数理解析研究所講究録
第 726 巻 1990 年 90-96



# 多人数資産処分問題の game 解について

## (A game solution for a multi-person selling assets problem)

千葉大学 理学部 中神潤一 (Jun-ichi NAKAGAMI)

### 1. Introduction

多数の player が、それぞれの資産を売却しようと考えている。それぞれの資産価格は、各期の確率変数で観測される。もし、ある期に複数の player が同時に売却しようとすると、売却希望の人数に応じて各自の資産価格が変動する。(例えば、資産を合併することにより資産価格が上がる場合と、競争相手がいることにより資産価格が下がる場合が考えられる。)

本稿では、上記の問題意識を 2 人非ゼロ和 game の停止問題で定式化し、解 (平衡点) の存在と性質を調べるものである。

player を $i, j (i \neq j; i, j = 1, 2)$ とする (player の数が多くても同様の定式化は可能である)。確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の 4 次元確率変数列 $\{((X_n^i, Y_n^i), (X_n^j, Y_n^j)); n = 1, 2, \cdots\}$ は各期 ($n$ について) 独立とする。$(X_n^i, Y_n^i)$ と $(X_n^j, Y_n^j)$ は互いに独立とする。$E[X_n^i] < \infty, E[Y_n^i] < \infty (i = 1, 2)$ とする。$c^i (i = 1, 2)$ は定数で player $i$ の 1 期当りの観測費用とする。

この確率変数列と費用に対して、次の停止問題を考える。

(a) $n$ 期において player $i, j$ が同時に stop すれば、$i$ は $Y_n^i - nc^i$、$j$ は $Y_n^j - nc^j$ をもらい、観測を停止する。

(b) $n$ 期において player $i$ が stop で、player $j$ が continue ならば、$i$ は $X_n^i - nc^i$ をもらい、観測を停止する。$j$ は $n+1$ 期以後、process $\{X_{n+k}^j; k = 1, 2, \cdots\}$ に対して 1 人で停止問題を行なう。i.e., $j$ は $m$ 期 $(m > n)$ で stop すれば、$X_m^j - mc^j$ をもらい、観測を停止する。

(c) $n$ 期において player $i, j$ が共に contonue ならば、$i, j$ は $n+1$ 期以後も同じ process $\{((X_{n+k}^i, Y_{n+k}^i), (X_{n+k}^j, Y_{n+k}^j)); k = 1, 2, \cdots\}$ に対して 2 人で停止問題を行なう。

ここでは、上記の停止問題を非 0 和·非協力 game として扱うので、player $i$ は自分の資産価格 $(X_n^i, Y_n^i)$ だけを各期に観測して、stop か continue の決定を下すものと仮定する。i.e., player $i$ の停止戦略 (stopping straregy) を表現する停止領域 (stopping region) を $S_n^i (\subset R^2)$ とする。これは確率変数 $(X_n^i, Y_n^i)$ の実現値が領域 $S_n^i$ に入れば stop で、入らなければ continue であることを示す。ここで $S_n^i \in \sigma(X_n^i, Y_n^i)$ である。また、$(X_n^i, Y_n^i)$ と $(X_n^j, Y_n^j)$ は独立と仮定したので、$S_n^i$ と $S_n^j$ も互いに独立になる。

注 : $X_n^i$ と $Y_n^i$ は独立でなくてよい。例えば、$Y_n^i = \varphi_n^i(X_n^i, \xi_n^i)$ 、但し $\varphi_n^i (\in) \mathcal{B}_2, \xi_n^i$ は $(X_n^j, Y_n^j)$ と独立な確率変数としてよい。

以後、記号の便利のため期の番号 $n$ を逆にする。i.e., 期間 $n$ は あと $n$ 回 process を観測できることを示す。

### 2. 1期間問題の定式化

確率変数 $((X_1^i, Y_1^i), (X_1^j, Y_1^j))$ と与えられた定数 $((I_0^i, J_0^i), (I_0^j, J_0^j))$ に対して、次の様に1期間資産処分問題を定義する。

(a) 1期において player $i, j$ が同時に stop すれば、$i$ は $Y_1^i - c^i$、$j$ は $Y_1^j - c^j$ をもらい、終了する。

(b) 1期において player $i$ が stop で、player $j$ が continue ならば、$i$ は $X_1^i - c^i$、$j$ は $I_0^j - c^j$ をもらい、終了する。

