数理解析研究所講究録
726巻 1990年 153-166

A multi-parametric linear program and its dual and converse programs

九大 經済 岩本誠一(Seiichi Iwamoto)

1. はじめに

本論文では，Bellman [1, p.47] が提示したマルチパラメトリックな N 変数 (N−1) 制約線形計画問題（主問題）およびその双対問題，逆転問題，双対逆転問題の合計 4 つの線形計画問題を考える。いずれも (N−1) 個のパラメータ $a=(a_1, a_2, \cdots, a_{N-1})'$ を右辺定数ベクトルまたは目的係数ベクトルとして含む問題である。

第 2 節では用語・定義を説明して，4 問題を導入する。第 3 節では 4 つの最適値関数の関係，性質，上界・下界を与え，特にパラメータが非負単調列のときには，4 問題の完全解を与える。

2. 双対問題と逆転問題

以下本論文を通じて次の記号・定義を用いる。

N : 2 以上の自然数

$$A = \begin{array}{c} \left[\begin{matrix} 1 & 1 & & & 0 \\ & 1 & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \end{matrix}\right] \\ \underbrace{\hphantom{1 \quad 1 \quad \quad \quad 0}}_{N} \end{array} \Big\} N-1 \qquad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} \qquad e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Big\} N$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}$$

$(\ , \ )$: 内積

A' : Aの転置行列

R^n : n次元ユークリッド空間，　$R^n \ni x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)'$

$R^n_+ = \{ x \in R^n \mid x_i \geqq 0,\ 1 \leqq i \leqq n \}$

$R^n_- = \{ x \in R^n \mid x_i \leqq 0,\ 1 \leqq i \leqq n \}$

$x \geqq y \iff x_i \geqq y_i \quad 1 \leqq i \leqq n$

$x \geq y \iff x \geqq y,\ x \neq y$

$x > y \iff x_i > y_i \quad 1 \leqq i \leqq n$

$a \vee b = \max(a, b) = \begin{cases} a & a \geqq b \\ b & a < b \end{cases}$ のとき，特に $a^+ = a \vee 0$

$a \wedge b = \min(a, b) = \begin{cases} a & a \leqq b \\ b & a > b \end{cases}$ のとき，特に $a^- = a \wedge 0$

$\bigvee_{i=1}^{n} a_i = \max_{1 \leqq i \leqq n} a_i$: $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の最大値

$\bigwedge_{i=1}^{n} a_i = \min_{1 \leqq i \leqq n} a_i$: $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の最小値

$\bar{\lambda} = 1 - \lambda$

以下，次の4つの線形計画(LP)問題を考える.

問題1　$f_N(a) = \min(e, x)$　s.t.　$Ax \geqq a$,　$x \in R_+^N$

問題2　$g_N(a) = \mathrm{Max}(a, y)$　s.t.　$A'y \leqq e$,　$y \in R_+^{N-1}$

ただし，問題1,2においては　$a \in R^{N-1}$　とする。

問題3　$F_N(a) = \mathrm{Max}(e, x)$　s.t.　$Ax \leqq a$,　$x \in R_+^N$

問題4　$G_N(a) = \min(a, y)$　s.t.　$A'y \geqq e$,　$y \in R_+^{N-1}$

ただし，問題3,4では特に　$a \in R_+^{N-1}$　に制限する。

問題1はBellman[1, p.47]が提示している。問題1と問題2の対，および問題3と問題4の対はともに線形計画における主問題と双対問題の関係にある。これを単に双対関係 dual relation という。また，問題1と問題3の対は互に"逆転"領域における最小化問題と最大化問題である。ただし，ここで逆転領域とは制約関係が

$$Ax \leqq b,\ x \in X \qquad と \qquad Ax \geqq b,\ x \in X$$

の関係にあるときをいう。このとき問題1と問題3は互に逆転関係 converse relation にあるという。したがって問題2と問題4の対もまた互に逆転関係にあり，一方を主問題，他方を逆転問題という。

