数理解析研究所講究録
727巻 1990年 81-92

古典群の佐武同型について

名大理 鍜島 康裕 (Yasuhiro, Kajima)

本稿は、$\mathfrak{p}$-進体上の古典群 ((O), (Sp), (U), (U$^+$), (U$^-$)) に関する local Hecke 環の、いわゆる佐武同型を、Macdonald が Chevalley 群に対して行った idea を用いて、具体的に記述することを目的とする。(ただし、簡単のために、(O) の $n=2\nu$ の場合は除く。この場合は、最もやさしいが、Weyl 群が他の場合と異るので。)

G を p-進体上の連結代数群として、K をその Maximal compact subgroup とする。また $\mathcal{L}(G)$ を G 上の $\mathbb{C}$-valued function で compact 台を持つものとする。このとき、ヘッケ環 $\mathcal{L}(G,K)$ を
$\mathcal{L}(G,K)=\{f\in\mathcal{L}(G) \mid f(kxk')=f(x) \text{ for all } k,k'\in K\}$
とする。ただし、その乗法は $f_1, f_2\in\mathcal{L}(G,K)$

に対し、$(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(gg_1^{-1}) f_2(g_1)\, dg_1$ で定義する。明らかに $f_1 * f_2 \in \mathcal{L}(G, K)$ である。今ここで、Satake[3] は、代数群 G に関する ある条件が満足されているとき、$\mathcal{L}(G, K)$ は、K に関する zonal spherical function $\omega_s(x)$ によって Fourier 変換 (Satake変換)

$$\varphi \in \mathcal{L}(G, K) \longrightarrow \hat{\varphi} = \int_G \omega_s(g)\, \varphi(g)\, dg$$

を行うことにより、ある多項式環に同型に移されることを示した。(この時、特に $\mathcal{L}(G, K)$ は可換である。) そして[3] では、与えられたベクトル空間 V 上の ε-Hermitian form に対する similitude として定まる代数群の連結成分を G とし(古典群)、V の Maximal lattice に対する stabilizer としての Maximal compact subgroup K に対して、前述の仮定が満されることが示されている。よって、ここでは、それらの古典群に対する同型を具体例に書くことにする。またここで、$\mathcal{L}(G, K)$ は compact support を持っているので、それは、KxK の characteristic function Ch_{KxK} の $\mathbb{C}$ 上の有限和で書ける。

そしてまた $W_s(x)$ は、K-両側不変なので、

$$\int_G W_s(g^{-1})\,Ch_{Kx_1K}(g)\,dg = W_s(x_1^{-1}) \times (Kx_1K\text{ の体積})$$

となるので、zonal spherical function の具体的な型と、KxKの体積$=[KxK;K]$が求められれば良いことが分る。よって§2では $W_s(x^{-1})$ の具体的な型を求め、§3では $[KxK;K]$ を求めることとする。

§1 準備

k を p-進体とする、ただし 2 は整数環で、unit とする。また k' は k 自身又は、k の 2 次拡大または k 上の中心的四元数体とする。そして e を k'/k の分岐指数、$k'(k)$ 上の素イデアルを $\mathfrak{P}=(\Pi)$ $(\mathfrak{p}=(\pi))$ とおく。また $x \to \bar{x}$ を k'/k の canonical involution とする。そして、V を k' 上の n 次元ベクトル空間、そして $\langle\ ,\ \rangle$ を V の non-degenerate ε-Hermitian form とする。すなわち $\langle x, y\rangle = \varepsilon\overline{\langle y, x\rangle}$, $\langle xa, yb\rangle = a\langle x, y\rangle\bar{b}$ for all $x, y \in V$, $a, b \in k'$.

これらは、次の5つに分類される。

(O). $k'=k$ $\varepsilon=1$, (Sp). $k'=k$, $\varepsilon=-1$.

(V). k'はkの2次拡大. $\varepsilon = 1$.

(V^+) k'は kの quaternion. $\varepsilon = 1$.

