174
数理解析研究所講究録
第727巻 1990年 174-183

Algebraic automorphic representations

(L. Clozel, Motifs et formes automorphes の紹介)

T. WATANABE

保型表現と Motif との関係を記述するための１つの定式化が１０年程前 Langlands によって与えられた。それは、Isobaric 表現と呼ばれる GL_n の保型表現の或クラス $Isob$ を定義し、

"$Isob$ を表現圏として持つ群 $\mathcal{G}_{Isob}$ と Motif のカテゴリーを表現圏として持つ群 $\mathcal{G}_{Mot}$ との間に或準同型 $\mathcal{G}_{Isob} \to \mathcal{G}_{Mot}$ が存在する。"

というものである。(ここで、$\mathcal{G}_{Isob}, \mathcal{G}_{Mot}$, 及び、"Motif のカテゴリー" はまだ仮想的なものである)。しかしながら、$Isob$ は Motif との対応を考える上で、まだ "大きすぎる" と思われる。(c.f. [5, p. 211], [3, p.189]) 。今回紹介する論文の中で Clozel は、Isobaric 表現の無限素点に於ける成分に或条件を付けることによって、Algebraic 表現と呼ばれる保型表現のクラス Alg を定義した。そして Alg の要素は "$\overline{\mathbf{Q}}$ 上定義" されかつ "Motif が対応" すると予想している。以下ではその定義と簡単な例、及び主な予想と結果について説明する。

体はすべて標数 0
$G_n = GL_n$
$P = P(n_1, \cdots, n_r) \subset G_n$: standard parabolic subgroup with Levi part $\prod_i G_{n_i}$

1. Langlands subquotient.

L: local field
σ_i: $G_{n_i}(L)$ の２乗可積分表現 (modulo the center)
$^\exists s_i \in \mathbf{R}$: $|\sigma_i(z)| = |z|_L^{s_i}$, $^\forall z \in$ the center of $G_{n_i}(L) \cong L^*$
$\sigma = \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_r$: $P(L)$ の表現 (unipotent radical では trivial)
$\rho(\sigma) = \rho(\sigma_1, \cdots, \sigma_r) = \mathrm{Ind}_{P(L)}^{G_n(L)} \sigma$: ユニタリ誘導表現とするとき

<u>*Langlands subquotient*</u>
$^{\exists_1} J(\sigma_1, \cdots, \sigma_r)$: $\rho(\sigma_1, \cdots, \sigma_r)$ の irr. subquotient
(1.1) $J(\sigma_1, \cdots, \sigma_r) \cong J(\sigma_{\tau(1)}, \cdots, \sigma_{\tau(r)})$, ($^\forall \tau \in S_r$: permutations)
(1.2) $s_{\tau(1)} \geq s_{\tau(2)} \geq \cdots \geq s_{\tau(r)} \Longrightarrow J(\sigma_{\tau(1)}, \cdots, \sigma_{\tau(r)})$ は $\rho(\sigma_{\tau(1)}, \cdots, \sigma_{\tau(r)})$ の unique irr. quotient

逆に $G_n(L)$ の任意の irr. admissible rep. は適当な $J(\sigma_1, \cdots, \sigma_r)$ と同型になる

2. Isobaric 表現

F: 代数体
$\mathbf{A}$: F のアデール
σ_i: $G_{n_i}(\mathbf{A})$ の cuspidal rep.

$\sigma = \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_r$: $P(\mathbf{A})$ の表現 (unipotent radical では trivial)
$\rho(\sigma) = \rho(\sigma_1, \cdots, \sigma_r) = \mathrm{Ind}_{P(\mathbf{A})}^{G_n(\mathbf{A})} \sigma = \otimes_v \rho(\sigma_v)$ (制限テンソル積)

このとき

(2.1) $\qquad \pi$: $G_n(\mathbf{A})$ の irr. automorphic rep. $\Longleftrightarrow \pi$ は $^\exists \rho(\sigma)$ の irr. subquotient

が成立。更に

$$\sigma_i = \otimes \sigma_{i,v} : \text{ cuspidal rep.} \Longrightarrow \sigma_{i,v} : \text{generic}$$
$$\Longrightarrow \sigma_{i,v} = \mathrm{Ind}_{P_i(F_v)}^{G_{n_i}(F_v)} \tau_{i,v} \quad {}^\exists P_i \subset G_{n_i},\ {}^\exists \tau_{i,v} \ : \text{ square int.}$$