(c) 1期において player $i, j$ が共に contonue ならば、$i$ は $J_0^i - c^i$、$j$ は $J_0^j - c^j$ をもらい、終了する。

player $(i, j)$ の停止領域 $(S_1^i, S_1^j)$ に対して、player $i$ の1期の期待利得 $M_1^i$ が次式で定義される。但し、$\bar{A}$ は $A$ の補集合、$E[X; A] \doteq \int_A x\mu_X(dx)$ 、$\mu_X$ は X の確率法則とする。

(1)
$$
\begin{aligned}
M_1^i((S_1^i, S_1^j), (I_0^i, J_0^i)) &= E[Y_1^i - c^i; S_1^i S_1^j] \\
&+E[X_1^i - c^i; S_1^i \bar{S}_1^j] + E[I_0^i - c^i; \bar{S}_1^i S_1^j] + E[J_0^i - c^i; \bar{S}_1^i \bar{S}_1^j] \, .
\end{aligned}
$$

$S_1^i$ と $S_1^j$ が独立なことより、(1) 式は次の表現 (2) になる。

(2)
$$
\begin{aligned}
&M_1^i((S_1^i, S_1^j), (I_0^i, J_0^i)) = \\
&\quad E[P(S_1^j)(Y_1^i - I_0^i) + P(\bar{S}_1^j)(X_1^i - J_0^i) \; ; \; S_1^i] + I_0^i P(S_1^j) + J_0^i P(\bar{S}_1^j) - c^i \, .
\end{aligned}
$$

(2) 式を見ると、player $i$ の利得は 相手 $j$ の stop する確率 $P(S_1^j)$ だけに依存することが分る。$p_1^j \doteq P(S_1^j)$, $\bar{p}_1^j \doteq P(\bar{S}_1^j) = 1 - p_1^j$ とおく。

もし、player $i$ が 相手 $j$ の stop する確率 $p_1^j$ を知っているならば、$i$ は停止領域 $S_1^i$ を次式 (3) の ${}^*S_1^i$ とするのが、$i$ の利得を最大にする。

(3)
$$
{}^*S_1^i(p_1^j) \doteq \{(x, y) \; ; \; \bar{p}_1^j(x - J_0^i) + p_1^j(y - I_0^i) > 0\} \, ,
$$

(4)
$$
\partial^* S_1^i(p_1^j) \doteq \{(x, y) \; ; \; \bar{p}_1^j(x - J_0^i) + p_1^j(y - I_0^i) = 0\} \, .
$$

注: $i$ の利得を最大にする停止領域を (3) 式の 内部 ${}^*S_1^j$で定義したが、(4) 式の境界 $\partial^* S_1^i(p_1^j)$ をこれに含めてもよい。

注 : (3) 式の内部 ${}^*S_1^i(p_1^j)$ は $p_1^j$の値で決る開半平面である。(4) 式の 境界 $\partial^* S_1^i(p_1^j)$ は $xy-$ 座標の直線で、点 $(J_0^i, I_0^i)$ を中心として、$p_1^j$の値が 0 から 1 まで動くとき、縦方向から横方向まで反時計回りに 90 度回転する。

$j$ の stop する確率が $p_1^j$ のとき、$i$ の停止領域 $^*S_1^j$ が定まる。従って、$i$ の stop する確率 $^*p_1^i$ を $p_1^j$ の関数として次式 (5) で定義できる。

$$(5) \qquad {}^*p_1^i(p_1^j) \doteq P({}^*S_1^i(p_1^j)) \; .$$

注：確率変数 $(X_1^i, Y_1^i)$ は高々可算個の不連続部分を持つので、、関数 (5) の不連続点は高々可算個である。また右側及び左側極限値 $^*p_1^i(p_1^j \pm 0)$ は次式 (6) を満足する。

$$(6) \qquad P({}^*S_1^i(p_1^j)) \leq \; {}^*p_1^i(p_1^j \pm 0) \; \leq P(cl^*S_1^i(p_1^j)) = P({}^*S_1^i(p_1^j)) + P(\partial^* S_1^i(p_1^j)) \; .$$

関数 (5) の不連続点を結んで、連続な graph を作る。この graph において、変数 $p_1^j$ で示した集合値関数を新たに $^*p_1^i(p_1^j)$ と定義する (これを (5') とおく)。すると、(5') 式の関数は変数 $p_1^j(0 \leq p_1^j \leq 1)$ の集合値関数として連続になる。

(5') の graph 上の任意の点 $(p_1^i, p_1^j)$ に対して、相手 $j$ の stop する確率 が $p_1^j$ であることを知って、自分の stop する確率 が $p_1^i$ となる、player $i$ の最適停止戦略を次の定義 1. より唯一定めることができる。

