数理解析研究所講究録
727巻 1990年 93-106

概均質ベクトル空間に付随する保型形式係数ゼータ関数

立教大理学部　佐藤文広（Fumihiro Sato）

概均質ベクトル空間に付随するゼータ関数の理論は，一変数の場合が［SS］において，多変数の場合は［S1］，［S2］において展開され，少くとも関数等式については一応の理論ができている。しかしながら，既存の理論は‘定数係数’の場合に限られており，Heckeの L 関数のように量指標や保型形式を係数にとりこんだものについては一般論が得られていない。以下では，概均質ベクトル空間（今後 PV と略記）に付随する保型形式係数ゼータ関数の理論に向けての試みを紹介する。

§1．ゼータ関数の（既存の）理論の要点．

まず，既存の理論のポイントを整理して，理論を保型形式付に拡張するためには何が拡張されねばならないかを明確にしよう。

$(\mathbb{G}, \rho, \mathbb{V})$を$\mathbb{Q}$上定義されたpv，すなわち$\mathbb{Q}$上定義された連結代数群$\mathbb{G}$の（$\mathbb{Q}$-structureをもつ）有限次元ベクトル空間$\mathbb{V}$上の$\mathbb{Q}$-有理表現$\rho: \mathbb{G} \longrightarrow GL(\mathbb{V})$で，$\mathbb{V}_{\mathbb{C}}$内にZariski-開な$\rho(\mathbb{G}_{\mathbb{C}})$-軌道$\mathbb{X}_{\mathbb{C}}$が存在するものとする。$\mathbb{X}_{\mathbb{C}}$の補集合$\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$は，$\mathbb{Q}$上定義された代数的部分集合（$\mathbb{S}$の$\mathbb{C}$-有理点集合）になっている。$\mathbb{S}$は，簡単のため，超曲面と仮定し，

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{S}_n \quad , \quad \mathbb{S}_i = \{ x \in \mathbb{V} \mid P_i(x) = 0 \}$$

$$P_i(x) \in \mathbb{Q}[\mathbb{V}] : \mathbb{Q}\text{上 irreducible}$$

と，$\mathbb{Q}$上で既約成分に分解しておく。このときP_iは相対不変式となり，

$$P_i(\rho(g)x) = \chi_i(g) P_i(x) \qquad (g \in G,\ x \in \mathbb{V})$$

を満たす$\mathbb{G}$の$\mathbb{Q}$-有理指標χ_iが存在する。

$$\mathbb{X}_{\mathbb{R}} = X_1 \cup \cdots \cup X_\nu$$

を，開軌道の$\mathbb{R}$-有理点の連結成分への分解とし，G^+を$\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$の単位元連結成分とする。各X_iはG^+-軌道となる。

ゼータ関数を定義するための基本的な仮定は，次である：

<u>仮定 1.</u>　${}^\forall x \in \mathbb{X}_{\mathbb{Q}}$に対し，$\mathbb{G}_x = \{ g \in \mathbb{G} \mid \rho(g)x = x \}$の$\mathbb{Q}$-有理指標は，すべて，位数有限である。

$x \in X_i$に対し，$G_x^+ = G^+ \cap \mathbb{G}_x$とおくと，$X_i = \rho(G^+) \cdot x \simeq G^+/G_x^+$であり，適当な$\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_n) \in \mathbb{Q}^n$を選んでやると，次の積分公式が成立つように$G_x^+$上のHaar測度$d\mu_x$

を正規化できる：

$$\int_{G^+} f(g)\,d_r g = \int_{X_i} \frac{dy}{\prod_{i=1}^{n} |P_i(y)|^{\delta_i}} \int_{G_x^+} f(g\cdot h)\,d\mu_x(h)$$

$$(f \in L^1(G)),$$

ここで $y = \rho(g)\cdot x$ とおき，$d_r g$ は G^+ の右不変測度を表わす。又，仮定1は，G_x^+ が unimodular Lie群であることを保証する。