(V^-) 〃 $\varepsilon = -1$,

いま. Vの$\langle\ ,\ \rangle$の Witt index をνとする。
このとき. $n = n_0 + 2\nu$として, n_0を定め. Vの Basis $\{e_1, \dots, e_\nu, f_1, \dots, f_{n_0}, e'_\nu, \dots, e'_1\}$を次のように取れる。$\langle e_i, e_j\rangle = \langle e'_i, e'_j\rangle = 0$. $\langle e_i, e'_j\rangle = \delta_{ij}$
$f_m \in (\sum e_i k' + e'_j k')^\perp$, $m = \{1, \dots, n_0\}$. $\langle f_i, f_j\rangle = 0$ if $i \neq j$
そして $\langle f_i, f_i\rangle \in \mathcal{O} \setminus \mathfrak{p}^2$ としておく。ここで
$\langle f_1, f_1\rangle \in \mathcal{O}^* \cdots \langle f_\alpha, f_\alpha\rangle \in \mathcal{O}^*$, $\langle f_{\alpha+1}, f_{\alpha+1}\rangle \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2$,
$\cdots \langle f_{\alpha+\beta}, f_{\alpha+\beta}\rangle \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2$ としておく。すると
$L = \mathcal{O}[e_1 \cdots e_\nu, f_1 \cdots f_{n_0}, e'_\nu, \cdots e'_1]$ は norm $\mathcal{O}$ の Maximal lattice である。(norm $\mathcal{O}$ という仮定は必要ではないが簡単のため norm $\mathcal{O}$ とする。) そして. Vの k'線型変換を行列 (g_{ij}) で.

$(e_1, \dots, e_\nu, f_1, \dots, f_{n_0}, e'_\nu, \dots e'_1) \longrightarrow (e_1, \dots, e_\nu, f_1, \dots, f_{n_0}, e'_\nu, \dots, e'_1)(g_{ij})$

として同一視する。そして. Gを.

$\tilde{G} = \{g \in GL(V) \mid \langle gx, gy\rangle = \mu(g)\langle x, y\rangle,\ x, y \in V,\ \mu(g) \in k^*\}$

の連結成分. また. $K = \{k \in G \mid kL = L\}$. また.

$H = \{h = \mathrm{diag}(\xi_1, \cdots \xi_\nu, h_0, \xi_0\bar{\xi}_\nu^{-1}, \cdots \xi_0\bar{\xi}_1^{-1}) \in G \mid \xi_i \in k'^*$

$\xi_0 \in k^*,\quad h_0 \in G_0,\ \mu_0(h_0)=\xi_0\}$　ここで，G_0 は

$V_0=\sum f_i k'$ の similitude，μ_0 は G_0 の multiplicator

である。そして N を
$$N=\left\{ n=\begin{pmatrix} \begin{smallmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ * & & 1\end{smallmatrix} & 0 & 0\\ * & I_{n_0} & 0 \\ * & * & \begin{smallmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ * & & 1\end{smallmatrix}\end{pmatrix}\begin{matrix}\}\nu\\ \\ \}\nu\end{matrix} \in G \right\}$$
とする。

そしてまた記号 (2) と e_0 を次で定める。

$$(2)=\begin{cases}1 & \text{if } n_0=0\\ 2 & \text{if } n_0>0\end{cases}\ ,\qquad \mathrm{ord}_p\,\mu_0(G_0)=\frac{(2)}{e_0}\mathbb{Z}.$$

また，$M=\frac{1}{e}\mathbb{Z}^\nu\times\frac{1}{e_0}\mathbb{Z}$　として

$(m)=\left(\frac{m_1}{e},\cdots,\frac{m_\nu}{e},\frac{m_0}{e_0}\right)\in M$　に対して

$$\Pi^{(m)}=\begin{cases}\mathrm{diag}(\Pi^{m_1},\dots,\Pi^{m_\nu},\pi^{m_0}\bar{\Pi}^{-m_1},\dots,\pi^{m_0}\bar{\Pi}^{-m_\nu}) & \text{if } n_0=0\\ \mathrm{diag}(\Pi^{m_1},\dots,\Pi^{m_\nu},w^{m_0},\mu_0(w)^{m_0}\bar{\Pi}^{-m_\nu},\dots,\mu_0(w)^{m_0}\bar{\Pi}^{-m_1}) & \text{if } n_0>0\end{cases}$$

とする。ここで w は $\mathrm{ord}_p\,\mu_0(w)=\frac{2}{e_0}$ となる G_0

の元とする。また，群 D を $\Pi^{(m)}$，$(m)\in M$ で生成

される群とする。そして δ を D の character として

$h\in H\cap GL(n,\theta)$ に対し　$\delta(h)=1$ とおくことにより

δ を H の character と見る。この時次が成り立つ。

$$G=KHK=KDK\ \text{(Cartan 分解)}$$
$$=KHN=KDN\ \text{(Iwasawa 分解)}.$$
このとき

G の K に関する zonal spherical function を次で定める。

$$\omega_\delta(x^{-1}):=\int_K \phi_\delta(xk)\,dk$$

ただし，$\phi_\delta(x)=\delta(h)\,\delta^{\frac{1}{2}}(h)$，　$x=khn$ (Iwasawa 分解)

