数理解析研究所講究録
726巻 1990年 37-43

不完全修理を伴うシステムの最適取り替え

愛知工業大学　大鋳　史男

序 何らかの事象が non-homogeneous Poisson process $\{N(t), t\geq 0\}$ に従って発生するものとする。事象発生時点で何らかの action を取り，action の結果成功であれば過程はそこで kill される。不成功であれば継続して事象が発生する。action に要する時間は無視できるとする。N 回目の事象発生時点で action の結果が初めて成功であるとすれば，過程が kill されるまでの時間は S_N である。ここで $S_k \equiv \inf\{t \mid N(t)=k\}$ である。

例えば，計算機が処理しなければならない task が non-homogeneous Poisson process に従って発生し，各 task の処理の結果が成功，不成功であれば S_N は初めて task の処理が成功するまでの時間を表わす。又故障が non-homogeneous Poisson process に従って発生し，各故障に対する action の結果が完全修理，不完全修理であれば，S_N は初めて完全修理が行なわれるまでの時間を表わす。

我々の関心は S_N の分布関数の確率的単調性と，S_N 以前にある定まった時刻で過程を stop する時，どの時点で stop させれば最適かという問題である。最適規準は long-run average cost である。

Formulation and Results

仮定 ① $\{N(t),\ t\geq 0\}$: continuous intensity function $\lambda(t)$ を持つ non-homogeneous Poisson process , $\Lambda(t)\equiv\int_0^t\lambda(u)du$, $S_k\equiv\inf\{t\mid N(t)=k\}$

② N : positive integer valued random variable で $\{S_k\}_{k=1}^\infty$ に対する randomized stopping time[6], i.e.,

$$\forall k\geq 1,\ \Pr\{N>k\mid S_1,\dots,S_k,S_{k+1},\dots\}=\Pr\{N>k\mid S_1,\dots,S_k\}.$$

Nの性質 ① $\forall k\geq 1$, $\Pr\{N>k\mid S_1,\dots,S_k,S_{k+1}\}=\Pr\{N>k\mid S_1,\dots,S_k\}$

② $\forall k\geq 1$, $\Pr\{N>k\mid S_k,S_{k+1}\}=\Pr\{N>k\mid S_k\}$.

Proof: ①は仮定②から直接導かれる。②は仮定②と S_k の定義とから導かれる。 〈証明終〉

S_N の分布 $\Pr\{S_N>t\}=\sum_{k=1}^\infty\Pr\{N=k,\ S_k>t\}$

$$=\sum_{k=1}^\infty\int_t^\infty\Pr\{N=k\mid S_k=y\}\,e^{-\Lambda(y)}\frac{[\Lambda(y)]^{k-1}}{(k-1)!}\lambda(y)dy$$
$$=\sum_{k=0}^\infty\Pr\{N>k,\ N(t)=k\}=e^{-\Lambda(t)}+e^{-\Lambda(t)}\sum_{k=1}^\infty\int_0^t\Pr\{N>k\mid S_k=y\}\frac{[\Lambda(y)]^{k-1}}{(k-1)!}\lambda(y)dy=\sum_{k=1}^\infty\Pr\{N\geq k\mid S_k=t\}\frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\Lambda(t)}.$$

Proof: 第1番目, 第2番目の等号は明らか。第3番目の等号は $S_k>t \Leftrightarrow N(t)<k$ に注意すれば明らか。第4番目の等号は, $k\geq 1$ の時

$$\Pr\{N>k,\ N(t)=k\}=\Pr\{N>k,\ S_k\leq t<S_{k+1}\}$$
$$=\int_0^t\int_t^\infty\Pr\{N>k\mid S_k=y,\ S_{k+1}=x\}\frac{[\Lambda(y)]^{k-1}}{(k-1)!}\lambda(y)\lambda(x)e^{-\Lambda(x)}dxdy$$
$$=\int_0^t\Pr\{N>k\mid S_k=y\}\frac{[\Lambda(y)]^{k-1}}{(k-1)!}\lambda(y)e^{-\Lambda(t)}dy$$

であることから明らか。

第5番目の等号は

$$\Pr\{N \geq k \mid S_k = t\} = \int_0^t \Pr\{N \geq k \mid S_{k-1} = s, S_k = t\} \Pr\{S_{k-1} \in ds \mid S_k = t\}$$
$$= \int_0^t \Pr\{N \geq k \mid S_{k-1} = s\} \Pr\{S_{k-1} \in ds \mid S_k = t\},$$
$$\Pr\{S_{k-1} \in ds \mid S_k = t\} = \frac{[\Lambda(s)]^{k-2}/(k-2)!}{[\Lambda(t)]^{k-1}/(k-1)!}\lambda(s)ds$$

であることを用いて明らか。　〈証明終〉

S_N の密度関数

$$\frac{d}{dt}\Pr\{S_N \leq t\} = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N = k \mid S_k = t\} e^{-\Lambda(t)} \frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!}\lambda(t) \quad .$$