より、$\tau_{i,v} = \tau_{i,v}^1 \otimes \cdots \otimes \tau_{i,v}^{r_i}$ とすれば

$$\rho(\sigma_v) = \rho(\sigma_{1,v}, \cdots, \sigma_{r,v}) = \rho(\tau_{1,v}^1, \cdots, \tau_{1.v}^{r_1}, \tau_{2,v}^1, \cdots, \tau_{2,v}^{r_2}, \cdots, \tau_{r,v}^1, \cdots, \tau_{r,v}^{r_r})$$

だから、$\rho(\sigma_v)$ の Langlands subquotient $J(\sigma_v)$ がある。このことから、

Definition
$\sigma = \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_r$: $\prod_i G_{n_i}(\mathbf{A})$ の cuspidal rep. に対して π : irr. subquotient of $\rho(\sigma)$ s.t. $\pi_v \cong J(\sigma_v)$ for all v なる表現は $G_n(\mathbf{A})$ の irr. automorphic rep になる。この様な表現 π を isobaric 表現 と呼び $\pi = \sigma_1 + \cdots + \sigma_r$ とかく。ここで

(2.2) $\qquad \sigma_1 + \cdots + \sigma_r \cong \sigma'_1 + \cdots + \sigma'_t \Longleftrightarrow r = t\ ,\ \sigma_i = \sigma'_{\tau(i)} \quad ({}^\exists \tau \in S_r)$

が成立する。

$Isob(n)$: $G_n(\mathbf{A})$ の isobaric 表現 の集合
$Isob = \coprod Isob(n)$

Isob のなかの和と積
$\pi^1 = \sigma_1^1 + \cdots + \sigma_r^1 \in Isob(a)$, $\pi^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_t^2 \in Isob(b)$ に対して

$$\pi^1 + \pi^2 = \sigma_1^1 + \cdots + \sigma_r^1 + \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_t^2 \in Isob(a+b)$$

とする。積については次の予想がある。$\pi \in Isob(n)$ について π_v が不分岐のとき $t_{\pi,v}$ を π_v に対応する ${}^L G_n^0 = G_n(\mathbf{C})$ のなかの対角行列とするとき

Conjecture A
$\pi^1 \in Isob(a)$, $\pi^2 \in Isob(b)$ に対して

$$^\exists \pi \in Isob(ab) \quad \text{s.t.} \quad t_{\pi,v} = t_{\pi^1,v} \otimes t_{\pi^2,v} \quad \text{for almost all } v$$

このとき $\pi = \pi^1 \times \pi^2$ とかく。

3. Algebraic automorphic representations
簡単のため F は総実と仮定する。
$H_n \subset G_n$: diagonal matrices
${}^L H_n^0$: complex diagonal matrices
$X^*(H_n) = \mathrm{Hom}(H_n, G_1) = X_*({}^L H_n^0) = \mathrm{Hom}(G_1, {}^L H_n^0) \cong \mathbf{Z}^n$
$\mathcal{H} = X_*({}^L H_n^0) \otimes \mathbf{C} = \mathrm{Hom}(\mathrm{Lie}(H_n)_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) \cong \mathbf{C}^n$
$\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathcal{H}$, $z \in \mathbf{C}^*$ に対して

$$z^\mu = \mathrm{diag}(z^{\mu_1}, \cdots, z^{\mu_n}) \in {}^L H_n^0$$

とかけば $r \in \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^*, {}^L H_n^0)$ は

$$r(z) = z^\mu \overline{z}^\nu \qquad \mu\,,\ \nu \in \mathcal{H}, \quad \mu - \nu \in X^*(H_n)$$

と表せる。一方 Harish-Chandra isomorphism: $Z(\mathcal{G}) \cong \mathcal{U}(\mathrm{Lie}(H_n)_{\mathbf{C}})^{S_n}$ より

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(Z(\mathcal{G}), \mathbf{C}) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{H}/S_n \\ \chi_\lambda & \longrightarrow & \lambda \end{array}$$