$L(\subset V_{\mathbb{Q}})$ を lattice とし，数論的部分群 $\Gamma = \{\gamma \in G_{\mathbb{Q}} \mid \rho(\gamma)L = L\}$ とおく。このとき，ゼータ関数を次のように定義できる。

$$\zeta_j(L : s) = \sum_{x \in \Gamma \backslash X_j \cap V_{\mathbb{Q}}} \mu(x) \Big/ \prod_{i=1}^{n} |P_i(x)|^{s_i}$$

$$s = (s_1, \cdots, s_n) \in \mathbb{C}^n,$$

$$\mu(x) = \int_{G_x^+/(G_x^+ \cap \Gamma)} d\mu_x .$$

基本領域の体積 $\mu(x)$ の有限性は，やはり仮定1によって保証されている。仮定1の下で，$\zeta_j(L : s)$ は $\mathrm{Re}\, s_1, \cdots, \mathrm{Re}\, s_n$ が十分大きいとき絶対収束すると思われるが，一般的な証明は無い。かなり実用的な収束の十分条件は [S2] にあるが，まだ不満足である。以下では，$\zeta_j(L : s)$ の収束は認めることにする。

次に $f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ (＝$V_{\mathbb{R}}$ 上の急減少関数の空間) に対し，ゼータ積分を

$$Z(f, L; s) = \int_{G^+/\Gamma} \prod_{i=1}^{n} |\chi_i(g)|^{s_i} \sum_{x \in L \cap V} f(\rho(g) \cdot x)\, d_r g$$

と定義する。この $Z(f, L; s)$ が，ゼータ関数 $\xi_j(L; s)$ の積分表示を与える。すなわち，

$$Z(f, L; s) = \sum_{j=1}^{\nu} \xi_j(L; s) \cdot \Phi_j(f; s) .$$

ここで，$\Phi_j(f; s)$ は，（無限素点における）局所ゼータ関数であり，

$$\Phi_j(f; s) = \int_{X_j} \prod_{i=1}^{n} |P_i(x)|^{s_i - \delta_i} f(x)\, dx$$

で定義される。

さて，以上のように積分表示が得られたとき，ゼータ関数の関数等式・解析接続の証明は，ゼータ積分 $Z(f, L; s)$ と局所ゼータ関数 $\Phi_j(f; s)$ の関数等式・解析接続に帰着する。これは，$Z(f, L; s)$ に対しては，Poisson の和公式に基いて容易に証明される。$\Phi_j(f; s)$ に対しては，PV の正則性などの仮定の下で証明され，PV の理論の（$\mathbb{R}$ 上の）基本定理というべき位置を占めている。

以上の詳細は，[SS]，[S1] に譲ることとし，ここでは，理論の一般化は，①ゼータ積分を一般化し，適切な積分表示を得る，②その際登場する局所ゼータ関数に相当するものに対し，関数等式を示す，③（上で触れなかったが）ゼータ関

数の極の位置やΓ-factorを統制しているb関数も適切な拡張を行う，ことによってなされるべきであるという点のみ確認しておく。

§2. 一般化の目標

我々の目指している一般化がどのようなものであるべきかを見るために，以前から知られているゼータ関数で（pvの理論の枠内で考察されてよいにもかかわらず）[SS]や[S1]の一般論に包摂されていないものを挙げてみよう。

Ex.1 pVとして $R_{K/\mathbb{Q}}(GL(1), M(1))$ （$[K:\mathbb{Q}]<+\infty$）を考える。このとき，§1で導入されたZeta関数は，Dedekindのゼータ関数（又はそのpartialゼータ関数）であり，量指標に対するHecke L関数は一般論にのっていない。

Ex.2 p.v.として $(GL(1)\times SO(n), V(n))$ を考える。ここで$V(n)$はn次元ベクトル空間で，表現は直交群のベクトル表現（とスカラー倍の合成）とする。又，$SO(n)_{\mathbb{R}}$ はコンパクトとする。このとき，§1のゼータ関数は通常のEpsteinゼータ関数である。一方，Epsteinはすでに，いわゆる球関数付のEpsteinゼータ関数，例えば，

$$\sum_{m_1,\cdots,m_n=-\infty}^{+\infty}\frac{Q(m_1,\cdots,m_n)}{(m_1^2+\cdots+m_n^2)^s}$$ ，Qはn変数調和多項式