Proof: $\Pr\{S_N > t\}$ を直接微分すればよい。　〈証明終〉

Notations. $F_N(t) \equiv \Pr\{S_N \leq t\}$, $\bar{F}_N(t) \equiv 1 - F_N(t)$,

$f_N(t) \equiv d\Pr\{S_N \leq t\}/dt$, $\lambda_N(t) \equiv f_N(t)/\bar{F}_N(t)$,

$$\lambda(k,t) \equiv \Pr\{N = k \mid N \geq k, S_k = t\} = \frac{\Pr\{N = k \mid S_k = t\}}{\Pr\{N \geq k \mid S_k = t\}} .$$

Theorem. $\lambda(k,t) \uparrow_{k,t}$, $\lambda(t) \uparrow_t$, $\Pr\{N \geq k \mid S_k = t\}$: TP_2 in k, t [4] $\Rightarrow \lambda_N(t) \uparrow_t$.

Proof: $\Delta > 0$ として

$$\lambda_N(t) \leq \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N \geq k \mid S_k = t\} \lambda(k, t+\Delta) \lambda(t+\Delta) \frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N \geq k \mid S_k = t\} \frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!}}$$
$$\leq \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N \geq k \mid S_k = t\} \lambda(k, t+\Delta) \lambda(t+\Delta) \frac{[\Lambda(t+\Delta)]^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N \geq k \mid S_k = t\} \frac{[\Lambda(t+\Delta)]^{k-1}}{(k-1)!}}$$
$$\leq \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N \geq k \mid S_k = t+\Delta\} \lambda(k, t+\Delta) \lambda(t+\Delta) \frac{[\Lambda(t+\Delta)]^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N \geq k \mid S_k = t+\Delta\} \frac{[\Lambda(t+\Delta)]^{k-1}}{(k-1)!}} .$$

第1番目の不等号は $\lambda(k,t) \uparrow_t$, $\lambda(t) \uparrow_t$ であることから，第2番目の不等号は basic composition theorem [4] と $\lambda(k,t) \uparrow_k$ であ

ることから，第3番目の不等号は basic composition theorem, $\lambda(k,t)\uparrow k$, $\Pr\{N\geq k \mid S_k=t\}$: TP_2 in k, t であることから成立する。〈証明終〉

<u>Remark.</u> $\lambda(k,t)\uparrow k,t$ と $\Pr\{N\geq k \mid S_k=t\}$: TP_2 in k,t との間には一般には直接の関係はない。〈Remark 終〉

Tを非負実数とし，$C(T)$を次のように定める。

$$C(T)=\begin{cases} cN+a+b_1, & S_N\leqq T, \\ cN(T)+a+b_2, & S_N>T. \end{cases}$$

ここで $c\geqq 0$, $a\geqq 0$, $b_1\geqq 0$, $b_2\geqq 0$ である。

$$\mathbb{C}(T)\equiv\frac{E[C(T)]}{E[\min(S_N,T)]}$$

とし，$\mathbb{C}(T)$を最小にするTが存在するための十分条件を提示する。

<u>Theorem.</u> $$\mathbb{C}(T)=\frac{a+b_1+(b_2-b_1)\bar{F}_N(t)+c\int_0^T\lambda(x)\bar{F}_N(x)dx}{\int_0^T\bar{F}_N(x)dx}.$$

<u>Proof:</u> $E[\min(S_N,T)]=\int_0^T\bar{F}_N(x)dx$ は明らか。分子を考える。$E[C(T)]=E[cN+a+b_1;S_N\leqq T]+E[cN(T)+a+b_2;T<S_N]$.

$=a+b_1+(b_2-b_1)\Pr\{T<S_N\}+c\{E[N;S_N\leqq T]+E[N(T);T<S_N]\}$.

$E[N;S_N\leqq T]=\sum_{k=1}^\infty k\Pr\{N=k,S_k\leqq T\}$.

$E[N(T);T<S_N]=\sum_{k=1}^\infty k\Pr\{N(T)=k,T<S_N\}$,

$\Pr\{N(T)=k,T<S_N\}=\sum_{n=k+1}^\infty\Pr\{N(T)=k,T<S_n,N=n\}$

$= \Pr\{S_k \leq T < S_{k+1}, N \geq k+1\} = \Pr\{S_k \leq T, N \geq k+1\} - \Pr\{S_{k+1} \leq T, N \geq k+1\}$

故 $E[N(T); T < S_N] = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr\{S_k \leq T, N \geq k+1\} - \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \Pr\{S_k \leq T, N \geq k\}$。 以上から

$$E[N; S_N \leq T] + E[N(T); T < S_N] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{S_k \leq T, N \geq k\}.$$