**定義 1.**

case(i) : (5) の関数の連続点 $(p_1^i, p_1^j)$ において、player $i$ は

$$(7) \qquad \text{確率 } 1 \text{ で stop する} \quad \text{if } (x,y) \in \text{ 内部}^*S_1^i(p_1^j) \; , \quad \text{with } \; p_1^i = P({}^*S_1^i(p_1^j)) \; .$$

case(ii) : (5) の関数の不連続点を結んだ線分上の点 $(p_1^i, p_1^j)$ において、player $i$ は

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\text{確率 } 1 \text{ で stop する} \quad \text{if} \;\; (x,y) \in \text{ 内部}^*S_1^i(p_1^j) \\ &\text{and} \;\; \text{確率 } \alpha_1^i(p_1^j) \text{ で stop する} \quad \text{if} \;\; (x,y) \in \text{境界}\partial^* S_1^i(p_1^j) \; , \\ &\text{where} \;\; \alpha_1^i(p_1^j) = \frac{p_1^i - P({}^*S_1^i(p_1^j))}{P(\partial^* S_1^i(p_1^j))} \; , \; 0 \leq \alpha_1^i(p_1^j) \leq 1 \; , \\ &\text{with} \;\; p_1^i = P({}^*S_1^i(p_1^j)) + \alpha_1^i(p_1^j) P(\partial^* S_1^i(p_1^j)) \; . \end{aligned}$$

注：この定義 1 の (7)(8) 式で定まる拡張された停止領域を $^*S_1^i(p_1^j)$ と新たに定義する。このとき、停止確率は $p_1^i$となる。

注：境界上で stop する確率を $\alpha_1^i$ とすることにより、全体としての stop する確率を指定された $p_1^i = P({}^*S_1^i(p_1^j)) + \alpha_1^i(p_1^j)P(\partial^* S_1^i(p_1^j))$ にすることができる。この考え方は仮説検定における Neyman-Pearson の補題と同じものである。

注：player $j$ についても定義 1 で同様に最適停止領域$^*S_1^j(p_1^i)$ を定義できる。以後、両 player $(i,j)$ の停止領域 $({}^*S_1^i(p_1^j), {}^*S_1^j(p_1^i))$ 等は拡張したものを用いる。

**3．1 期間問題の平衡点 (equilibrium point)**

この節では、1 期間問題における両 player $(i,j)$ の平衡停止戦略を求める。

**定理 1.** (角谷の不動点定理：例えば [1] p.129 を参照)
$K$を $R^n$上の compact 集合とする。$\mathcal{K}(K)$ を $K$の空でない閉凸集合の族とする。このとき、写像 $f: K \to \mathcal{K}(K)$ が上半連続ならば、不動点$^*p \in K$ such that $^*p \in f(^*p)$ が存在する。

(5') 式で定義された写像 $(^*p_1^i(p_1^j), {}^*p_1^j(p_1^i))$ は $R^n$の compact 集合 $[0,1]\times[0,1]$ からこの中への写像として、上半連続である (集合値関数としては連続)。角谷の定理を使えば、次の方程式 (9) の不動点が存在する。

$$(9) \qquad {}^*p_1^i(p_1^j) = p_1^i, \quad {}^*p_1^j(p_1^i) = p_1^j\ .$$

方程式 (9) の不動点を $(^*p_1^i, {}^*p_1^j)$ とする。すると、この不動点を player $(i,j)$ の停止確率とする拡張された停止領域 $(^*S_1^i(p_1^j), {}^*S_1^j(p_1^i))$ が (7) (8) 式より定まる。従って、以後 player $(i,j)$ の停止戦略を不動点である停止確率 $(^*p_1^i, {}^*p_1^j)$ で表現することもある。

1 期間問題のまとめとして、次の補題 2 つを証明なしで述べる。

**補題 1.** 1 期間問題 $(M_1^i, M_1^j)$ ((2) 式で与えられる) を考える。
任意に与えられた定数 $(I_0^i, J_0^i) i = 1,2,$ に対して、(9) 式で定まる停止戦略 $(^*p_1^i, {}^*p_1^j)$ は平衡点である。i.e., for $\forall S_1^i \in B_1$ ,

$$(10) \qquad M_1^i((^*p_1^i, {}^*p_1^j),(I_0^i, J_0^i)) \geq M_1^i((S_1^i, {}^*p_1^j),(I_0^i, J_0^i)) \ (i=1,2)\ .$$

**補題 2.** for $\forall$ given $(S_1^i, S_1^j) \in B_1 \times B_1$ ,

$$(11) \qquad M_1^i((S_1^i, S_1^j),(I_0^i, J_0^i)) \text{ は } (I_0^i, J_0^i) \text{ の非減少関数である。}$$