も取扱っているが，これも一般論には含まれない。

Ex.3 同じ pv $(GL(1)\times SO(n), V(n))$ で $SO(n)_{\mathbb{R}} = SO(p, n-p)$（不定値二次形式の特殊直交群）となる場合も考える。このとき，§1 のゼータ関数は，Siegel による不定値二次形式のゼータ関数である。この一般化は H. Maass [M2]，D. Hejhal [H] で考察されている。大雑把に言うと彼らは，$SO(Y)$ 上の保型形式 φ に対し次のようなものを考えている。（Y は非退化有理不定値対称行列）

$$\sum_{\substack{x \in SO(Y)_{\mathbb{Z}} \backslash \mathbb{Z}^n \\ {}^t x Y x \neq 0}} \frac{\mu(\varphi; x)}{|{}^t x Y x|^s}, \quad \mu(\varphi; x) = \int_{G_x^+ / \Gamma_x} \varphi(h g_x^{-1}) \, d\mu_x(h),$$

ここで g_x は，基点 x_0 を決めておいて $t g_x \cdot x_0 = x$ $\left(t = \left|\dfrac{{}^t x Y x}{{}^t x_0 Y x_0}\right|^{1/2}\right)$ となるような $SO(Y)_{\mathbb{R}}$ の元とする。この Maass, Hejhal によるゼータ関数も，勿論，一般論には含まれない。

Ex.4 pv として $(GL(n)\times SO(m), M(m,n))$ $(m \geq n)$，$SO(m)_{\mathbb{R}} = \text{compact}$，を考える。ただし，表現は $\rho(g, h)x = hxg^{-1}$ ($h \in SO(m)$, $g \in GL(n)$, $x \in M(m,n)$) で与えられている。このとき，§1 で得られているゼータ関数は Koecher のゼータ関数

$$\sum_{\substack{x \in M(m,n;\mathbb{Z})/SL(n;\mathbb{Z}) \\ \operatorname{rank} x = n}} \frac{1}{|\det {}^t x x|^s}$$

である。H. Maass はこのゼータ関数を [M1] に始まる一連の研究において次のように拡張した（[M3] も参照のこと）：

$Q(X)$ を $M(m,n)$ 上の多項式で $SL(n)$ の右からの作用で不変なもの，$\varphi(Y)$ を $SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$ 上の $SL(n,\mathbb{Z})$ に関する保型形式とし，

$$\sum_{\substack{X\in M(m,n;\mathbb{Z})/SL(n,\mathbb{Z})\\ \operatorname{rank} X = n}} \frac{Q(X)\ \varphi(Y(X))}{(\det {}^tXX)^{s}}, \quad Y(X) = (\det {}^tXX)^{-1/n}\,{}^tXX$$

とおく。Maassは，このゼータ関数の解析接続，関数等式（余り explicit でない）を示した。$n=1$ のときは例2の球関数付 Epstein ゼータ関数に帰着する。この Koecher-Maassゼータ関数も，一般論において統一的に理解されるべきであろう。

さて，我々の目標は，上に例示した各種のゼータ関数を具体例とするような概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論を構築することである。

§3. 積分表示の一般化

この節では，§1 の状況に戻る。そして，さらに，群 $\mathbb{G}$ が

$$\underset{(\text{半直積})}{\mathbb{G} = \mathbb{L}\cdot\mathbb{U}}, \quad \begin{cases} \mathbb{L} \text{ は reductive} \\ \mathbb{U} \text{ は } \mathbb{G} \text{ の正規部分群で } \chi_i|_{\mathbb{U}} \equiv 1 \ (\forall i) \end{cases}$$

と分解しているとする。$\mathbb{L}_0$ を $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}\chi_i|_{\mathbb{L}}$ の単位元連結成分とし，$\mathbb{T}$ を $\mathbb{L}$ の $\mathbb{Q}$-split central torus で $\mathbb{L} = \mathbb{T}\cdot\mathbb{L}_0$，$|\mathbb{T}\cap\mathbb{L}_0| < +\infty$ となるものとする。real points を考えると