また N の Haar measure $d(n)$ に対して

$\delta(h) = d(n)/d(hnh^{-1})$ とする。また $\int_K dk = 1$ としておく。次にルート系 Σ を次のように定める。

$\Sigma = \{\pm\varepsilon_i, \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq \nu, i \neq j\}$

ここで ε_i は、$\mathbb{R}$ 上の ν 次元ベクトル空間のベースとする。また、ε_ν, $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$, $1 \leq i \leq \nu - 1$ を simple root と呼ぶ。また、M に作用する群 $\mathfrak{W}$（作用を $w(m)$ と書く）であるワイル群は、

A.「$(m_1, \cdots, m_\nu)$ のすべての permutation」および

B「$w(i) = \begin{cases} m_i \to -m_i + (2)\dfrac{e}{e_0} m_0 \\ m_j \to m_j \quad (j \neq i) \end{cases}$」によって生成

される群であるとする。A は、明らかに Σ に作用していると見なせ、B は $w(i)$ が $\varepsilon_i \to -\varepsilon_i$、$\varepsilon_j \to \varepsilon_j$ $(i \neq j)$ として Σ に作用していると見れる。よって $\mathfrak{W}$ は Σ に作用していると見れる。また、K の中で、W と同型で、(その同型を σ と書くと) $\sigma(w)^{-1}\pi^{(m)}\sigma(w) = \pi^{w(m)}$ となるものがある。それを $\mathfrak{W}$ と同一視する。また、任意の simple root a に対し、$w_a(a) = -a$, $w_a(\Sigma^+ \setminus \{a\}) = \Sigma^+ \setminus \{a\}$（$\Sigma^+$ は positive root）となる $w_a \in \mathfrak{W}$ が存在する。これを a に対する simple reflection と呼ぶ。また、任意の $w \in \mathfrak{W}$ は simple reflection の積で書けるが、$w = w_1 \cdots w_r$ と simple reflection

の積で書いた時の最小の r を $l(w)$ と書く。

§2. $W_S(x^{-1})$ の計算. Macdonald にならって、K の Bruhat 分解を考える。ただし、anisotropic part のため、都合のいい Iwahori 部分群が取れない。それで次のようにする。

$$K=\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \text{ とおいた時. } K'=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL(2\nu+\alpha, \mathcal{O})$$

は、有限体 $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ 上 $\{e_1, \dots, e_\nu, f_1, \dots, f_\alpha, e'_\nu, \dots, e'_1\}$ に関する ε-Hermitian matrix と見れる。(A, B, C, D は、それぞれ $(\nu+\alpha)\times(\nu+\alpha)$, $(\nu+\alpha)\times\nu$, $\nu\times(\nu+\alpha)$, $\nu\times\nu$ 行列)

また、任意の $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ 上の、$\{e_1, \dots, e_\nu, f_1, \dots, f_\alpha, e'_\nu, \dots, e'_1\}$ に関する ε-Hermitian matrix K' は ($K' \in GL(2\nu+\alpha, \mathcal{O}/\mathfrak{p})$) $K'' \in GL(2\nu+\alpha, \mathcal{O})$ で $K'' \equiv K' \bmod \mathfrak{p}$ で、K'' が $\{e_1, \dots, e_\nu, f_1, \dots, f_\alpha, e'_\nu, \dots, e'_1\}$ に関して体 k' 上の ε-Hermitian matrix となるものが存在することが分る。これらのことより、Maximal compact subgroup K は

$$K=\{k_1 \cdot k_2 \mid k_1 \in K_1,\ k_2 \in K_2\}$$

となる。ただしここで K_1, K_2 は

$$K_1=\left\{k_1\in G \;\middle|\; k_1=\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c|c} * & 0 & * \\ \hline 0 & * & 0 \\ \hline * & 0 & * \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{l} \}\nu+\alpha \\ \}\mathfrak{p} \\ \}\nu \end{array}\right\} \quad K_2=\left\{k_2\in G \;\middle|\; k_2\equiv\left(\begin{array}{c|c|c} I_{\nu+\alpha} & * & 0 \\ \hline * & 1_{\mathfrak{p}} & * \\ \hline 0 & * & I_\nu \end{array}\right)\right\}$$

である。ここで、K_1, K_2 は群になっている。

ここで、K_1 は、($\langle f_i, f_i \rangle \in \mathfrak{p}$ となる f_i に関する部分が無視できることから。) 次のように分解出来る。(Bruhat 分解)

$$K_1 = \bigcup_{w \in W} BwB \text{ (disjoint union)}$$ ただし

$$B = \left\{ k \in G \;\middle|\; k \equiv \left(\begin{array}{ccc|c|c} \times & & * & * & * \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \times & & \\ \hline & 0 & & \times & * \\ \hline & & & \times & * \\ & 0 & & 0 & \ddots \\ & & & & 0 \quad * \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, \nu+\alpha \\ \}\, \beta \\ \}\, \nu \end{array} \bmod \mathfrak{p} \right\}$$ である。

