数理解析研究所講究録
727巻 1990年 35-41

The relation between the Eisenstein series and the modular forms for the Picard modular group

千葉大理 志賀 弘典
(Hironori Shiga)
千葉大理 芳賀 晶子
(Akiko Haga)

0. はじめに.

x, y をパラメータとする複素アフィン代数曲線

$$C(x,y): \quad w^3 = z(z-1)(z-x)(z-y)$$

は一般に種数3となり，それらのモジュライの空間が2次元超球（と同型な領域）$D = \{\eta = {}^t[\eta_0, \eta_1, \eta_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid {}^t\eta H \bar{\eta} < 0\}$（ただし $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$）を虚2次体 $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ の H に関するユニタリ群 $\Gamma = U(H, \mathcal{O}_k) = \{g \in M_3(\mathcal{O}_k) \mid {}^t g H \bar{g} = H\}$（ただし $\mathcal{O}_k$ は k の整数環）の作用でわって得られることが知られている（cf. [P]）．このとき現れる D 上の Γ（及びその部分群）に関する保型函数を Eisenstein 級数によって表示したい．この小論では逆に Eisenstein 級数を，既に ϑ-constant で与えられている保型形式を用いて表示する．このことから Eisenstein 級数の Fourier 展開が得られる．この結果がより一般の超球上の保型函数の表示に対する手懸りとなるよう期待している．

なおここでは重み$3k$ ($k \geqq 2$) の収束するEisenstein級数のみ扱ったが$k=1$のときに何らかの方法でEisenstein級数を定義できるかどうかが，これから先我々の議論を進める上での懸案として残されている．

1．Γ_1に対するNeben type modular form.

Γの合同部分群 $\Gamma_1 = \{g \in \Gamma \mid g \equiv id \pmod{\sqrt{-3}}\}$ を考える．このとき $\Gamma/\Gamma_1 \cong S_4$ (4次対称群) であり次が言えている．

<u>命題1</u> ([P], [T], [D-M])

D/Γ_1 は4つのcuspを添加してコンパクト化され，それは$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$と双正則同型である．cuspはΓ_1に関する軌道の代表として

$c_\infty = {}^t[0, 1, 0]$, $c_0 = {}^t[1, \omega, -\omega]$, $c_1 = {}^t[1, \omega, \omega^2]$, $c_2 = {}^t[1, 0, 0]$

をとることができる ($\omega = \exp(\frac{2}{3}\pi i)$).

$\frac{\eta_1}{\eta_0} = v$, $\frac{\eta_2}{\eta_0} = u$ とおき，領域Dを$\{(u, v) \in \mathbb{C}^2 \mid 2\mathrm{Re}\,v + |u|^2 < 0\}$と表示する．

$f(u, v)$をD上正則な函数とし，$\gamma = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \in \Gamma$に対し

$$f(u, v)\big|_{[\gamma]_k} = (\det \gamma)^k (a + bv + cu)^{-3k} f(\gamma(u, v))$$

と定める．Γ'をΓの部分群とし，Γ'の各元γに対し

$$f(u, v)\big|_{[\gamma]_k} = (\det \gamma)^k f(u, v)$$

となるとき，$f(u, v)$をΓ'に関する<u>重さkのNeben type modular form</u>と呼ぶことにし，その全体を$\hat{M}_k(\Gamma')$で表わす．

<u>命題2</u> ([Sh 2])

次数付環 $\bigoplus_k \hat{M}_k(\Gamma_1)$ は $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ と同型である．$\mathbb{C}$-algebra としての生成元 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ を theta constants を用いて次のように与えることができる：

$$\varphi_k(u,v) = \vartheta^3\begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ k/3 & 1/6 & k/3 \end{bmatrix}(0, \Omega(u,v)),$$

ただし，

$$\vartheta\begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{bmatrix}(0,\Omega) = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^3} \exp\left\{\pi i\, {}^t(\vec{n}+\vec{a})\Omega(\vec{n}+\vec{a}) + 2\pi i\, {}^t(\vec{n}+\vec{a})\vec{b}\right\}$$

$$\Omega(u,v) = \begin{pmatrix} (u^2+2\omega^2 v)/(1-\omega) & \omega^2 u & (\omega u^2 - \omega^2 v)/(1-\omega) \\ \omega^2 u & -\omega^2 & u \\ (\omega u^2 - \omega^2 v)/(1-\omega) & u & (u^2+2v)/(\omega-\omega^2) \end{pmatrix}$$

Remark 1. $q = \exp(2\pi i \frac{v}{\sqrt{-3}})$ とおくと，この表示から $\varphi_k(u,v)$ は q に関しての巾級数表示（Fourier 展開）をもつことが分る．

Remark 2. $[\varphi_2, \varphi_1, \varphi_0]$ によって与えられる $\Gamma_1 \backslash D$ から $\mathbb{P}^2$ への写像 Φ が命題 1 の同型を与えている．さらに