$G^+ = T^+\cdot L_0^+\, U^+$，上付き $^+$ は real points の単位元連結成分

と分解している。ここで $T^+\cdot L_0^+$ は直積，$(T^+L_0^+)\cdot U^+$ は半直積。$d^\times t$, dh, du をそれぞれ T^+, L_0^+, U^+ の両側不変 Haar 測度とし，指標 $\Delta : T^+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^\times$ を

$$d_r g = \Delta(t)\, d^\times t\, dh\, du \quad (g = thu)$$

を満足するようにとる。

数論的部分群 Γ は，（必要なら指数有限部分群にうつって）$\Gamma \subset L_0^+\cdot U^+$ となっているとする。$\Gamma_L := \Gamma\cdot U^+/U^+ \hookrightarrow L_0^+$ とおくと Γ_L は $\mathbb{L}_0$ の数論的部分群である。K を L_0^+ の極大コンパクト部分群，$\mathfrak{Z}$ を L_0^+ 上の両側不変微分作用素のなす可換な $\mathbb{C}$-algebra とする。K の有限次元（既約・ユニタリ）表現 σ, $\chi \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{Z}, \mathbb{C})$ に対し，ϕ をタイプ (σ, χ) の L_0^+/Γ_L 上の保型形式とする。従って，σ の表現空間を V_σ とするとき

$$\phi : L_0^+/\Gamma_L \longrightarrow V_\sigma, \quad \phi(kh) = \sigma(k)\phi(h) \quad (k\in K,\ h\in L_0^+)$$

$$D\phi = \chi(D)\phi \qquad (D \in \mathfrak{Z})$$

を満足している。

ここで，$f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対し，ϕ に付随するゼータ積分

$$Z_\phi(f, L; s) = \int_{T^+} \chi(t)^s \Delta(t)\, d^\times t \int_{L_0^+\cdot U^+/\Gamma} \phi(h) \sum_{x\in L\cap X} f(\rho(thu)\cdot x)\, dh\, du$$

を考える。以下，この積分も $\mathrm{Re}\, s_1, \cdots, \mathrm{Re}\, s_n \gg 0$ で絶対収束しているとする。通常のゼータ関数（§1 の意味の）が収束しているとき，ϕ が L_0^+ 上有界なら，明らかに $Z_\phi(f, L; s)$

も収束する。特に ϕ が cusp form なら $Z_\phi(L,f;s)$ は収束する。

さて，積分表示を証明する routine に従って $Z_\phi(L,f;s)$ を変形していくと，容易に次のような等式に到達する。

$$Z_\phi(f,L;s)=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{x\in\Gamma\backslash L\cap X_j}\frac{\mu(x)}{\prod_{i=1}^{n}|P_i(x)|^{s_i}}$$

$$\times\int_{X_j}\prod_{i=1}^{n}|P_i(y)|^{s_i-\delta_i}f(y)dy\times\int_{L^+_{(x)}/\Gamma_{(x)}}\phi(h_y h_x^{-1}w)\,d\nu_x(w)\ .$$

ここで，各連結成分 X_j から基点 x_j を選んでおいて，h_y，$h_x\in L_0^+$ は

$$y=\rho(t\,h_y u)x_j\ ,\quad x=\rho(t' h_x u')x_j\quad(t,t'\in T^+,\ u,u'\in U^+)$$

となるものとする。又 $L^+_{(x)}=G_x^+U^+/U^+\hookrightarrow L_0^+$，$\Gamma_{(x)}=(\Gamma\cap G_x^+)U^+/U^+\hookrightarrow L^+_{(x)}$ であり，$d\nu_x$ は $L^+_{(x)}$ の Haar 測度で，$\mathrm{vol}(L^+_{(x)}/\Gamma_{(x)})=1$ となるように正規化しておく。