をもつ。さて

$W_{\mathbf{R}} = \mathbf{C}^* \times \{c\}$: Weil group of $\mathbf{R}$, $c^2 = -1$, $czc^{-1} = \overline{z}$
$\Phi_n(W_{\mathbf{R}})$: semisimple admissible rep. $W_{\mathbf{R}} \to {}^L G_n^0$ の同値類
$\mathrm{Irr}(G_n(\mathbf{R}))$: $G_n(\mathbf{R})$ の irr. admissible rep. の同値類

とおけば、全単射

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Irr}(G_n(\mathbf{R})) & \longleftrightarrow & \Phi_n(W_{\mathbf{R}}) \\ \pi & \longleftrightarrow & r \\ \chi_\pi = \chi_\mu & & r(z) = z^\mu \overline{z}^\nu \quad (z \in \mathbf{C}^*) \end{array}$$

がある。(χ_π は π の infinitesimal character). この対応で

$$p(\pi) = \mu - (\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}, \cdots, \frac{n-1}{2}) = (\mu_1 - \frac{n-1}{2}, \mu_2 - \frac{n-1}{2}, \cdots, \mu_n - \frac{n-1}{2}) \in \mathcal{H}/S_n$$

とおく。

Definition
I: set of all real places of F
$\pi = \otimes \pi_v \in Isob(n)$ について

$$\pi : \text{algebraic} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad p(\pi_v) \in X^*(H_n)/S_n \qquad ({}^\forall v \in I)$$

と定義する。このとき $p(\pi) = (p(\pi_v))_{v \in I} \in (\mathbf{Z}^n/S_n)^I$ を π の "infinite type" という。

$Alg(n)$: $G_n(\mathbf{A})$ の algebraic 表現の集合。
$Alg^0(n)$: $G_n(\mathbf{A})$ の cuspidal algebraic 表現の集合。

$Alg = \coprod Alg(n)$

<u>Alg のなかの和と積</u>
$\pi \in Isob(n)$ のとき、$\pi|\cdot|^s : g \mapsto \pi(g)|g|^s$ とする。
$\pi^1 \in Alg(a)$, $\pi^2 \in Alg(b)$ に対して、

$$\pi^1 \overset{T}{+} \pi^2 = \left(\pi^1|\cdot|^{\frac{1-a}{2}} + \pi^2|\cdot|^{\frac{1-b}{2}}\right)|\cdot|^{\frac{a+b-1}{2}} \in Alg(a+b)$$

Conjecture A のもとで、

$$\pi^1 \overset{T}{\times} \pi^2 = \left(\pi^1|\cdot|^{\frac{1-a}{2}} \times \pi^2|\cdot|^{\frac{1-b}{2}}\right)|\cdot|^{\frac{ab-1}{2}} \in Alg(ab)$$

と定義する。次が成立。

(3.1) $\quad {}^\forall \pi \in Alg(n) \quad {}^\exists \pi^i \in Alg^0(n_i) \quad ; \quad \pi \cong \pi^1 \overset{T}{+} \pi^2 \overset{T}{+} \cdots \overset{T}{+} \pi^r$

<u>*Examples*</u>
(1) $n = 1$ の場合。
$\pi = \otimes \pi_v \ : \ G_1(\mathbf{A}) \to \mathbf{C}^*$: Grössencharakter
$\pi_v \longleftrightarrow r_v \in \Phi_1(W_{\mathbf{R}})\,, \quad (v \in I)$
$S = (W_{\mathbf{R}} : W_{\mathbf{R}}) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$: derived group of $W_{\mathbf{R}}$
従って、

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathbf{C}^* & \longrightarrow & W_{\mathbf{R}} & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
1 & \longrightarrow & \mathbf{C}^*/S & \longrightarrow & W_{\mathbf{R}}/S & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \| & & & & \\
 & & \mathbf{R}_+^* & & \mathbf{R}^* & & & &
\end{array}$$

より、$r_v|_{\mathbf{C}^*} = \pi_v|_{\mathbf{R}_+^*} = |\cdot|^{\mu_v}$. 故に

$$\pi \in Alg(1) \Longleftrightarrow \mu_v \in \mathbf{Z}\,,\ (v \in I) \Longleftrightarrow \pi \ : \ \text{algebraic Hecke character}$$

