

$L^2(\backslash G)$ にあらわれるユニタリ表現の構成

大阪府立大学 今野泰子 (Yasuko Konno)

§0. 序

G は連結な半単純リ一群で compact factor を持たないものとし、 Γ はその離散部分群で $\backslash G$ が compact なものとする。このとき、 G の右正則表現 $(U_\Gamma, L^2(\backslash G))$ は既約表現の直和に分解し、各表現の重複度は有限である。 G の unitary dual を \hat{G} とし、 $\hat{G} \ni (U, H_U)$ に対して、 U の U_Γ における重複度を $m(U, \Gamma)$ ($0 \leq m(U, \Gamma) < \infty$) であらわす。 $m(U, \Gamma)$ については保型形式の次元などとも関連して、様々な方法によって研究されてきたが、具体的に $m(U, \Gamma)$ を与える一般的結果としては、可積分な離散系列の表現に対する Langlands の式があるのみである。

次のような定性的な問題を考える。どのような $U \in \hat{G}$ が、ある Γ に対して $m(U, \Gamma) \neq 0$ となりうるか？ 以後、このような U を automorphic な表現と呼ぼう。離散系列の表現は automorphic であることが知られている。しかし、それ以外の表現に対しては、一般には、ほとんど知られていない。

ところで、有限次元既約 G -module F が与えられたとき、 Γ の F に係数をもつ cohomology $H^*(\Gamma, F)$ の次元について、次の松嶋-村上の式が知られている。

$$(0.1) \quad \dim H^*(\Gamma, F) = \sum_{U \in \mathcal{G}} m(U, \Gamma) \dim H^*(\mathfrak{g}, K; H_U^0 \otimes F)$$

ここで、 \mathfrak{g} は G のリ-環、 K は極大 compact 群、 H_U^0 は H_U の K -finite な元の作る (\mathfrak{g}, K) -module であり、右辺の和は実は有限和となっている。この式から、 $H^*(\Gamma, F)$ の非消滅は、ある U が automorphic であるかどうかに関係している。このような立場から、いくつかの G に対し、automorphic な表現の例が見つけられている。

ここでは、 $SU(p, q)$ の中に埋め込まれている G に対し、Weil 表現を使って automorphic な表現を得る一つの方法を与える。それは、Borel & Wallach [1] の方法にならったものである。応用として、 $Sp(r, s)$ の離散部分群の cohomology の非消滅が示される。

§1. automorphic な表現の構成

G が $SU(p, q)$ に埋め込まれているとき、その埋めこみを通じて、 G の automorphic となるべき表現を構成したい。それが arithmetic 部分群に関して automorphic となることを期待するため、埋めこみは数体上の代数群としての埋めこみとな

っている必要がある。そのための準備をしよう。

以下、 $G' = SU(p, q)$ ($p \geq q \geq 1$) とし、 $n = p + q$ とする。 G' を代数群の部分群として実現しておく。 k を \mathbb{Q} の総実な有限次拡大体 ($\deg k/\mathbb{Q} = d+1$) とし、 $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_d\}$ を k の \mathbb{R} の中への同型の群とする ($\sigma_0 = \text{id.}$)。 $k' = k(\sqrt{-1})$ 、 $E = (k')^n$ とおく。 E 上の非退化なエルミート形式 h が与えられ、 $\text{sgn } h = (p, q)$ であり、共役 σh ($\sigma \neq \sigma_0$) はすべて正值とする。このとき k 上の代数群 G' で、 $G'(k) = \{g \in SL(n, k') \mid g \text{ は } h \text{ を保つ}\}$ 、 $G'(\mathbb{R}) = G'$ 、 $(\sigma G')(\mathbb{R}) = SU(n)$ ($\sigma \neq \sigma_0$) であるものが定義される。今後、我々の群は次のような状況にあると仮定する。

⊗ k 上の代数群 G があって $G = G(\mathbb{R})$ であり、しかも、 k 上で定義された埋めこみ $\varpi: G \hookrightarrow G'$ が存在する。

例えば、 $G = SU(p, q)$ 、 $Sp(r, \mathbb{R})$ 、 $Sp(r, \mathbb{C})$ などはこのような群である。 ϖ による G の G' への埋めこみを $\phi = \varpi|_G: G \hookrightarrow G'$ とする。