本論文では問題1を主問題 primal problem，問題2を

双対問題 dual problem，問題3を逆転問題 converse problem，問題4を双対逆転問題 primal-converse problem とそれぞれ呼ぶことにする。最大化が行なわれる(問題2,3の)領域はコンパクト凸であり，最小化される(問題1,4の)領域は非有界・閉凸集合である。

3. 最適値関数の性質と相互関係

問題1と2の対，および問題3と4の対の間には次の双対関係がある。

命題 3.1 (i) $f_N(a) = g_N(a) \qquad a \in R^{N-1}$

(ii) $F_N(a) = G_N(a) \qquad a \in R^{N-1}_+.$

さて問題1の最大値関数 f_N と問題2の最小値関数 g_N の性質を考えよう。このため，まず問題1を線形不等式系で表現しておこう。

問題1
(主問題)

$$\begin{array}{llll}
\min & x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{N-1} + x_N & & \\
\text{s.t.}\ (1) & x_1 + x_2 & \geq & a_1 \\
(2) & \quad x_2 + x_3 & \geq & a_2 \\
\vdots & \qquad \ddots & & \vdots \\
(N-1) & \qquad\qquad x_{N-1} + x_N & \geq & a_{N-1} \\
(N) & x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots, x_{N-1},\ x_N & \geq & 0
\end{array}$$

この不等式系(1)〜(N)に同値な表現として次が得られる。

補題 3.1 線形不等式系 $Ax \geq a,\ x \in R^N_+$ は次の不等式系 $(1)^+ \sim (N)^+$ に同値である。ただし $a \in R^{N-1}$.

$$
\begin{array}{llr}
(1)^+ & x_1 + x_2 & \geqq a_1^+ \\
(2)^+ & \quad x_2 + x_3 & \geqq a_2^+ \\
\vdots & \qquad \cdots & \vdots \\
(N-1)^+ & \qquad\qquad x_{N-1} + x_N & \geqq a_{N-1}^+ \\
(N)^+ & x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots, x_{N-1},\ x_N & \geqq 0 .
\end{array}
$$

<u>補題 3.2</u>　(i)　$f_N(a) = 0 \qquad a \in R_-^{N-1}$

$$f_N(a) \geqq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} a_i^+ \qquad a \in R^{N-1}$$

(ii) 関数 f_N は次の意味で非減少である。

(ii-a)　$a_1 \leqq a_2 \Rightarrow f_N(a_1) \leqq f_N(a_2)$

(ii-b)　$0 \leqq a_1 < a_2 \Rightarrow 0 \leqq f_N(a_1) < f_N(a_2)$

(ii-c)　$0 < a \Rightarrow 0 < f_N(a)$

(iii) 関数 f_N は凸である。

<u>補題 3.3</u>　(i)　N が偶数のとき

$$f_N(a) \geqq (a_1^+ + a_3^+ + a_5^+ + \cdots + a_{N-1}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-2}^+)$$

(ii)　N が奇数のとき

$$f_N(a) \geqq (a_1^+ + a_3^+ + a_5^+ + \cdots + a_{N-2}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-1}^+).$$

次に問題2を線形不等式系で表現して考えよう。

問題2
(双対問題)

$$
\begin{array}{llr}
\text{Max} & a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + \cdots + a_{N-2}y_{N-2} + a_{N-1}y_{N-1} & \\
\text{s.t.} & (1)\ y_1 & \leqq 1 \\
& (2)\ y_1 + y_2 & \leqq 1 \\
& (3)\quad y_2 + y_3 & \leqq 1 \\
& \vdots \qquad \cdots & \vdots \\
& (N-1) \qquad\qquad y_{N-2} + y_{N-1} & \leqq 1 \\
& (N) \qquad\qquad\qquad y_{N-1} & \leqq 1 \\
& (N+1)\ y_1,\ y_2,\ y_3, \cdots y_{N-2},\ y_{N-1} & \geqq 0
\end{array}
$$

ただし　$a \in R^{N-1}$.

