(t) - f_n(t)$ $\quad (n \ge 1,\ t \ge 0)$

(iv) $f_n'(t) \ge f_{n-1}'(t)$ $\quad (n \ge 1,\ t \ge 0)$

Theorem 1. n, k を fix したとき、t に関する方程式

$$(6)\quad kb + f_{n-k}(t) = f_n(t)$$

は区間 $[0, \infty)$ で高々1個の解をもち、最適決定は次のように与えられる。

(i) 方程式 (6) が解をもたないとき：

$$\varphi_n^*(t,k) = 1 \text{ (accept)} \quad \text{for } {}^\forall t\ (\geq 0)$$

(ii) 方程式 (6) が解 $t = t_n^*(k)$ をもつとき：

$$(7) \qquad t \begin{Bmatrix} \leq \\ > \end{Bmatrix} t_n^*(k) \Longrightarrow \varphi_n^*(t,k) = \begin{Bmatrix} 1 \text{ (accept)} \\ 0 \text{ (reject)} \end{Bmatrix}$$

Corollary 1. $p_1 = 1$（割引客が全て個人客）の場合、Th. 1 (ii) における解 $t_n^*(1)$ は n に関して単調非減少である。

$p_1 = 1$ の場合の process の進行の1例を (t, n) 平面上に図示したのが Fig. 1 である。

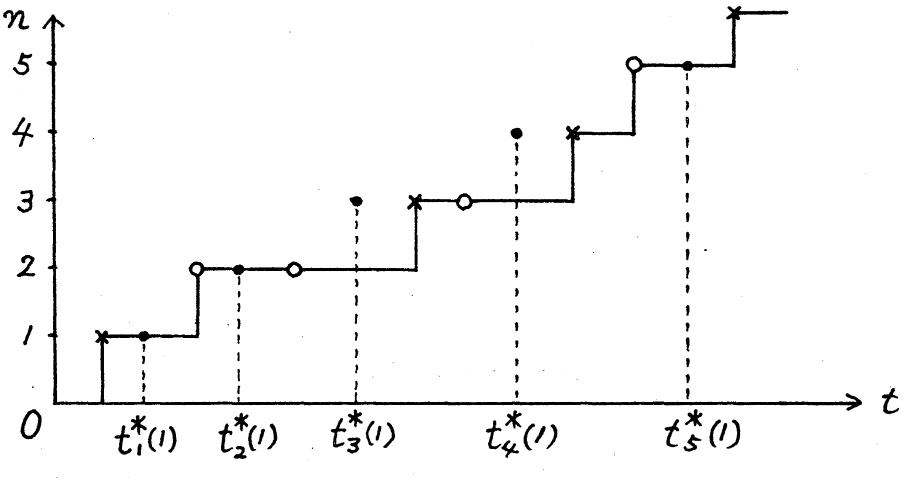

Fig. 1

• 印 …… $t_n^*(1)$, × 印 …… 普通客到着点

○ 印 …… 割引客到着点

4. Modified Model

上記モデルでは、先着割引客を reject したのに、後から

来た割引客をacceptすることが起り得る。これでは先着割引客に不満が残り現実的でない。そこで次の仮定をおく。他の設定は今までどおりとする。

（仮定5）　受け入れ可能な割引客をrejectすれば、以後の割引客は全てrejectしなければならない。

さて、残り座席数がnで、残り時間がtのとき、

$f_n(t)$＝まだ割引客の受け入れをstopしていなくて、現在客が到着していない状態から出発した時の最大期待収益

$g_n(t,k)$＝まだ割引客の受け入れをstopしていなくて、現在受け入れ可能なk人の割引客が到着している状態から出発した時の最大期待収益

$h_n(t)$＝既に割引客の受け入れをstopしていて、現在客が到着していない状態から出発した時の最大期待収益

とおくと、(1), (2)式はそのまま成立し、

$$(8)\quad g_n(t,k) = \max_{0 \le \varphi_n(t,k) \le 1} \Big[\varphi_n(t,k)\{kb + f_{n-k}(t)\} + \{1-\varphi_n(t,k)\} h_n(t) \Big]$$

$$(9)\quad h_n(t) = a\,E[X_t \wedge n] \qquad x \wedge y \equiv \min\{x, y\}$$

$X_t \equiv [0,t]$で到着する普通客の数

$$(10)\quad f_0(t) = g_0(t,k) = h_0(t) = 0$$

$$f_n(0) = h_n(0) = 0 \quad , \quad g_n(0,k) = kb$$

が成立する。また $h_n(t)$ は次の微分方程式をも満たす。

(11) $h_n'(t) = \lambda(t)\left[a + h_{n-1}(t) - h_n(t)\right]$

$f_n(t)$ と $h_n(t)$ に対し Lemma 1 と同様の性質の成立を示すことができる。

Lemma 2. optimal reject region

$S^* \equiv \{(n, t, k) \mid \varphi_n^*(t, k) = 0\}$ は n, k を固定した時、t に関する convex set である。