表現の構成に、Weil 表現のテンソル積を用いる。正整数 m に対し、 $Mp(m, \mathbb{R})$ を m 次 metaplectic group とし、被覆写像を $\nu: Mp(m, \mathbb{R}) \rightarrow Sp(m, \mathbb{R})$ とする。 $Mp(m, \mathbb{R})$ を $L^2(\mathbb{R}^m)$ 上の unitary 作用素の群の中に実現することによって Weil 表現 $(W^m, L^2(\mathbb{R}^m))$ が得られる。その l 次テンソル積表現を $(\otimes^l W^m, \otimes^l L^2(\mathbb{R}^m))$ としよう。同型 $\otimes^l L^2(\mathbb{R}^m) \cong L^2(\mathbb{R}^{ml})$ に注意すべ

$$\begin{array}{ccc} \text{ば. 自然な埋めこみ} & \prod^{\ell} \text{Mp}(m, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\tilde{\iota}^{\ell}} \text{Mp}(m\ell, \mathbb{R}) \\ & \downarrow \nu & \downarrow \nu \\ & \prod^{\ell} \text{Sp}(m, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\iota^{\ell}} \text{Sp}(m\ell, \mathbb{R}) \end{array}$$

が得られ. $\text{Mp}(m, \mathbb{R})$ を対角元として $\prod^{\ell} \text{Mp}(m, \mathbb{R})$ の部分群と考えるとき, $\bigotimes^{\ell} W^m \cong W^{m\ell}$. $\tilde{\iota}^{\ell}|_{\text{Mp}(m, \mathbb{R})}$ である.

さて, 正整数 ℓ をとり固定しておく. G は自然に $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$ に, 従って $\text{Sp}(n\ell, \mathbb{R})$ に埋めこまれ, その埋めこみは $\text{Mp}(n\ell, \mathbb{R})$ への埋めこみに持ち上げられる. 従って G の埋めこみ

$$(1.1) \quad \begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{\phi} & G' & \xrightarrow{\tau^{\ell}} & \text{Sp}(n\ell, \mathbb{R}) \\ & & & \searrow \tilde{\tau}^{\ell} & \uparrow \nu \\ & & & & \text{Mp}(n\ell, \mathbb{R}) \end{array}$$

を得る. そこで, G のユニタリ表現 $(V^{\ell}, L^2(\mathbb{R}^{n\ell}))$, G のユニタリ表現 $(U^{\ell}, L^2(\mathbb{R}^{n\ell}))$ を次のように定義する.

$$V^{\ell} = W^{n\ell} \circ \tilde{\tau}^{\ell}, \quad U^{\ell} = V^{\ell} \circ \phi = W^{n\ell} \circ \tilde{\tau}^{\ell} \circ \phi.$$

すなわち, V^{ℓ} は G' の harmonic 表現の ℓ 次 tensor 積, U^{ℓ} は V^{ℓ} の G への制限である. Kashiwara & Vergne ([2]) によれば, V^{ℓ} は重複度有限な既約表現の直和に分解する. 一方, U^{ℓ} については一般にはそのようなことは言えない. しかし, ある場合には U^{ℓ} も分解する (例えば, 5.3 の場合など). いずれにせよ, U^{ℓ} の部分表現として得られる G の既約表現が存在する場合, それらが我々の automorphic な表現の候補となる.

今, (U, H_U) は $(U^{\ell}, L^2(\mathbb{R}^{n\ell}))$ の既約な部分表現であるとする. U が automorphic となるための一つの十分条件を与えた.