## 4. n 期間問題

この節では、n 期間問題における両 player $(i,j)$ の平衡停止政策を求める。

**定義 2.** 数列 $\{I_n^i; i=1,2,\ n=0,1,2,\cdots\}$ の定義。

$$(12) \qquad I_0^i = E[X_0^i] - c^i\ , I_n^i = E[X_0^i - I_{n-1}^i] + I_{n-1}^i - c^i\ .$$

注：(12) 式は player $i$ が 1 人で確率変数列 $\{X_n^i\}$ に対して停止問題をするときの最適解を示すものである。i.e., n 期の最適停止領域は $\{x; X_n^i > I_{n-1}^i\}$ で、n 期の期待利得は $I_n^i$ (reward with Individual stop) となる。

player $i$ の任意の n 期の停止戦略 $S_n^i(1=1,2,\ n=1,2,\cdots)$ に対して、player $i$ の停止政策 (stopping policy )(停止戦略の列) $S^i$ を次式 (13) で定義する。

(13) $$S^i = \{S_1^i, \cdots, S_n^i \cdots\} \ (i = 1, 2) \ .$$

player $(i, j)$ の任意の停止政策 $(S^i, S^j)$ に対して、player $i$ の期待利得 $M_n^i (i = 1, 2, \ n = 1, 2, \cdots)$ を次式で定義する。

(14) $$\begin{aligned} & M_n^i((S_n^i, S_n^j), (I_{n-1}^i, M_{n-1}^i)) \\ & = E[P(S_n^j)(Y_n^i - I_{n-1}^i) + P(\bar{S}_n^j)(X_n^i - M_{n-1}^i) \ ; \ S_n^i] \\ & \quad + I_{n-1}^i P(S_n^j) + M_{n-1}^i P(\bar{S}_n^j) - c^i \ , \\ & \quad \text{where } M_0^i = J_0^i = E[Y_0^i] - c^i \ . \end{aligned}$$

これにより 数列 $\{M_n^i(S_n^i, S_n^j)\}$ が逐次に定義できる。

**定義 3.** 数列 $\{({}^*p_n^i, {}^*p_n^j); \ n = 1, 2, \cdots\}$ と数列 $\{J_n^i; \ n = 0, 1, 2, \cdots\}$ の定義。
$I_0^i = E[X_0^i] - c^i, J_0^i = M_0^i = E[Y_0^i] - c^i, (i = 1, 2)$ であるので、$(I_0^i, J_0^i)(i = 1, 2)$ を用いた方程式 (9) で不動点 $({}^*p_1^i, {}^*p_1^j)$ を 1 つ定める。この不動点を用いて、次式 (15) より $J_1^i (i = 1, 2)$ を求める。以下、順次に $({}^*p_n^i, {}^*p_n^j)$ と $(J_n^i, J_n^j)$ を求めていく。

(15) $$\begin{aligned} J_1^i &= M_1^i(({}^*p_1^i, {}^*p_1^j), (I_0^i, J_0^i)) \\ &= E[{}^*p_1^j(Y_1^i - I_0^i) + {}^*\bar{p}_1^j(X_1^i - J_0^i)]^+ + {}^*p_1^j I_0^i + {}^*\bar{p}_1^j J_0^i - c^i \ . \end{aligned}$$

(16) $$\begin{aligned} J_n^i &= M_n^i(({}^*p_n^i, {}^*p_n^j), (I_{n-1}^i, J_{n-1}^i)) \\ &= E[{}^*p_n^j(Y_n^i - I_{n-1}^i) + {}^*\bar{p}_n^j(X_n^i - J_{n-1}^i)]^+ + {}^*p_n^j I_{n-1}^i + {}^*\bar{p}_n^j J_{n-1}^i - c^i \ . \end{aligned}$$

n 期間問題のまとめとして、次の定理を証明なしで述べる。

**定理 1.** n 期間問題 $(M_n^i, M_n^j)$ ((14) 式で与えられる) を考える。
(9) 式及び (16) 式で定まる停止政策 $({}^*p^i, {}^*p^j)$ は平衡点である。但し、${}^*p^i = \{{}^*p_n^i; \ n = 1, 2, \cdots\}$ ${}^*p^j = \{{}^*p_n^j; \ n = 1, 2, \cdots\}$ 。 i.e.,
任意の 停止政策 $S^i$ defined by (13) に対して、

(17) $$\begin{aligned} J_n^i &= M_n^i(({}^*p_n^i, {}^*p_n^j), (I_{n-1}^i, J_{n-1}^i)) \\ &\geq M_n^i((S_n^i, {}^*p_1^j), (I_{n-1}^i, M_{n-1}^i)) \ (i = 1, 2) \ . \end{aligned}$$