$P_0 = {}^t[1,0,0]$, $P_1 = {}^t[0,1,0]$, $P_2 = {}^t[0,0,1]$, $P_\infty = {}^t[1,1,1]$ とおくと $\Phi(c_i) = P_i$ $(i = 0, 1, 2, \infty)$ となっている．

2. Eisenstein 級数

k を正の整数，g を Γ の固定元として Eisenstein 級数を次のように定める；

$$G_{\Gamma_1,k,g}(u,v) = \sum_{\gamma\in\Gamma_{1,\infty}\backslash g^{-1}\Gamma_1} \frac{1}{(p+qv+ru)^{3k}} \qquad \text{—— (1)}$$

ただし，$\Gamma_{1,\infty}=\{\sigma\in\Gamma_1 \mid \sigma(c_\infty)=c_\infty\}$ で

$$\gamma=\begin{pmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{pmatrix}$$

と与えられているものとする.

Fact 1. (1)の右辺は $k>\frac{5}{3}$ で広義一様に絶対収束する．従って以下 $k\geqq 2$ として考える.

Fact 2. $G_{\Gamma_1,k,g}(u,v)\in\hat{M}_k(\Gamma_1)$.

Fact 3. $g_0=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 1 \\ 0 & -\omega & \omega \end{pmatrix}$, $g_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & \omega \\ 0 & \omega^2 & -1 \end{pmatrix}$, $g_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$g_\infty=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $g_j(c_\infty)=c_j$ $(j=0,1,2,\infty)$ となり，

かつ

$$G_{\Gamma_1,k,g_j}(c_i)=\delta_{ij} \quad (i,j=0.1.2.\infty) \qquad \text{——} (2)$$

となる.

Fact 4. kを固定すると $G_{\Gamma_1,k,g}$ $(g\in\Gamma)$ たちが生成する $\mathbb{C}$-vector space は4次元であり，各 $g\in\Gamma$ に対し $G_{\Gamma_1,k,g}(u,v)$ はいづれかの $G_{\Gamma_1,k,g_i}(u,v)$ $(i=0,1,2,\infty)$ と一致する.

3. $G_{\Gamma_1,2,g_i}(u,v)$ と $\varphi_k(u,v)$ との関係.

命題3.（[Sh2]）$\varphi_k(u,v)$ は次の Fourier 展開をもつ：

$$\varphi_k(u,v)=\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\nu=N(\mu)}\left(H_\mu^{(k)+}(u)+H_\mu^{(k)-}(u)\right)q^\nu\right\}^3 \qquad \text{——} (3)$$

ただし μ は $\mathcal{O}_k$ の元をうごき，

$$H_\mu^{(k)\pm}(u) = \left(\exp \pi i \frac{\mu^2 u^2}{\sqrt{-3}}\right) \vartheta\begin{bmatrix}\pm 1/6 \\ \pm 1/6\end{bmatrix}(\mu u, -\omega^2) \times \exp\left\{\pm\tfrac{2}{3}\pi i k\, tr(\mu)\right\}.$$

一方 theta-constant に関する変換公式（[M], [R-F]）が知られている：

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{Z}), \quad \varepsilon = \begin{bmatrix}\varepsilon' \\ \varepsilon''\end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^n \text{ に対し}$$

$$\vartheta[M\circ\varepsilon](0, M\circ\Omega) = K(M,\varepsilon)\sqrt{\det(C\Omega+D)}\;\vartheta[\varepsilon](0,\Omega) \qquad \text{—— (4)}$$

ただし，$M\circ\varepsilon = \begin{pmatrix} D\varepsilon' - C\varepsilon'' + \frac{1}{2}dv(C\,{}^tD) \\ -B\varepsilon' + A\varepsilon'' + \frac{1}{2}dv(A\,{}^tB)\end{pmatrix}$，（$dv$ は対角線ベクトルの意）

$$M\circ\Omega = (A\Omega+B)(C\Omega+D)^{-1}$$

であり $K(M,\varepsilon)$ は M と ε から定まる絶対値 1 の代数的数．

以下 φ_k の cusp での値を求める．$\varphi_k(c_\infty) = \left\{2\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6}\end{bmatrix}(0,-\omega^2)\right\}^3$ となることは表示 (3) から分る．$\varphi_k(c_i)$ を知るには，$\varphi_k(u,v)|_{[g_i]_1}$ を計算すればよい．このときある $M_i \in Sp(3,\mathbb{Z})$ をみつけて $\Omega(g_i(u,v)) = M_i\circ\Omega(u,v)$ となる．すると $\varphi_k = \vartheta^3[\varepsilon_k]$ とかくことにして

$$\left(K(M_i,\varepsilon_k)\sqrt{\det(C_i\Omega+D_i)}\right)^3 \vartheta^3[M_i^{-1}\circ\varepsilon_k](0,\Omega(c_\infty))$$

が φ_k の c_i での値となる．ただし，

$$M_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_k = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ k/3 & 1/6 & k/3 \end{bmatrix}.$$