問題の最大値関数 $g_N : R^{N-1} \longrightarrow R^1$ は次の上界をもつ。

補題 3.4　(i) N が偶数のとき

$$g_N(a) \leqq [a_1 + (a_2 \vee a_3) + (a_4 \vee a_5) + \cdots + (a_{N-2} + a_{N-1})]$$
$$\wedge [(a_1 \vee a_2) + (a_3 \vee a_4) + \cdots + (a_{N-3} \vee a_{N-2}) + a_{N-1}]$$

(ii) N が奇数のとき

$$g_N(a) \leqq [a_1 + (a_2 \vee a_3) + (a_4 \vee a_5) + \cdots + (a_{N-3} \vee a_{N-2}) + a_{N-1}]$$
$$\wedge [(a_1 \vee a_2) + (a_3 \vee a_4) + \cdots + (a_{N-2} \vee a_{N-1})].$$

したがって，命題 3.1，補題 3.3，補題 3.4 より，問題 1 の最小値関数 f_N と問題 2 の最大値関数 g_N の上界・下界が得られる。

命題 3.2　(i) N が偶数のとき

$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{N-1} a_i^+$$
$$\leqq (a_1^+ + a_3^+ + \cdots + a_{N-2}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-2}^+)$$
$$\leqq f_N(a) = g_N(a)$$
$$\leqq [a_1^+ + (a_2^+ \vee a_3^+) + (a_4^+ \vee a_5^+) + \cdots + (a_{N-2}^+ \vee a_{N-1}^+)]$$
$$\wedge [(a_1^+ \vee a_2^+) + (a_3^+ \vee a_4^+) + \cdots + (a_{N-3}^+ \vee a_{N-2}^+) + a_{N-1}^+]$$
$$\leqq \frac{N}{2}\left(\bigvee_{1}^{N-1} a_i^+\right)$$

(ii) N が奇数のとき

$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{N-1} a_i^+$$
$$\leqq (a_1^+ + a_3^+ + \cdots + a_{N-2}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-1}^+)$$
$$\leqq f_N(a) = g_N(a)$$
$$\leqq [\, a_1^+ + (a_2^+ \vee a_3^+) + (a_4^+ \vee a_5^+) + \cdots + (a_{N-3}^+ \vee a_{N-2}^+) + a_{N-1}^+]$$
$$\wedge [(a_1^+ \vee a_2^+) + (a_3^+ \vee a_4^+) + \cdots + (a_{N-2}^+ \vee a_{N-1}^+)]$$
$$\leqq \frac{N}{2}\Big(\bigvee_{1}^{N-1} a_i^+\Big).$$

系 3.1（[1, p.47]）数列 $\{a_i\}_1^{N-1}$ のうち ただ1つ a_{i_0} だけが正ならば

$$f_N(a) = g_N(a) = \bigvee_{1}^{N-1} a_i = a_{i_0}.$$

このとき，$\hat{x}_{i_0} = a_{i_0}$，$\hat{x}_i = 0$ $(i \neq i_0)$ が問題1の最小点であり，$y^*_{i_0} = 1$，$y^*_i = 0$ $(i \neq i_0)$ が問題2の最大点である。

系 3.2

$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{N-1} a_i^+ \leqq f_N(a) = g_N(a) \leqq \frac{N}{2}\Big(\bigvee_{1}^{N-1} a_i^+\Big).$$

次に問題3と問題4の最適値関数を与えよう。まず問題3を線形不等式系で表現しておく。

問題3（逆転問題）

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{Max} & x_1 & + x_2 & + x_3 + \cdots + x_{N-1} + x_N & & & \\
\text{s.t.} & (1) & x_1 + x_2 & & & \leqq & a_1 \\
 & (2) & & x_2 + x_3 & & \leqq & a_2 \\
 & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\
 & (N-1) & & & x_{N-1} + x_N & \leqq & a_{N-1} \\
 & (N) & x_1, & x_2, & x_3, \cdots x_{N-1}, x_N & \geqq & 0
\end{array}
$$

ただし　$a \in R_+^{N-1}$.