(2) $n = 2, \quad F = \mathbf{Q}$ の場合。
$G_2(\mathbf{R})$ の irr. admissible rep. の分類。$SL_2(\mathbf{R})$ への制限がユニタリのものを考える。
$\alpha = |\cdot|_{\mathbf{R}}$
$\pi(\xi_1, \xi_2) = J(\xi_1, \xi_2)\,, \quad \xi_i = \alpha^{s_i}\mathrm{sgn}^{\epsilon_i} \quad (s_i \in \mathbf{C},\ \epsilon_i \in \mathbf{Z})$: Langlands subquotient
$\sigma(\xi_1, \xi_2) = \rho(\xi_1, \xi_2)/\pi(\xi_1, \xi_2) \quad \text{if } |s_1| \le |s_2|$

principal series :	$\pi(\xi_1, \xi_2)$	$s_1 - s_2 \in \sqrt{-1}\mathbf{R}$	$\epsilon_1 = \epsilon_2$
		$s_1 - s_2 \in \sqrt{-1}\mathbf{R} - \{0\}$	$\epsilon_1 \neq \epsilon_2$
complementary series :	$\pi(\xi_1, \xi_2)$	$s_1 - s_2 \in (-1, 1) - \{0\}$	$\epsilon_1 = \epsilon_2$
limit of discrete series :	$\pi(\xi_1, \xi_2)$	$s_1 - s_2 = 0$	$\epsilon_1 \neq \epsilon_2$
trivial rep. :	$\pi(\xi_1, \xi_2)$	$s_1 - s_2 = 1$	$\epsilon_1 = \epsilon_2$
discrete series :	$\sigma(\xi_1, \xi_2)$	$0 > s_1 - s_2 \in \mathbf{Z}$	$\epsilon_1 + \epsilon_2 \equiv s_1 - s_2 - 1 \pmod 2$

π : irr automorphic rep. of $G_2(\mathbf{A})$
π_∞ : infinity component of π は上記の表現の一つと同型になり、このとき $p(\pi) = (s_1 - 1/2, s_2 - 1/2)$ だから、

$$\pi \in Alg(2) \Longleftrightarrow p(\pi) \in \mathbf{Z}^2 \Longrightarrow s_1 - s_2 \in \mathbf{Z}$$

故に、π_∞ は次のいづれかになる。

(1)	$\pi(\alpha^s, \alpha^s)$	$s \in \frac{1}{2} + \mathbf{Z}$	$\longleftrightarrow$	weight 0 の保型形式
(2)	$\pi(\alpha^s, \alpha^s \mathrm{sgn})$	$s \in \frac{1}{2} + \mathbf{Z}$	$\longleftrightarrow$	weight 1 の保型形式
(3)	$\sigma(\alpha^s, \alpha^{s+k}\mathrm{sgn}^{k+1})$	$1 \leq k \in \mathbf{Z}$, $s \in \frac{1}{2} + \mathbf{Z}$	$\longleftrightarrow$	weight $k+1$ の保型形式
(4)	$\alpha^s \circ \det$	$s \in 2\mathbf{Z}$		

4. The field of rationality of an automorphic representation
一般に
G : totally disconnected topological group
(π, V) : smooth representation of G over $\mathbf{C}$
$\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ について $({}^\sigma\pi, {}^\sigma V)$: smooth rep. of G を ${}^\sigma V = V \otimes_{\mathbf{C},\sigma^{-1}} \mathbf{C}$, ${}^\sigma\pi(g)(v \otimes z) = (\pi(g)v) \otimes z$ で定義して、 $\mathbf{Q}(\pi)$ を $\mathbf{C}$ の $\{\sigma \mid {}^\sigma\pi \cong \pi\}$ による固定体とする。とくに $G = G_n(\mathbf{A}_f)$ or $G_n(F_v)$ (v : finite place) の場合を考える。今

$\pi = \otimes\pi_v$: irr. admissible rep. of $G_n(\mathbf{A})$
$\pi_f = \otimes_{v:\mathrm{finite}}\pi_v$: irr. smooth rep. of $G_n(\mathbf{A}_f)$

に対して $E = \mathbf{Q}(\pi) = \mathbf{Q}(\pi_f)$ を the field of rationality of π_f という。次が証明できる。