上の等式をみると，$Z_\phi(f,L;s)$ が §1 におけると同様に（ゼータ関数×局所ゼータ関数）と分解しゼータ関数の積分表示を与えるためには，積分

$$\Phi_x^{(j)}(y):=\int_{L^+_{(x)}/\Gamma_{(x)}}\phi(h_y h_x^{-1}w)\,d\nu_x(w)$$

において，$\Phi_x^{(j)}(x)=(x\text{の情報})\times(y\text{の情報})$ と分離されねばならないことがわかる。このことは，例えば，次のような

場合に実現する：

(A) ϕ が指標のとき：$\Phi_x^{(j)}(y) = \phi(h_x)^{-1}\phi(h_y)$ である。Hecke L関数はこのような例を与える。

(B) $L^+_{(x)}$ が L^+_0 の極大コンパクト群で（従って K と共役で）ϕ が K-不変, i.e., $\sigma = 1$ のとき：$\Phi_x^{(j)}(y) = \phi(h_x)\,\omega_\phi(h_y)$，ここで ω_ϕ は ϕ に対応する帯球関数である。（例えば [T], p380参照）。§2 例4 の pv において，$\mathbb{L} = GL(n)$, $\mathbb{U} = SO(m)$, $\mathbb{L}_0 = SL(n)$ とおくと，$Q(x) \equiv 1$ とした場合の Maass ゼータ関数がこのようにして与えられる。

(B) で与えられている状況を更に一般化しよう。基点 x_j に対して，等質空間 $M_j = L^+_0/L^+_{(x_j)}$ を考える。自然な写像 $-$ を

$$
\begin{array}{ccc}
X_j & \longrightarrow & M_j = L^+_0/L^+_{(x_j)} \\
\cup & & \cup \\
y = t h_y u \cdot x_j & \longmapsto & h_y \bmod L^+_{(x_j)} =: \bar{y}
\end{array}
$$

と定義する。$\Phi_x^j(y)$ は $\bar{y} \in M_j$ の関数であることは容易にわかる。今後 $\Phi_x^j(\bar{y})$ と記すことにする。M_j 上の一般化された球関数の空間として

$$
\mathcal{E}(M_j, \sigma, \chi) = \left\{ \Phi : M_j \to V_\sigma \;\middle|\; \begin{array}{ll} \Phi(km) = \sigma(k)\Phi(m) & (k \in K) \\ \bar{D}\Phi = \chi(D)\Phi & ({}^\forall D \in \mathfrak{Z}) \end{array} \right\}
$$

を考える。$\bar{D}$ は，D から induce された M_j 上の不変微分作用素である。保型形式 ϕ がタイプ (σ, χ) であるから，$\Phi_x^j(m)$

$\in \mathcal{E}(M_j, \sigma, \chi)$ となる。

仮定2. $\dim \mathcal{E}(M_j, \sigma, \chi) < +\infty$.

この仮定が満足されるとして、$\mathcal{E}(M_j, \sigma, \chi)$ の基底 $\Phi_j^{(1)}(m), \cdots, \Phi_j^{(\ell_j)}(m)$ $(\ell_j = \dim \mathcal{E}(M_j, \sigma, \chi))$ を一つ固定し、Φ_x^j を

$$\Phi_x^j(m) = \sum_{i=1}^{\ell_j} C_j^{(i)}(\phi ; x)\, \Phi_j^{(i)}(m)$$

と一次結合に展開する。ここで、係数 $C_j^{(i)}(\phi ; x)$ は x にのみ依存するスカラーである。

以上をまとめると、仮定2の下で、

$$Z_\phi(f, L ; s) = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{\ell_j} \left\{ \sum_{x \in \Gamma \backslash L \cap X_j} \frac{\mu(x)\, C_j^{(i)}(\phi : x)}{\prod_{k=1}^{n} |P_k(x)|^{s_k}} \right\}$$

$$\times \int_{X_j} \prod_{k=1}^{n} |P_k(y)|^{s_k - \delta_k}\, \Phi_j^{(i)}(y) f(y)\, dy$$

が得られる。右辺の第1因子が保型形式 ϕ に付随したゼータ関数、第2因子が局所ゼータ関数とみなすべきものである。

仮定2が満足される場合としては

(1) L_0^+ がコンパクト、従って M_j がコンパクト等質空間の場合；有限次元性はコンパクト群の表現論より明らか；

(2) M_j が reductive 対称空間の場合：球関数の空間 $\mathcal{E}(M_j, \sigma, \chi)$ の有限次元性は van den Ban [B1], [B2] による；