また (8) 式より

(12) $kb + f_{n-k}(t) \begin{Bmatrix} \geq \\ < \end{Bmatrix} h_n(t) \Longrightarrow \varphi_n^*(t, k) = \begin{Bmatrix} 1 & \text{(accept)} \\ 0 & \text{(reject)} \end{Bmatrix}$

Theorem 2. n, k を fix した時、t に関する方程式

(13) $kb + f_{n-k}(t) = h_n(t)$

は区間 $[0, \infty)$ で高々2個の解をもち、最適決定は次のように与えられる。

(i) 方程式 (13) が解をもたない時：

$$\varphi_n^*(t, k) = 1 \quad \text{(accept)} \qquad \text{for } {}^\forall t\ (\geq 0)$$

(ii) 方程式 (13) が唯一の解 $t_n^0(k)$ をもつ時：

$$t \begin{Bmatrix} \leq \\ > \end{Bmatrix} t_n^0(k) \Longrightarrow \varphi_n^*(t, k) = \begin{Bmatrix} 1 & \text{(accept)} \\ 0 & \text{(reject)} \end{Bmatrix}$$

(iii) 方程式 (13) が2つの解 $t_n^1(k)$, $t_n^2(k)$ $(t_n^1(k) < t_n^2(k))$ をもつ時：

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \leq t < t_n^1(k) \\ t_n^1(k) \leq t < t_n^2(k) \\ t_n^2(k) \leq t < \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \varphi_n^*(t,k) = \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right\}$$

- 残り座席数nが十分大きい時は、普通客だけではとても満席になりそうにないから、割引客を残り時間に関係なく受け入れる。これが定理2の(i)の場合である。
- 残り座席数nが極端に少い時は、普通客だけで十分満席になると思われるので、割引客は最初から受け入れない。ただ残り時間が極端に少くなっても空席のある場合には(それ迄にrejectしていなければ)割引客を受け入れる。これが定理2の(ii)の場合である。
- 残り座席数nが極端に大きくも小さくもない時は、残り時間が十分大きいなら、ここでrejectすると将来acceptしたくなっても出来ないから、初めのうちはacceptしておき、残り時間が少くなるとrejectする。ただ残り時間が極端に少くなっても空席があるようなら割引客をacceptする。これが定理2の(iii)の場合である。
- 以上を図示するとFig. 2のようになる。

静的なモデルでは、受け入れるべき普通客と割引客の比率は予め決められていた(それがpolicyであった)が、動的

なモデルでは各typeの客がどういう順にいつ到着するかを見ながら決定することになる。一般には $t_n^2(k)$ が割引客受け入れの実質的な締切り時刻となるが、もし $t_n^1(k)$ あるいは $t_n^0(k)$ まで実際にrejectが起らなければ最後まで割引客を受け入れることになる。

定理2は最適政策の構造を示しているが、具体的に方程式(13)の解を解析的に求めることは殆んど不可能で、(2),(8),(9)の逐次近似解を求めるしかないと思われる。

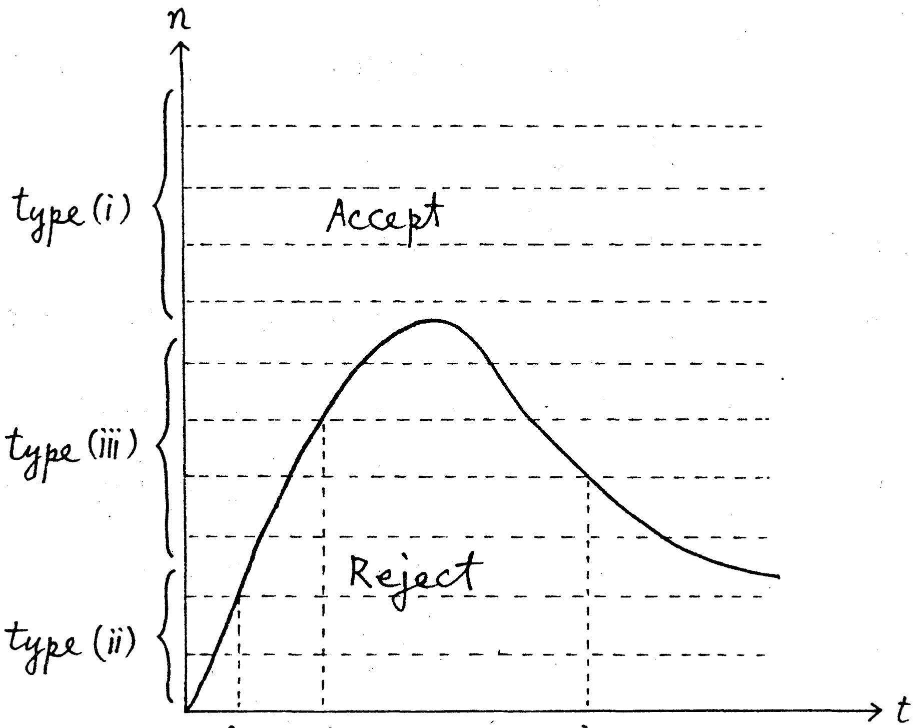

Fig. 2