(4.1) ${}^\exists V_E \subset V$: $G_n(\mathbf{A}_f)$-invariant subspace over E such that $V = V_E \otimes_E \mathbf{C}$
(4.2) V_E is unique up to complex homotheties
(4.3) $\mathbf{Q}(\pi) = \prod_{v:\mathrm{finite}} \mathbf{Q}(\pi_v)$

<u>不分岐表現の場合</u>
L : p-adic field
$\chi = (\chi_1, \cdots, \chi_n)$: unramified character of $H_n(L)$
$\pi^T(\chi) = J(\chi_1|\cdot|^{\frac{n-1}{2}}, \cdots, \chi_n|\cdot|^{\frac{n-1}{2}})$: Langlands subquotient
$t_\chi = (\chi_1(\varpi_L), \cdots, \chi_n(\varpi_L)) \in {}^L H_n^0$
とおく。このとき

(4.4) ${}^\sigma(\pi^T(\chi)) \cong \pi^T({}^\sigma\chi)$ for any $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C})$
(4.5) $\mathbf{Q}(\pi^T(\chi)) = \mathbf{C}$ の $\{\sigma \mid \sigma(t_\chi) \in S_n t_\chi\}$ による固定体

が成立。$\pi = \pi^T(\chi)$ のとき $t_\pi^T = q_L^{\frac{1-n}{2}} t_\chi \in {}^L H_n^0 / S_n$ とおく。

<u>Euler factor との関係</u>
π : irr. admissible rep. of $G_n(L)$

$L(\pi,s)$: (Godement - Jacquet type) Euler factor of π, i.e.

$$\text{P.G.C.D.}\left\{\int_{G_n(L)} \Phi(g)f(g)|\det g|^{s+\frac{n-1}{2}}d^\times g \;\middle|\; \begin{array}{l}\Phi \in \text{Schwartz space of } M_n(L)\\ f : \text{coefficient of } \pi\end{array}\right\}$$

次が証明できる。

(4.6) $L(\pi, s+\frac{1-n}{2}) = P(q_L^{-s})^{-1}$, $(P \in \mathbf{C}[X],\ P(0)=1)$ とするとき $L({}^\sigma\pi, s+\frac{1-n}{2}) = {}^\sigma P(q_L^{-s})^{-1}$ $\forall\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C})$. (${}^\sigma P$ は P の係数に σ を作用させたもの)

Infinite type への Aut(**C**) の作用

$\pi \in Alg(n)$
$p(\pi) = p = (p_\iota)_{\iota\in I} \in (\mathbf{Z}^n/S_n)^I$: infinite type of π
$\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ に対して、${}^\sigma p$ を $({}^\sigma p)_\iota = p_{\sigma^{-1}\iota}$ $(\iota \in I)$ で定義する。

5. 予想と結果

Conjecture B

$\pi \in Alg^0(n)$ のとき、
(1) $E = \mathbf{Q}(\pi)$ は有限次代数体になる。
(2) $\forall\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C})$, $\exists\, {}^\sigma\pi \in Alg(n)$ s.t. $({}^\sigma\pi)_f = {}^\sigma\pi_f$ and $p({}^\sigma\pi) = {}^\sigma p(\pi)$

和 "$\overset{T}{+}$" と Aut(**C**) の作用との compatibility 及び (3.1) から、予想がすべての $\pi \in Alg^0$ について正しいならば、同じ事がすべての $\pi \in Alg$ についても成立することが分る。また上の予想が正しいとき、(4.6) と合せて π のL-関数の有限部分 $L_f(\pi, s+\frac{1-n}{2})$ は E に係数をもつ Dirichlet 級数と成ることが分る。特に、不分岐素点では

$$t^T_{\pi,v} \in ({}^L H^0_n/S_n)(E)$$

を導く。逆に次が予想される。

Conjecture C

π : irr. automorphic rep. of $G_n(\mathbf{A})$ について

$$\exists E\ :\ \text{有限次代数体 s.t. } t^T_{\pi,v} \in ({}^L H^0_n/S_n)(E) \text{ for almost all } v \Longrightarrow \pi \in Alg(n)$$

これは $n=1$ のとき、Weil によって予想され Waldschmidt によって証明された。
Conjecture B に関する結果を述べる。

Definition

$\pi \in Alg(n)$
$p(\pi) = (p_\iota)_{\iota\in I} = ((p_{\iota,1},\cdots,p_{\iota,n}))_{\iota\in I}$: infinite type of π とするとき、

$$\pi : \text{regular} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\iota \in I,\ p_{\iota,i} \neq p_{\iota,j} \text{ if } i \neq j$$