問題3の最大値関数 $F_N : R_+^{N-1} \to R_+^1$ には次の性質がある。

補題 3.5　(i)　$0 \leqq F_N(a) \leqq \frac{1}{2}(a_1 + \sum_{1}^{N-1} a_i + a_{N-1})$

(ii) 関数 F_N は次の意味で非減少である。

(ii-a)　$a_1 \leqq a_2 \implies F_N(a_1) \leqq F_N(a_2)$

(ii-b)　$a_1 < a_2 \implies F_N(a_1) < F_N(a_2)$

(ii-c)　$0 < a \implies 0 < F_N(a)$

(iii) 関数 F_N は凹である。

補題 3.6　(i)　N が偶数のとき

$$F_N(a) \leqq (a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-1}) \wedge (a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1})$$

(ii) N が奇数のとき

$$F_N(a) \leqq (a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1}) \wedge (a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-1}).$$

次に問題4を線形不等式で表現して考えよう。

問題4
(双対逆転問題)

$$\begin{array}{lll}
\text{Max} & a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \cdots + a_{N-2} y_{N-2} + a_{N-1} y_{N-1} & \\
\text{s.t.} & (1)\quad y_1 & \geqq 1 \\
 & (2)\quad y_1 + y_2 & \geqq 1 \\
 & (3)\quad y_2 + y_3 & \geqq 1 \\
 & \vdots & \vdots \\
 & (N-1)\quad y_{N-2} + y_{N-1} & \geqq 1 \\
 & (N)\quad y_{N-1} & \geqq 1 \\
 & (N+1)\quad y_1,\ y_2,\ y_3, \cdots, y_{N-2},\ y_{N-1} & \geqq 0
\end{array}$$

ただし　$a \in R_+^{N-1}$.

この不等式系 (1)～(N+1) から

$$y_{N-2}+y_{N-1}\geqq 1,\quad y_{N-1}\geqq 0,\quad y_1+y_2\geqq 1,\quad y_1\geqq 0$$

を削除しても同値である。問題4の最大値関数 $G_N: R_+^{N-1} \longrightarrow R_+^1$ の1つの下界を求めよう。

補題 3.7 (i) N が偶数のとき

$$G_N(a)\geqq[a_1+(a_2\wedge a_3)+(a_4\wedge a_5)+\cdots+(a_{N-2}\wedge a_{N-1})]$$
$$\vee[(a_1\wedge a_2)+(a_3\wedge a_4)+\cdots+(a_{N-3}\wedge a_{N-2})+a_{N-1}]$$

(ii) N が奇数のとき

$$G_N(a)\geqq[a_1+(a_2\wedge a_3)+(a_4\wedge a_5)+\cdots+(a_{N-3}\wedge a_{N-2})+a_{N-1}]$$
$$\vee[(a_1\wedge a_2)+(a_3\wedge a_4)+\cdots+(a_{N-2}\wedge a_{N-1})].$$

命題3.1, 補題3.6, 補題3.7より, 問題3の最大値関数 F_N と問題4の最小値関数 G_N の上界・下界が得られる。

命題 3.3 (i) N が偶数のとき

$$\frac{N}{2}\left(\bigwedge_{1}^{N-1} a_i\right)$$
$$\leqq[a_1+(a_2\wedge a_3)+(a_4\wedge a_5)+\cdots+(a_{N-2}\wedge a_{N-1})]$$
$$\vee[(a_1\wedge a_2)+(a_3\wedge a_4)+\cdots+(a_{N-3}\wedge a_{N-2})+a_{N-1}]$$
$$\leqq G_N(a)=F_N(a)$$
$$\leqq(a_1+a_3+\cdots+a_{N-1})\wedge(a_1+a_2+a_4+\cdots+a_{N-2}+a_{N-1})$$
$$\leqq(a_1+a_{N-1})+\frac{1}{2}(a_2+a_3+\cdots+a_{N-2})$$
$$=\frac{1}{2}\left(a_1+\sum_{1}^{N-1}a_i+a_{N-1}\right)$$