K', K をそれぞれ G', G の極大 compact 群で、 $\phi(K) \subset K'$ とするものとする。 $(V^{\mathbb{R}}, L^2(\mathbb{R}^{n_{\mathbb{R}}}))$ の K' -finite vector の集合を $L^2(\mathbb{R}^{n_{\mathbb{R}}})^0$ 、 (U, H_U) の K -finite vector の集合を H_U^0 とするとき、ともに (\mathfrak{g}, K) -module であり $L^2(\mathbb{R}^{n_{\mathbb{R}}})^0 \cap H_U \subset H_U^0$ である。このときもしも $L^2(\mathbb{R}^{n_{\mathbb{R}}})^0 \cap H_U \neq \{0\}$ ならば、 U の既約性から $L^2(\mathbb{R}^{n_{\mathbb{R}}})^0 \cap H_U = H_U^0$ となる。しかも $K' = S(U(P) \times U(Q))$ の場合には、 $L^2(\mathbb{R}^{n_{\mathbb{R}}})^0$ は実は $\mathbb{R}^{n_{\mathbb{R}}}$ 上の Hermite function によって張られる部分空間となっている。0でないこのような関数の存在がある Γ に対する $L^2(\Gamma \backslash G)$ への H_U の自明でない G -準同型の存在を保証することになり、次の定理がいえる。

定理 1 G は \otimes をみたしているとする。 $(U^{\mathbb{R}}, L^2(\mathbb{R}^{n_{\mathbb{R}}}))$ の既約部分表現 (U, H_U) は、 $H_U \cap L^2(\mathbb{R}^{n_{\mathbb{R}}})^0 \neq \{0\}$ ならば、*automorphic* である。

この定理の証明の概略は、次節で述べる。定理 1 において特に、 $G = G'$ 、 $\pi = \text{id}$ の場合を考えれば、勿論、定理の仮定は満たされており、次の系を得る。

系 1 $G = SU(P, Q)$ とする。任意の正整数 l に対して $(V^{\mathbb{R}}, L^2(\mathbb{R}^{n_{\mathbb{R}}}))$ のすべての既約部分表現は *automorphic* である。

注意 ①. $L^2(\mathbb{R}^{2l})^0$ は K -module となるが、もしも、その各 K -type が重複度有限ならば、 U^l は既約表現の直和に分解し、各部分表現は定理の条件をみたす。

②. Enright & Parthasarathy によれば、 $SU(p, q)$ の highest weight をもつ既約ユニタリ表現は、すべてある V^l の部分表現となっている。従って、automorphic である。

さて、 Γ の構成。

この節では、定理 1 の証明の概略をのべる。すなわち、 U^l の既約部分表現 (U, H_U) で定理の条件をみたすものが与えられたとき、 $m(U, \Gamma) \neq 0$ となる G の cocompact な離散部分群 Γ の存在を示す。 Γ の構成のための準備をしよう。

まず、 U^l を構成するために用いた埋めこみ $(1, 1)$ を \mathbb{C} 上の代数群としての埋めこみに持ちこもう。 G' を定義する E 上のエルミート形式 h の虚部 $\text{Im } h$ によって、 \mathbb{C} 上の symplectic group Sp_n が定義され、自然に G' は Sp_n に埋めこまれている。更に l 個の直和をとることにより $\bigoplus E$ 上の交代形式 $\bigoplus \text{Im } h$ から、 Sp_{nl} が得られ、自然に Sp_n は Sp_{nl} の部分群となっている。従って、 \mathbb{C} 上の埋めこみ

$$G \xrightarrow{\Psi} G' \xrightarrow{\pi^l} Sp_{nl}$$

が得られる。ここで、スカラー \mathbb{C} を \mathbb{Q} に制限すれば、 \mathbb{Q} 上

群を次のように構成することができる。交代形式 β が標準的な形となるような \mathbb{Q} 上の基底を一つとり、この基底に関して $Sp_N(\mathbb{R})$ を行列群 $Sp(N, \mathbb{R})$ として実現しておく。このとき、

$$\Omega_0 = \left\{ \gamma \in Sp(N, \mathbb{R}) \mid (\pi_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}} \circ \pi_{\mathbb{Q}})(\gamma) \in Sp(N, \mathbb{Z}) \right\}$$

とすれば、アリスメティック部分群についてのよく知られた議論から、 Ω_0 は $Sp(N, \mathbb{R})$ の *cocompact* な離散部分群となり、従って $P_0: Sp(N, \mathbb{R}) \rightarrow G$ を成分への射影とすれば、 $\Gamma_0 = P_0(\Omega_0)$ は G の *cocompact* な離散部分群となる。我々の目標は、この Γ_0 の指数有限な部分群の中に、求める Γ が存在することを示すことである。