と定義する。
(例 : $\pi \in Alg(2)$: regular $\Longrightarrow \pi_\infty \cong \sigma(\alpha^s, \alpha^{s+k}\mathrm{sgn}^{k+1})$ or $\alpha^s \circ \det$)

<u>*Theorem*</u>(Clozel)

$$\pi \in Alg^0(n) \ : \text{regular} \Longrightarrow \pi \text{ について Conjecture B は正しい。}$$

6. 定理の証明の概略
簡単のため $F = \mathbf{Q}$, $n = 2m$ の場合を説明する。以下のように記号を定める。

A = connected component of the center of $G_n(\mathbf{R})$
$\mathcal{A} = \mathrm{Lie}(A)_{\mathbf{C}}$
$\mathcal{G} = \mathrm{Lie}(G_n(\mathbf{R}))_{\mathbf{C}} = \mathcal{G}^1 \oplus \mathcal{A}$: Langlands decomposition
$K_\infty = O_n(\mathbf{R})$: maximal compact subgroup of $G_n(\mathbf{R})$
$K \subset G_n(\mathbf{A}_f)$: open compact subgroup
$S_K = G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/K_\infty K$, $\quad \widetilde{S} = \varprojlim S_K$
$S_K^1 = AG(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/K_\infty K$
さて

$\pi \in Alg^0(n)$: regular
$p(\pi) = (p_1, \cdots, p_n)$: infinite type of π $\quad$ ($p_1 > p_2 > \cdots > p_n$ としてよい)
$(\overline{\tau}, \overline{V})$: rational representation of G_n of highest weight $(p_1, p_2 + 1, \cdots, p_n + (n-1))$
(このとき $\overline{\tau}$ と π は同じ infinitesimal character を持ち、また $\overline{\tau}|_A = \pi|_A$ となる)
(τ, V) : contragredient representation of $(\overline{\tau}, \overline{V})$
$\mathcal{V}$: local system on S_K (or S_K^1) defined by V

とする。このとき V に係数を持つ各種のコホモロジーは次の関係を持つ。

$$\begin{array}{lll} & H^\bullet_{\mathrm{cusp}}(\widetilde{S}, \mathcal{V}) & \hookrightarrow H^\bullet(\widetilde{S}, \mathcal{V}) \cong H^\bullet_B(\widetilde{S}, \mathcal{V}_{\mathbf{Q}}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \\ & \| & \\ (6.1) & \displaystyle\bigoplus_{\substack{\xi \\ \text{cuspidal rep.} \\ \xi|_A = \overline{\tau}|_A}} H^\bullet(\mathcal{G}^1, K_\infty; \xi_\infty \otimes V) \otimes \xi_f & \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} & H^\bullet_{\mathrm{cusp}}(S_K^1, \mathcal{V}) & \hookrightarrow H^\bullet_!(S_K^1, \mathcal{V}) \hookrightarrow & \overline{H}^\bullet_{(2)}(S_K^1, \mathcal{V}) \\ & \| & & \| \\ (6.2) & \oplus_\xi H^\bullet(\mathcal{G}^1, K_\infty; \xi_\infty \otimes V) \otimes \xi_f^K & & \oplus_\xi H^\bullet(\mathcal{G}^1, K_\infty; \xi_\infty \otimes V) \otimes \xi_f^K \\ & \begin{pmatrix} \xi \subset L^2_{\mathrm{cusp}}(G_n(\mathbf{Q})\backslash G_n(\mathbf{A})) \\ \xi|_A = \overline{\tau}|_A \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \xi \subset L^2_{\mathrm{disc}}(G_n(\mathbf{Q})\backslash G_n(\mathbf{A})) \\ \xi|_A = \overline{\tau}|_A \end{pmatrix} \end{array}$$

ここで

$H^\bullet_B(S_K, \mathcal{V}_{\mathbf{Q}})$: Betti cohomology with coefficients in the $\mathbf{Q}$-vector space $V_{\mathbf{Q}}$
$H^\bullet(S_K, \mathcal{V}) \cong H^\bullet(\mathcal{G}, K_\infty; C^\infty(S_K) \otimes V)$