これから φ_k の cusp での値は次のように与えられる．

	c_∞	c_0	c_1	c_2
φ_0	$\left\{2\vartheta\begin{bmatrix}1/6\\1/6\end{bmatrix}(0,-\omega^2)\right\}^3$	0	0	$e_0\vartheta\begin{bmatrix}1/6\\1/6\end{bmatrix}(0,\omega/3)$
φ_1	〃	0	$e_1\vartheta^3\begin{bmatrix}-1/6\\-1/6\end{bmatrix}(0,\omega/3)$	0
φ_2	〃	$e_2\vartheta^3\begin{bmatrix}1/6\\-1/6\end{bmatrix}(0,\omega/3)$	0	0

ただし，
$$e_i = \left(K(M_i, \varepsilon_{2-i})\sqrt{\det(C_i\Omega(c_\infty)+D_i)}\right)^3.$$

命題2から $G_{\Gamma_1,2,g_i}(u,v)$ は $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2$ の斉次二次式であり，一方その cusp での値は Fact 3 で分っている．$G_{\Gamma_1,2,g_\infty}(u,v)$ に対し

(イ) c_2, c_3, c_4 で 0，

(ロ) c_2, c_3, c_4 を入れかえ c_∞ を不変にする Γ の変換 g によって不変

なことが導れるので，$a(\varphi_0\varphi_1+\varphi_1\varphi_2+\varphi_2\varphi_0)$ の形となる．ここで両者の c_∞ での値を比較して $a = 12^{-3}\cdot\vartheta^{-6}\begin{bmatrix}1/6\\1/6\end{bmatrix}(0,-\omega^2)$ となる．他の場合も同様にして以下の表示を得る．

<u>命題</u>
$$\begin{aligned}
G_{\Gamma_1,2,g_\infty}(u,v) &= a_\infty(\varphi_0\varphi_1+\varphi_1\varphi_2+\varphi_2\varphi_0)\\
G_{\Gamma_1,2,g_0}(u,v) &= a_0(3\varphi_2^2-2\varphi_1\varphi_2-2\varphi_2\varphi_0+\varphi_0\varphi_1)\\
G_{\Gamma_1,2,g_1}(u,v) &= a_1(3\varphi_1^2-2\varphi_0\varphi_1-2\varphi_1\varphi_2+\varphi_2\varphi_0)\\
G_{\Gamma_1,2,g_2}(u,v) &= a_2(3\varphi_0^2-2\varphi_2\varphi_0-2\varphi_0\varphi_1+\varphi_1\varphi_2),
\end{aligned}$$

$$a_\infty = \frac{1}{24}\varphi_0(c_\infty)^{-2},\quad a_i = \frac{1}{3}\varphi_{2-i}(c_i)^{-2}.$$

References

[A] Alezais, R., Sur une classe de fonctions hyperfuchsiennes et sur certaines substitutions linéaires qui s'y repportent, *Ann. Sci. E. N. S.*, 3 setrie Tom **19** (1902), 261-323.

[D-M] Deligne, P.-G. D. Mostow, Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy, *preprint*.

[F] Feustel, J. M., Ringe automorpher Formen auf der komplexen Einheitskugel und ihre Erzeugung durch Theta-Konstanten, *Akademie der Wiss.* DDR, Berlin, 1986.

[H] Holzapfel, R. P., *Geometry and Arithmetic around Euler partial differential equations*. Reidel, Dordrecht/Boston/Lancaster, 1986.

[I] Igusa, J., *Theta functions*, Springer, Heidelberg, New-York, 1972.

[M] Mumford, D., *Tata lectures on theta I*, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1983.

[N] Namba, M., Equivalence problem and automorphic groups of certain compact Riemann surfaces, *Tsukuba J. Math.*, **5** (1981), 319-338.

[P] Picard, E., Sur les fonctions de deux variables indépendentes analogues aux fonctions modulaires, *Acta Math.*, **2** (1883), 114-135.

[P-S] Pjateckii-Sapiro, I. I., *Geometry of classical domains and automorphic functions*, Fizmatgiz, Moscow, 1961.

[R-F] Rauch, H. E. and Farkas, H. M., *Theta functions with applications to Riemann surfaces*, Williams and Wilkins, Baltimore, 1974.

[Sh] Shiga, H., One attempt to the K3 modular function I-II, *Ann. Scuola Norm. Pisa*, Ser. IV-Vol. VI (1979), 609-635, Ser. IV-Vol. VIII (1981), 157-182.

[Si] Siegel, C. L., *Topics in complex function theory II*, Wiley, New York (1971).

[T] Terada, T., Fonctions hypergèométriques F_1 et fonctions automorphes I-II, *J. Math. Soc. Japan*, **35** (1983), 451-475, **37** (1985), 173-185.

[W] Wakabayashi, I., Note on Picard's modular function of two variables, *Private note.*

[Sh2] H. Shiga, On the representation of Picard modular function by θ constants I-II, Pub. R.I.M.S. Kyoto Univ. vol 24 (1988), 311-360

[Sh3] H. Shiga, On the construction of algebraic numbers as special values of the Picard modular function, preprint