そのための鍵となる Borel と Wallach による定理を用意しよう。Weil 表現 $(W^N, L^2(\mathbb{R}^N))$ について、その C^∞ -vector の作る部分空間は、位相をこめて Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ と一致し、 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ は $M_p(N, \mathbb{R})$ -加群と考えられる。Hermitian function によって張られる $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ の部分空間を

$$\phi_0^N \cdot P(\mathbb{R}^N) = \left\{ \phi_0^N \cdot P \mid P: \text{多項式} \right\}$$

$$\text{ただし } \phi_0^N(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle x, x \rangle\right) \quad (x \in \mathbb{R}^N)$$

とすれば、次の定理が成り立つ。

定理 (Borel & Wallach) $\gamma_0 \in M_p(N, \mathbb{R})$, $\varphi_0 \in \phi_0^N \cdot P(\mathbb{R}^N)$

とする。 $\varphi_0 \neq 0$ ならば、次の条件 (i), (ii), (iii) をみたす $M_p(N, \mathbb{R})$

の離散部分群 $\tilde{\Delta}$ と $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ の連続汎関数 μ が存在する。

- (i). $\nu(\tilde{\Delta})$ は $\text{Sp}(N, \mathbb{Z})$ の congruence subgroup を含む。
- (ii). μ は $\tilde{\Delta}$ -不変である。すなわち $\mu \circ \tilde{\gamma} = \mu$ ($\tilde{\gamma} \in \tilde{\Delta}$)。
- (iii). $\mu(\varphi_0) \neq 0$

この定理は [1], VIII, §3, の Theorem 3.9 を我々の使いや
すい形に変形したものであり、theta distribution とよばれる
 $\tilde{\Delta}$ -不変な distribution を構成することによって示される。

さて、定理 1 の証明の概略をのべよう。(U, Hu) は上記の
ように (2.2) の埋めこみによって、 $W^N |_{G \times \prod_{i=1}^d G_i}$ の第 1 成分に
実現されている。仮定より、 $\xi_0 \in Hu \cap L^2(\mathbb{R}^{ne})^\circ$ で、 $\xi_0 \neq 0$ と
する。K' は $S(U(P) \times U(Q))$ と共役であり、 $L^2(\mathbb{R}^{ne})$ の $S(U(P) \times U(Q))$ -
finite vector の集合は $\psi_0^{ne} \cdot P(\mathbb{R}^{ne})$ であることから、 $L^2(\mathbb{R}^{ne})^\circ$ は

$$L^2(\mathbb{R}^{ne})^\circ = \sum (\psi_0^{ne} \cdot P(\mathbb{R}^{ne})) \quad (\sum \in M_p(ne, \mathbb{R}))$$

という形をしている。従って、 $\varphi_0 = \xi_0 \otimes \underbrace{\psi_0^{ne} \otimes \dots \otimes \psi_0^{ne}}_{d}$ とお
けば、ある $\zeta_0 \in M_p(N, \mathbb{R})$ に対して

$$\varphi_0 \in \zeta_0 (\psi_0^{ne} \cdot P(\mathbb{R}^{ne}) \otimes \dots \otimes \psi_0^{ne} \cdot P(\mathbb{R}^{ne})) = \zeta_0 (\psi_0^N \cdot P(\mathbb{R}^N))$$

となり、しかも $\varphi_0 \neq 0$ である。この φ_0 を (2.1) の埋めこみ
の状況へ移しても、やはりそのようになっている。そこで、

Borel & Wallach の定理をこの φ_0 に対して適用すれば、(i),
(ii), (iii) をみたす $\tilde{\Delta}$ と μ を得る。今、 $\nu(\tilde{\Delta})$ に含まれる

$Sp(N, \mathbb{Z})$ の congruence subgroup を Δ とする。このとき、 Ω_0 の congruence subgroup Ω で、 $\pi_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}(\Omega)) \subset \Delta$ となるものがとれる。 $\Gamma = P_0(\Omega)$ とすれば、 Γ は Γ_0 の指数有限な部分群となるが、この Γ が我々の求めるものである。実際、 μ を用いて、 (\mathfrak{g}, K) -module としての準同型 $A_{\mu}: H_0^0 \rightarrow C^{\infty}(\Gamma \backslash \mathfrak{g})$ を

$$A_{\mu}(\xi)(\Gamma \mathfrak{g}) = \mu(U^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{g})\xi \otimes \phi_0^{n_1} \otimes \dots \otimes \phi_0^{n_l}) \quad (\xi \in H_0^0)$$