注 : (15)(16) 式は、 player $(i, j)$ が 2 人で確率変数列 $\{((X_n^i, Y_n^i), (X_n^j Y_n^j\}$ に対して平衡政策 $({}^*p^i, {}^*p^j)$ を行なったとき、 player $i$ の n 期の平衡期待利得 $J_n^i$ (reward with Jointly stop) を示す。

注 : (9) 式で定めた不動点は unique でない。従って、平衡点である停止政策 $({}^*p^i, {}^*p^j)$ は無数に存在する。次の 5 節でこれが unique になる具体的例題を解いて見る。

**5. 無限期間問題**　　省略

**6. 例題 (example)**

この節での例題は (9) 式で定めた不動点が unique になるものを考えてみる。

**例題の仮定**

(a) player $i$ と $j$ は同一分布と同一費用をもつとする (player の区別をしない)。i.e.,

$$X_n^i =^L X_n^j =^L X_n \ , \ Y_n^i =^L Y_n^j =^L Y_n \ , \ c^i = c^j = c \ .$$

但し、$X =^L Y$ は確率変数 $X$ と $Y$ が同一の分布関数をもつことを示す。この仮定 (a) があると (9) の方程式が player $i$ と $j$で同じになる。

(b) 各期 ($n$ について) 同一分布とする。i.e.,

$$X_n =^L X_{n-1} =^L X, \ Y_n =^L Y_{n-1} =^L Y.$$

(c) $Y = aX(a \in [0, \infty))$ とする。
この仮定 (c) があると (3)(3') で定まる停止領域が半平面 (2 次元) でなく半直線 (1 次元) になる。i.e., 確率変数 $X$がある値より大きくなれば stop することになる。
$a$ の値について、次の 2 つの分類が考えられる。
$(0 \le a < 1)$ 競走相手がいることで自分の資産価値が下がる場合⇒ $J_n \le I_n$ がいえる。
$(1 \le a < \infty)$ 相手と資産を合併し自分の資産価値が上がる場合⇒ $J_n \ge I_n$ がいえる。

(d) 確率変数 $X$ は区間 $(0, 1)$ の一様分布に従う。$c = 0$ とする。
一般に、確率変数 $(X, Y)$ が Lebesgue 測度に対して密度をもてば、停止領域 ${}^*S_n^i$ は $P(\partial^* S_1^i) = 0$ となり、定義 1 の case(ii) の場合だけになる。また、$X$が有界ならば、$c = 0$ でも無限期間問題を考えることができる。

以上の仮定の下で、player $(i, j)$ が同じ政策になる不動点を見つけることにする。

**例題の解**

(3) の${}^*S$の定義 : $\bar{p}(x - J)) + p(y - I) > 0$ に仮定 (c) の $y = ax$ を代入する。

$${}^*S = \{x > (pI + \bar{p}J)/(\bar{p} + pa) \doteq^* x\} \ .$$

仮定 (d) の一様分布を代入し、(9) の不動点${}^*p$ を求める。

$${}^*p = P(X >^* x) = 1 -^* x \ .$$

(18) $$^*\bar{p} = (^*pI +^* \bar{p}J)/(^*\bar{p} +^* pa)\ .$$

(18) の右辺は、$^*\bar{p}$の値が 1 から 0 まで動くとき、$J(< 1)$ から $I/a(> 0)$ まで変化する。従って、区間 $(0,1)$ の根は奇数個になる。また、(18) は$^*p$ の 2 次方程式なので、$^*p$ の区間 $(0,1)$ の根は唯一存在することが保証される。

(18) に $I = I_0 = 1/2,\ J = I_0 = 1/2$ を代入して、2 次方程式から$^*p_1$を計算する。次式より 1 期の停止領域 $^*S_1$ と期待利得 $J_1$ が得られる。

$$^*S_1 = \{x > 1 -^* p_1\}\ .$$

(19) $$J_1 = E[^*p(aX - 1/2) +^* \bar{p}(X - 1/2)]^+ + 1/2\ .$$

上で得られた $J = J_1$ と (12) 式より得られる $I = I_1$を (18) 代入して$^*p_2$を求め、これを (19) に代入して、2 期の期待利得 $J_2$を得る。以下同様にして、$^*p_n$, $J_n$を計算していく。

## 参考文献

[1] Store,J. and C.Witzgall, *Convexity and Optimization in Finite Dimentions I,* Springer-Verlag, Berlin, (1970).