これらのことより、Macdonald と同様に、K を分解出来る。また、ルートに対する unipotent subgroup として、例えば (0) で $s = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & s_0 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$ $s_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \pi \end{pmatrix}$ とするとき、ルート ε_ν に対する unipotent subgroup として、$U = \begin{bmatrix} I_{\nu-1} & & \\ & A & \\ & & I_{\nu-1} \end{bmatrix}$

ただし $A = \begin{bmatrix} 1 & -y & -\pi y & z \\ & 1 & & y \\ & & 1 & x \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ $\quad z = -\frac{1}{2}(\pi x^2 + y^2)$

となる。ここで、$z \in \mathcal{O}$ であるとすると、($2 \in \mathcal{O}^*$) 明らかに、$x \in \mathcal{O}$ かつ $y \in \mathcal{O}$ となるが、このことによって、群 U は、z の部分によって統制されることになる。一般の場合には、次の lemma より分る。

Lemma　V_0 を anisotropic space として、その orthogonal basis を $\{f_1, \ldots, f_{n_0}\}$ とすると

$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}} \langle f_1 x_1 + \cdots + f_{n_0} x_{n_0}, f_1 x_1 + \cdots + f_{n_0} x_{n_0} \rangle = \mathrm{Min}\{ \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}} \langle f_i x_i, f_i x_i \rangle, 1 \le i \le n_0 \}$ となる。($2 \in \mathcal{O}^*$ という仮定を用いて)

これらのことを用いて、Macdonald の idea を少し変形して計算していくことが出来る。次に、その結果を書く。

最初に、simple root a と、D の character δ に対して $C_0(a,\delta)$ を次のように定義する。

1) $C_0(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1},\delta)=\dfrac{q-\tilde{\delta}}{q-q\tilde{\delta}}$ ここで $q=|\mathcal{O}/\mathfrak{p}|$

$\tilde{\delta}=\delta(\pi_i)$, $\pi_i=\mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{i-1},\pi,\pi^{-1},1,\dots,1,\bar{\pi},\bar{\pi}^{-1},\underbrace{1,\dots,1}_{i-1})\in D$

2) $C_0(\varepsilon_\nu,\delta)=1+\dfrac{T}{1-\tilde{\delta}^2}$ ここで $\tilde{\delta}=\delta(\pi_\nu)$

$\pi_\nu=\mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{\nu-1},\pi,1,\dots,1,\bar{\pi}^{-1},\underbrace{1,\dots,1}_{\nu-1})\in D$, そして

$$T=\frac{q^\beta-1}{q^{(\alpha+\beta)/2}}\tilde{\delta}+\frac{q^\beta(q^\alpha-1)}{q^{(\alpha+\beta)}}\tilde{\delta}^2 \quad \text{for } (O)$$

$$=(1+\tilde{\delta})\tilde{\delta}\left(1-\frac{1}{q}\right) \quad \text{for } (Sp)$$

$$=\frac{q^{\beta+\frac{1}{2}}-1}{q^{(\alpha+\beta+1)/2}}\tilde{\delta}+\frac{q^{\beta+\frac{1}{2}}(q^{\frac{1}{2}+\alpha}-1)}{q^{(\alpha+\beta+1)}}\tilde{\delta}^2 \quad \text{for } (U),\ e=1.$$

$$=\frac{q-1}{q^{(\alpha+1)/2}}\tilde{\delta}+\frac{q(q^\alpha-1)}{q^{(\alpha+1)}}\tilde{\delta}^2 \quad \text{for } (U)\ e=2$$

$$=\frac{q-1}{q^{(\alpha+2)/2}}\tilde{\delta}+\frac{q(q^{(\alpha+\frac{1}{2})}-1)}{q^{(\alpha+2)}}\tilde{\delta}^2 \quad \text{for } (U^+)$$

$$=\frac{q^\beta-1}{q^{(\frac{1}{2}+\alpha+\beta)/2}}\tilde{\delta}+\frac{q^\beta(q^{(\frac{1}{2}+\alpha)}-1)}{q^{(\frac{1}{2}+\alpha+\beta)}}\tilde{\delta}^2 \quad \text{for } (U^-)$$

そして、他の root に対しては、$c_0(a,s)=c_0(wa,ws)$ によって定義する。ここで $ws(\alpha)=s(w^{-1}\alpha w)$。