によって定義する。(ここで、 $H_0^0 = H_0 \cap L^2(\mathbb{R}^{n_1})^0 \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_1})$,

$\otimes_{i=1}^{d+1} \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_i}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ であることを注意。) このとき、 A_{μ} が

連続な G -準同型 $\bar{A}_{\mu}: H_0 \rightarrow L^2(\Gamma \backslash \mathfrak{g})$ に拡張されることを

示すことができる。勿論、 $\bar{A}_{\mu}(\xi_0)(e\Gamma) = A_{\mu}(\xi_0)(e\Gamma) = \mu(\xi_0) \neq 0$

ゆえ、 \bar{A}_{μ} は、自明でない G -準同型である。

§3. $G = Sp(r, s)$ の場合.

$G = Sp(r, s)$ の場合に定理 1 を適用してみよう。この節の結果はすべて [3] に含まれているが、定理 1 の応用という立場から述べる。

$G = Sp(r, s)$ ($r \geq s \geq 1$) とする。 G を $GL(2(r+s), \mathbb{C})$ 内に実現するとき、自然に G は $SU(2r, 2s)$ の部分群となる。従って、 $p = 2r$, $q = 2s$ ととるとき、 G は自然に $G' = SU(p, q)$ に埋めこまれており、定理 1 の条件 \otimes を満たしていることは容易に示される。

今、 $l=1$ の場合を考える。 G' の表現 V^1 は、既約表現の直和に分解し、その重複度はすべて 1 である。そこで、 V^1 の各既約成分 (V, H_V) の G への制限 $U = V|_G$ を詳細に調べれば、 U は G の表現として既約となることが示される。従って、勿論、 $H_U \cap L^2(\mathbb{R}^n)^0 = H_V \cap L^2(\mathbb{R}^n)^0 \neq \{0\}$ である。従って、定理 1 より次の系を得る。

系 2 $G = Sp(r, s)$ の場合、 $(U^1, L^2(\mathbb{R}^n))$ のすべての既約部分表現は *automorphic* である。

この系を (0,1) 式と結びつけることによって、ある *cohomology* の非消滅を示すことができる。今、 G の離散部分群 Γ (*cocompact*) と自明でない有限次元既約 G -module F に対し、 $H^*(\Gamma, F)$ を考える。Vogan と Zuckerman の消滅定理 ([4]) によれば、 $G = Sp(r, s)$ の場合、

$$H^i(\Gamma, F) = \{0\} \quad (i < 2s)$$

である。従って、 $H^{2s}(\Gamma, F)$ の消滅、非消滅が問題となる。正の整数 j に対し、 (σ_j, F_j) を G の $\mathbb{C}^{2(r+s)}$ 上の標準的表現の j 回対称テンソル積とし、その反傾表現を (σ_j^*, F_j^*) とする。このとき、系 2 の表現 (U, H_U) の中に、

$$H^{2s}(G, K; H_0^0 \otimes F_j^*) \neq \{0\}$$

となるものを見つけることができる。従って、(0,1)より次の定理が得られる。

定理 2 j を正の整数とするとき、 $G = Sp(r, \mathbb{R})$ の co-compact な離散部分群 Γ で $H^{2s}(\Gamma, \mathbb{F}_j^*) \neq \{0\}$ となるものが存在する。

この定理は、上記の消滅定理が最良のものであることを示している。

References

- [1] A. Borel, N. Wallach : Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups, Ann. Math. Studies, No 94, Princeton Univ. Press, 1980
- [2] M. Kashiwara, M. Vergne : On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials, Inv. Math. 44 (1978), 1-47.
- [3] Y. Konno : Cohomology of discrete subgroups of $Sp(p, q)$, Osaka J. Math. 25 (1988) 299-318.
- [4] D. Vojan, Jr, G. Zuckerman : Unitary representations with non-zero cohomology, Compositio Math. 53 (1984), 51-90.