$H^{\bullet}_{\mathrm{cusp}}(S_K,\mathcal{V}) = \mathrm{Im}(H^{\bullet}(\mathcal{G},K_{\infty};C^{\infty}(S_K)\cap L^2_{\mathrm{cusp}}(S_K)\otimes V) \to H^{\bullet}(\mathcal{G},K_{\infty};C^{\infty}(S_K)\otimes V))$
$H^{\bullet}_{!}(S_K,\mathcal{V}) = \mathrm{Im}(H^{\bullet}_c(S_K,\mathcal{V}) \to H^{\bullet}(S_K,\mathcal{V}))$
$\overline{H}^i_{(2)}(S^1_K,\mathcal{V}) = \{\phi \in \Omega^i_{(2)}(S^1_K,V)\,;\, d\phi = 0\}/\overline{d\Omega^{i-1}_{(2)}(S^1_K,V)}$
$\Omega^i_{(2)}(S^1_K,V) = \{\phi;\ V\text{-valued } i\text{-form on } S^1_K \text{ s.t. } \phi \text{ and } d\phi \text{ are square integrable}\}$

また、$H^{\bullet}(\widetilde{S},\mathcal{V}) = \varinjlim H^{\bullet}(S_K,\mathcal{V}),\cdots$ e.t.c. とする。(S^1_K についても同様)。
さて π の regularity の仮定は次を導く。

(6.3) $H^i(\mathcal{G}^1,K_{\infty};\pi_{\infty}\otimes V) \cong \wedge^{i-m^2}\mathbf{C}^{m-1}$

従って、π_f, π_f^K は、それぞれ、$H^{\bullet}(\widetilde{S},\mathcal{V})$, $H^{\bullet}(S^1_K,\mathcal{V})$ の中に実現される。このとき、(6.1) と次の事実は $\mathbf{Q}(\pi)$ が有限次代数体に成ることを示す。

(6.4) If W is a $G(\mathbf{A}_f)$-irreducible subquotient of $H^{\bullet}(\widetilde{S},\mathcal{V})$, then there exists a finite extension E of $\mathbf{Q}$ such that W is defined over E

次に $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ に対して Conjecture B (2) の条件をみたす ${}^{\sigma}\pi \in Alg^0(n)$ を構成する。K を $\pi^K \neq \{0\}$ と取る。$H^{\bullet}_{!}(S^1_K,\mathcal{V})$ は $\mathbf{Q}$ 上定義されているから σ で不変。よって、${}^{\sigma}\pi_f^K$ も $H^{\bullet}_{!}(S^1_K,\mathcal{V})$ の中に実現される。(6.2) より、$\overline{H}^{\bullet}_{(2)}(S^1_K,\mathcal{V})$ に現れる既約部分表現 $\xi \subset L^2_{\mathrm{disc}}(G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A}))$ で $\xi_f^K = {}^{\sigma}\pi_f^K$ と成るものを取れば、それが求める ${}^{\sigma}\pi$ である。実際、既約性と $H^*(\mathcal{G}^1,K_{\infty};\xi_{\infty}\otimes V) \neq 0$ より ${}^{\sigma}\pi_f = \xi_f$, $p(\pi) = p(\xi)$ が従う。また、誘導表現についての議論から ξ が cuspidal であることも分る。

7. ℓ-進表現との対応

以下、基礎体 F を明示するために、$Alg, Alg(n),\cdots$ の代りに $Alg(F), Alg(n,F),\cdots$ とかく。

Motif
F 上の smooth projective variety (の圏) に付随する各種のコホモロジー理論を統合する object (の圏) が存在すると予想されている。その conjectual な圏を $\mathcal{M}(F)$ とかく。

Algebraic 表現の *weight*
$\pi \in Alg(n,F)$
$\pi_{\iota} \longleftrightarrow r_{\iota} \in \Phi_n(W_{\mathbf{R}})$, $(\iota \in I)$
$r_{\iota}(z) = z^{\mu_{\iota}}\overline{z}^{\nu_{\iota}}$, $(z \in \mathbf{C},\ \mu_{\iota},\ \nu_{\iota} \in \mathcal{H})$
とする。もし

$$^{\exists}\omega \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad \mu_{\iota} + \nu_{\iota} = (\omega+n-1,\cdots,\omega+n-1) \quad \text{for all } \iota \in I$$