(ii) Nが奇数のとき

$$\frac{N}{2}\left(\bigwedge_1^{N-1} a_i\right)$$
$$\leqq [a_1+(a_2\wedge a_3)+(a_4\wedge a_5)+\cdots+(a_{N-3}\wedge a_{N-2})+a_{N-1}]$$
$$\vee[(a_1\wedge a_2)+(a_3\wedge a_4)+\cdots+(a_{N-2}\wedge a_{N-1})]$$
$$\leqq G_N(a)=F_N(a)$$
$$\leqq (a_1+a_3+\cdots+a_{N-2}+a_{N-1})\wedge(a_1+a_2+a_4+\cdots+a_{N-1})$$
$$\leqq (a_1+a_{N-1})+\frac{1}{2}(a_2+a_3+\cdots+a_{N-2})$$
$$=\frac{1}{2}\left(a_1+\sum_1^{N-1}a_i+a_{N-1}\right).$$

系 3.3 列 $\{a_i\}_1^{N-1}$ のうちただ1つ a_{i_0} が正で他がすべて0ならば,

$$F_N(a)=G_N(a)=\begin{cases}\bigvee_1^{N-1} a_i = a_{i_0} & i_0=1 \text{ or } N-1 \text{ のとき}\\ 0 & \text{その他 } (1<i_0<N-1) \text{ のとき}\end{cases}$$

このとき

$$x^*=\begin{cases}(a_1,0,\cdots,0) \text{ or } (0,\cdots,0,a_{N-1})\\ (0,0,\cdots,0)\end{cases}$$

が問題3の最大点であり，実行可能な

$$\hat{y}=\begin{cases}(1,\hat{y}_2,\cdots,\hat{y}_{N-1}) \text{ or } (\hat{y}_1,\cdots,\hat{y}_{N-2},1)\\ (\hat{y}_1,\cdots,\hat{y}_{i_0-1},0,\hat{y}_{i_0+1},\cdots,\hat{y}_{N-1})\end{cases}$$

が問題4の最小点である。

系 3.4

$$\frac{N}{2}\left(\bigwedge_1^{N-1} a_i\right)\leqq F_N(a)=G_N(a)\leqq\frac{1}{2}\left(a_1+\sum_1^{N-1}a_i+a_{N-1}\right).$$

命題 3.2 と命題 3.3 より，次の逆転関係が得られる。

命題 3.4　$a \in R_+^{N-1}$ としておく。

(i) N が偶数のとき

$$
\begin{aligned}
G_N(a) &= F_N(a) \\
&\leqq (a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-1}) \wedge (a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1}) \\
&\leqq (a_1^+ + a_3^+ + \cdots + a_{N-1}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-2}^+) \\
&\leqq f_N(a) = g_N(a)
\end{aligned}
$$

(ii) N が奇数のとき，特に $a_1 = 0$ または $a_{N-1} = 0$ ならば，

$$
\begin{aligned}
G_N(a) &= F_N(a) \\
&\leqq (a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1}) \wedge (a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-1}) \\
&\leqq (a_1^+ + a_3^+ + \cdots + a_{N-2}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-1}^+) \\
&\leqq f_N(a) = g_N(a).
\end{aligned}
$$

注意 1　(i) N を偶数とする。

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-1} < a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-2} < a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1}$$

のとき，

$$
\begin{aligned}
G_N(a) &= F_N(a) \\
&\leqq a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-1} \\
&< a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-2}^+ \\
&\leqq f_N(a) = g_N(a).
\end{aligned}
$$

(ii) N を奇数とする。

(ii-a) $a_1 = 0$，　$a_3 + a_5 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1} < a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-1}$