$k \geq 2$ の時

$$\Pr\{S_k \leq T, N \geq k\} = \int_0^T \int_0^x \Pr\{N \geq k \mid S_{k-1} = y, S_k = x\} \Pr\{S_{k-1} \in dy, S_k \in dx\}$$
$$= \int_0^T \int_0^x \Pr\{N \geq k \mid S_{k-1} = y\} \frac{[\Lambda(y)]^{k-2}}{(k-2)!} \lambda(y) \lambda(x) e^{-\Lambda(x)} dy\, dx .$$

従って

$$E[N; S_N \leq T] + E[N(T); T < S_N] = \int_0^T \lambda(x) \bar{\bar{F}}_N(x) dx.$$ 〈証明終〉

簡単な計算により

$dC(T)/dT$ の分子 $= \bar{\bar{F}}_N(T) \{ \tilde{\lambda}(T) \int_0^T \bar{\bar{F}}_N(x) dx - \int_0^T \tilde{\lambda}(x) \bar{\bar{F}}_N(x) dx - (a + b_2) \}$,

$\tilde{\lambda}(t) \equiv c\lambda(t) - (b_2 - b_1) \lambda_N(t)$ 。

<u>Lemma.</u> ① $b_1 \geq b_2$, $\lambda(t) \uparrow t$, $\lambda(k,t) \uparrow k, t$, $\Pr\{N \geq k \mid S_k = t\}$: TP_2 in k, t $\Rightarrow$ $\tilde{\lambda}(t) \uparrow t$ 。

② $b_2 \geq b_1$, $c \geq b_2 - b_1$, $\lambda(t) \uparrow t$, $\lambda(k,t) \downarrow k, t$, $\Pr\{N \geq k \mid S_k = t\}$: TP_2 in k, t $\Rightarrow$ $\tilde{\lambda}(t) \uparrow t$ 。

<u>Proof:</u> ① 条件下で $\lambda_N(t) \uparrow t$ はすでに示されているから $\tilde{\lambda}(t) \uparrow t$ は明らか。

② $$\tilde{\lambda}(t) = \lambda(t) \left\{ c - (b_2 - b_1) \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N \geq k \mid S_k = t\} \lambda(k,t) \frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N \geq k \mid S_k = t\} \frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!}} \right\} .$$

条件から { } 内分数式は t に関して減少故

$$\tilde{\lambda}(t) = (c - b_2 + b_1)\lambda(t) + (b_2 - b_1)\lambda(t)\left\{1 - \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P_r\{N \geqq k \mid S_k = t\}\lambda(k,t)\frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum_{k=1}^{\infty} P_r\{N \geqq k \mid S_k = t\}\frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!}}\right\}$$

は t に関して増加である。　〈証明終〉

$$h(t) \equiv \tilde{\lambda}(T)\int_0^T \bar{F}_N(x)dx - \int_0^T \tilde{\lambda}(x)\bar{F}_N(x)dx \text{ 。}$$

Theorem.　Lemma ①又は②それぞれの条件下で，$h(T)\uparrow_T$ であり，さらに $h(T)$ が連続で $\lim_{T\to\infty} h(T) > a + b_2$ であれば，$h(T) = a + b_2$ を満たす T が存在し，この T が $C(T)$ を最小にする T である。$\{T \mid h(T) = a + b_2\}$ は連結集合である。

Proof:　後半は明らかである。前半は次の通り。$\tilde{\lambda}(T)\uparrow_T$ であるから，$\Delta > 0$ として

$$\begin{aligned} h(T+\Delta) - h(T) &= \{\tilde{\lambda}(T+\Delta) - \tilde{\lambda}(T)\}\int_0^{T+\Delta} \bar{F}_N(x)dx + \tilde{\lambda}(T)\int_T^{T+\Delta} \bar{F}_N(x)dx \\ &\quad + \int_0^T \{\tilde{\lambda}(T) - \tilde{\lambda}(x)\}\bar{F}_N(x)dx \\ &\geqq 0 \text{ 。} \end{aligned}$$

〈証明終〉

References

[1] Barlow, R.E. and L.C. Hunter (1960) Optimal Preventive Maintenance Policies, Operations Research 8, 90-110.

[2] Brown, M. and F. Proschan (1983) Imperfect Repair, J. Appl. Prob. 20, 851-859.

[3] Block, H.W., W.S. Borges and T.H. Savits (1985) Age-dependent Minimal Repair, J. Appl. Prob. 22, 370-385.

[4] Karlin, S. (1968) Total Positivity, Vol.1. Stanford,

Calif. : Stanford University Press.

[5] Nummelin, E. (1980) A General Failure Model : Optimal Replacement with State Dependent Replacement and Failure Costs, Math. OR 5, 381-387.

[6] Pitman, J. W. and T. P. Speed (1973) A Note on Random Times, Stochastic Processes and their Applications 1, 369-374.

[7] 小和田正 (1983) 確率過程とその応用, 実教出版株式会社.