次に $c(s)=\prod_{a\in\Sigma^+}c_0(a,s)$ で定義する。この時、

Theorem 1　D の character s は $c_0(a,s)$ の分母を 0 にしないとする。このとき、

$$\omega_s(x^{-1})=V\,\delta^{\frac{1}{2}}(x)\sum_{w\in\overline{W}}c(ws^{-1})\cdot(ws)(x)$$

ここで V は constant で、$x=\pi^{(m)}$、$m_1\geqq\cdots\geqq m_\nu\geqq\frac{[2]e}{2e_0}m_0$、また V は、$s=\delta^{-\frac{1}{2}}$ とおいて、すぐ求まる。

§3. $[KxK:K]$ の計算

明らかに $\mathrm{ord}_p\,\mu(x)=0$ 又は 1 と仮定して良い。

($y=\pi I_n$ に対し、$[KxK:K]=[Kxy^mK:K]$ for all $m\in\mathbb{Z}$ であり、$\mathrm{ord}_p\,\mu(y)=2$ なので。)

3.1　$\mathrm{ord}_p\,\mu(x)=0$ の場合　　この場合、$x=\pi^{(m)}$、$m_1\geqq\cdots\geqq m_\nu$、$m_0=0$ とおく。この時、K の部分群 K_0 で、簡単な Bruhat 分解を持ち、かつ $[KxK:K]=[K_0xK_0:K_0]$ となる K_0 が存在する。それらのことより、大体 Macdonald の方法が使える。

次に結果を書く為に記号を定義する。

$\overline{W}_x$ は $\overline{W}$ の部分群で、$w^{-1}xw=x$ となるものによっ

て生成されるものとする。また、$l(w)$ を w の長さ、$l'(w)$ を w の shortest expression に現れる w_ν の個数とする。また数 η を $\eta=1$ for (Sp), $=\alpha$ for (O) and (U) $e=2$, とする。他の場合は $\eta=\alpha+\frac{1}{2}$ と定める。そして $L(w)=l(w)+(\eta-1)l'(w)$ とする。また、w_0 を W の中で長さ最大の元、$\tilde{w}$ を W_x の中で長さ最大のものとする。この時

Theorem 2.

$$[KxK:K]=\delta(x)\,q^{-L(w_0')}\sum_{w\in W}q^{L(w)}\cdot\Big(\sum_{w\in W_x}q^{L(w)}\Big)^{-1}.$$

3.2 $\operatorname{ord}_p\mathcal{M}(x)=1$ の場合.

この時、(U^+), (U) with $e=2$, (U^-), の3つの場合は $\operatorname{ord}_p\mathcal{M}(x)=0$ の場合に還元される。それは、(U^+), (U) with $e=2$ の場合には、$y=\pi I_n$ とおくと $y\in G$ であり $\operatorname{ord}_p\mathcal{M}(y)=1$ であることと $(\pi\in k')$, (U^-) の場合も大体同様の形の y が取れることから分る。よって (U) with $e=1$, (O), (Sp) について考える。この時、$x=x'y$ となる x', y $\operatorname{ord}_p\mathcal{M}(x')=0$, $\operatorname{ord}_p\mathcal{M}(y)=1$ $x'=\pi^{(m)}$, $y=\pi^{(m')}$ で $m_1\geq\cdots\geq m_\nu$, $m_0=0$. $m_1'=\cdots=m_\nu'=m_0=1$ となるものが取れる。

ここで、$\overline{W}'$ を $\overline{W}$ の部分群で、$(m_1, \ldots, m_\nu)$ の、すべての permutation で生成される群として、$\overline{W}'_x = \{ w \in \overline{W}' \mid w^{-1} x w = x \}$ とおくとおく。また、w_0'' を $w_0'' \tilde{w}' = w_0'$ で定義する。ただし、$\tilde{w}'$ は、$\overline{W}'_x$ の長さ最大の元、w_0' は $\overline{W}'$ の中で長さ最大の元とする。このとき、

Theorem 3

$$[K x K : K] = \delta(x') \, q^{-L(w_0'')} \Big(\sum_{w \in \overline{W}} q^{L(w)} \Big) \Big(\sum_{w \in \overline{W}'_x} q^{L(w)} \Big)^{-1}$$

References.

[1] A. N. Andrianov, Spherical functions for GL_n over local fields and summation of Hecke series, Math USSR Sbornik., 12 (1970), 429-451

[2] I. G. Macdonald, Spherical functions on a group of p-adic type, Advanced Study of Math, Madras., (1970).

[3] I. Satake, Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields, I. H. E. S., 18 (1963)