のとき

$$G_N(a) = F_N(a)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqq a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1} \\
&< a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-1} \\
&= a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-1}^+ \\
&\lneqq f_N(a) = g_N(a)
\end{aligned}
$$

(ii-b) $a_{N-1} = 0$, $a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-3} < a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-2}$

のとき

$$
\begin{aligned}
G_N(a) = F_N(a) \\
&\leqq a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-1} \\
&< a_1^+ + a_3^+ + \cdots + a_{N-2}^+ \\
&\leqq f_N(a) = g_N(a).
\end{aligned}
$$

したがって，以上３つの場合には，逆転問題の最適値は主問題の最適値より小さい。

<u>注意２</u>　$N=3$,　$a_1 \geqq a_2 > 0$　とする。このとき

$$
\begin{aligned}
f_3(a) = \min \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \geqq a_1 \\
& x_2 + x_3 \geqq a_2 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geqq 0
\end{aligned}
$$

より

$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (0, a_1, 0)$ のとき，$f_3(a) = a_1.$

他方

$$
\begin{aligned}
F_3(a) = \mathrm{Max} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leqq a_1 \\
& x_2 + x_3 \leqq a_2 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geqq 0
\end{aligned}
$$

だから，

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (a_1, 0, a_2)$$ のとき，$F_3(a) = a_1 + a_2$.

したがって

$$F_3(a) = a_1 + a_2 > a_1 = f_3(a)$$

となり，命題 3.4 (ii) には 条件「$a_1 = 0$ または $a_{N-1} = 0$」は欠かせないことがわかる。この例では，逆転問題の最大値は主問題の最小値より大きくなっている。

命題3.2，3.3で与えた最適値関数 f_N，g_N，F_N，G_N に対する上界・下界は，非負単調列 $\{a_i\}_1^{N-1}$ を考えると，可成り厳密であることがわかる。

<u>系3.5</u> パラメータ $a = (a_1, a_2, \cdots, a_{N-1})'$ が非負単調非減少列

$$0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{N-1}$$

のとき，問題1～問題4 は共通の最適値と以下の最適点をもつ。

(i) N が偶数のとき，4問題は共通の最適値

(i-a) $$f_N(a) = g_N(a) = F_N(a) = G_N(a) = a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-1}$$

と次の最適点をもつ。

(i-b-1) $$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_N) = (a_1, 0, a_3, 0, a_5, 0, \cdots, a_{N-1}, 0)$$

は問題1の最小点である。

(i-b-2) $$(y_1^*, y_2^*, \cdots, y_{N-1}^*) = (1, 0, 1, 0, 1, \cdots, 0, 1)$$

は問題2の最大点である。

(i-b-3) $$(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_N^*) = (0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, \cdots, 0, a_{N-1})$$

は問題3の最大点である。

(i-b-4) $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \cdots, \hat{y}_{N-1}) = (1, 0, 1, 0, 1, \cdots, 0, 1)$ は問題4の最小点である。

(ii) Nが奇数のとき，4問題は以下の最適解をもつ。

(ii-a)
$$f_N(a) = g_N(a) = a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-1}$$
$$\leqq a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-1} = F_N(a) = G_N(a)$$

(ii-b-1) $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_N) = (0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, \cdots, a_{N-1}, 0)$ は問題1の最小点である。

(ii-b-2) $(y_1^*, y_2^*, \cdots, y_{N-1}^*) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots, 0, 1)$ は問題2の最大点である。

(ii-b-3) $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_N^*) = (a_1, 0, a_2, 0, a_4, 0, \cdots, 0, a_{N-1})$ は問題3の最大点である。

(ii-b-4) $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \cdots, \hat{y}_{N-1}) = (1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots, 0, 1)$ は問題4の最小点である。

参考文献

[1] R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton Univ. Press,NJ, 1957.

[2] 岩本誠一，「動的計画論」，九州大学出版会，1987年.