がある。

前者の例としては，§2, Ex 2，及び，§2 Ex 4 において $\mathbb{L}=SO(m)\times GL(1)$, $\mathbb{L}_0=SO(m)$, $\mathbb{U}=SL(n)$ とした場合があり，このとき $\phi\equiv 1$，$Q(x)$ は任意とした Maass のゼータ関数が得られる。

後者の例としては，§2 Ex 3 の Maass, Hejhal のゼータ関数がある。より一般に self-dual homogeneous cone のゼータ関数は，保型形式付に拡張される。

§4. 関数等式に向けて.

前節で述べたことにより，L_0^+ がコンパクト，又は M_ξ が対称空間の場合には，保型形式付ゼータ関数の理論が展開できる望みがある。まず，ゼータ積分 $Z_\phi(f,L;s)$ の関数等式・解析接続だが，これは Poisson の和公式を用いて通常の場合と同様に証明できる容易な部分である。

次に問題となるのは，相対不変式の複素巾と球関数の積

$$\prod_{k=1}^{n}|P_k(y)|^{s_k-\delta_k}\,\Phi_j^{(i)}(y)$$

のフーリエ変換（＝局所ゼータ関数の関数等式）である。群 L_0^+ がコンパクトの時は，[S3], [S4], [S5] で扱われている。[S3] では一変数ゼータ関数に対して議論している。[S4] では §2 Ex.4 $\mathbb{L}_0=SO(m)$ の場合を詳しく調べている。多変数を

含む一般論は [S5] で述べた。詳細はこれらの文献を参照して頂きたい。

M_j が reductive 対称空間のときには、($\chi \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{z}, \mathbb{C})$ が generic ならば) $\mathcal{E}(M_j, \sigma, \chi)$ に含まれる球関数の積分表示（＝帯球関数の Harish-Chandra 積分表示の一般化で、大島利雄氏の Poisson 変換の理論より得られる）を用いると、局所関数等式は、適当な放物型部分群に対する L_0^+＝コンパクトの場合に帰着する。(cf. [S6])

References

[B1] E.P. van den Ban, Invariant differential operators on a semisimple symmetric space and finite multiplicities in a Plancherel formula, Ark. Mat. 25(1987), 175-187.

[B2] E.P. van den Ban, Asymptotic behaviour of matrix coefficients related to a reductive symmetric space, Indag. Math. 49(1987), 225-249.

[H] D.Hejhal, Some Dirichlet series with coefficients related to period of automorphic eigen forms, Proc. Japan Acad. 58(1982), 413-417.

[M1] H.Maass, Spherical functions and quadratic forms, J. Indian Math. Soc. 20(1956), 117-162.

[M2] H.Maass, Über die räumliche Verteilung der Punkte in Gittern mit indefiniter Metrik, Math. Ann. 138(1959), 287-315.

[M3] H.Maass, Siegel's modular forms and Dirichlet series, Lect. Notes in Math. No.216, Springer, 1971.

[S1] F.Sato, Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces I: Functional equations, Tôhoku Math. J. 34(1982), 437-483.

[S2] F.Sato, Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces II: A convergence criterion, Tôhoku Math. J. 35(1983), 77-99.

[S3] F.Sato, 概均質ベクトル空間に付随する調和多項式係数ゼータ関数, 幾何と保型形式研究集会報告集, 1988年東北大学, 254-267

[S4] F.Sato, The Maass zeta function attached to positive definite Quadratic forms, 数理研講究録 No. ?

[S5] F.Sato, Zeta functions with polynomial coefficients associated with prehomogeneous vector spaces, Preprint(1989).

[S6] F.Sato, Zeta functions whose coefficients involve periods of automorphic forms, in preparation.

[SS] M.Sato and T.Shintani, On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math. 100(1974), 131-170.

[T] T.Tamagawa, On Selberg's trace formula, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 8(1960), 363-386.