が成立つとき π は pure weight ω を持つという。次が証明できる。

(7.1) $^{\forall}\pi \in Alg^0(n,F)$, $\ ^{\exists}\omega \in \mathbf{Z}$ s.t. π は pure weight ω を持つ

(この結果は一般の基礎体における (6.3) の証明にも使われている。)

Conjecture B が正しいとの仮定のもとで、motif と algebraic 表現との対応関係を示す次の予想がある。

<u>*Conjecture D*</u>
$\pi \in Alg^0(n, F)$
ω : weight of π
$E \subset \overline{\mathbf{Q}}$: field of definition of π

とする。このとき

${}^\exists E'$: finite extension of E
${}^\exists M \in \mathcal{M}(F)$: irreducible motif of degree n and weight ω with coefficients in E' s.t.

$$L(\pi_v, s+\frac{1-n}{2}) = L_v(M,s) \quad \text{for all finite place } v \text{ of } F$$

ここで

$$L_v(M,s) = \det((1-\mathcal{F}_v q_v^{-s})|_{H_\lambda(M)^{I_v}})^{-1}$$

但し

$H_\lambda(M)$: λ-adic realization of M
$I_v \subset \mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)$: inertia group
$\mathcal{F}_v$: Frobenius element of v

とする。
最後に、Conjecture D との関連で、algebraic 表現に対応する ℓ-進表現の構成についての結果を述べる。

<u>*Theorem*</u>(Clozel)
$\pi \in Alg^0(n, \mathbf{Q})$: regular かつ $\pi \cong \tilde{\pi}$ で次をみたすとする。

$$\begin{array}{lll} 4 \nmid n & \Longrightarrow & {}^\exists p_0 = p_1 \quad \text{s.t. } \pi_{p_0} \text{ is square integrable} \\ 4 \mid n & \Longrightarrow & {}^\exists p_0 \neq p_1 \quad \text{s.t. } \pi_{p_0} \text{ and } \pi_{p_1} \text{ are square integrable} \end{array}$$

更に

F : imaginary quadratic field in which p_0 and p_1 split
π_F : base change lift of π to F

とする。このとき

${}^\exists E$: 有限次代数体
${}^\exists S$: 素数の有限集合
${}^\exists a(\pi) > 0$: 整数
${}^\exists (W_\lambda, r_\lambda)$: compatible system of λ-adic representations of $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ s.t.

if $p \notin S$ and $\lambda \nmid p$,

$$\mathrm{trace}(r_\lambda(\mathcal{F}_v^m)) = a(\pi)\mathrm{trace}((t_{\pi_{F,v}}^T)^m q_v^{m(n-1)})$$

for all finite places $v \mid p$ of F and $m \geq 0$.

この結果の証明は現時点では詳しく述べられていないが、概略は、Jacquet - Langlands 対応により π_F に対応する division algebra の乗法群の表現 τ_F を考えると、これが Q 上定義されたユニタリ群の表現 τ の base change lift によって得られる事が分り、一方、ユニタリ群の表現 τ には最近の Kottwitz の結果（まだ未発表）により ℓ-進表現を対応させることができるというものである。

Remark. 論文では上と同様の結果が Q を総実体で置き換えても成立すると注意されている。

References

1. A. Borel and N. Wallach, "Continuous Cohomology, Discrete Subgroups and Representations of Reductive Groups," Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1980.
2. L. Clozel, *Motifs et formes automorphes : Applications du principe de fonctorialité*, in "Automorphic Forms, Shimura Varieties and L-Functions Conference," Academic Press.
3. N. Kurokawa, 波動形式の代数性, in "整数論と保型形式," 数理研講究録 689, 1989, pp. 185 - 194.
4. G. Harder, *Eisenstein cohomology of arithmetic groups : The case* GL_2, Inv. Math. **89** (1987), 37 - 118.
5. R. P. Langlands, *Automorphic representations, Shimura varieties and motives, Ein Märchen*, in "Automorphic Forms, Representations and L-Functions," Proc. Symp. Pure Math. 33, 1979, pp. 205 - 246.
6. M. Waldschmidt, *Sur certains caracters du groupe des classes d'ideles d'un corps de nombres*, Seminaire Theories des Nombres (1980/81), 323 - 335.