数理解析研究所講究録
727巻 1990年 1-16

ガウス和の一般化とその応用

京大教養　齋藤　裕 (Hiroshi Saito)

ガウス和の一般化はいろいろなされているが、ここでは二次指標に対するガウス和の一つの一般化を定義し、そのジーゲル保型形式、及び対称行列のなすベクトル空間に付随するL関数への応用を与える。詳細は[8]を御参照下さい。

§1. ガウス和

p で3以上の素数を表し、F で標数 p の素体を表す。§1の結果は、F が有限体の場合にも同様に成立するが、応用は素体の場合だけであり、簡単のためこのようにする。Λ_n で F 係数の n 次の対称行列全体を表し、Λ_{nr} で、Λ_n の元で階数が r のもの全体のなす部分集合を表す。また $e_p(*) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\,*/p)$ と置く。$F^\times$ の指標 χ に対して

$$W_n^n(N, \chi) = \sum_{S \in \Lambda_n} \chi(\det S)\, e_p(\mathrm{tr}(NS)),\quad N \in \Lambda_n$$

と定義する。これは、概均質ベクトル空間に付随するガウス

和の特別の場合であり、Th. 1 (1) にあげるように、既に村上順氏[2]により具体的に計算されている。χ_0 で F の単位指標を、χ_p で位数2の指標を表す。$S \in \Lambda_{nr}$ に対し

$$S = {}^t g \begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} g, \quad S_0 \in \Lambda_{rr}$$

となる $g \in GL_n(F)$ をとり、$\chi = \chi_0$ 又は χ_p に対し、

$$\chi(S) = \chi(\det S_0)$$

と定義すれば、これは g のとり方によらずに定まる。$r = 0$ のときには、$\chi(S) = 1$ と定める。$\chi = \chi_0, \chi_p$ に対し、

$$W_r^n(N, \chi) = \sum_{S \in \Lambda_{nr}} \chi(S)\, e_p(tr(NS)), \quad N \in \Lambda_n$$

と定義する。

$a, b \in \mathbb{C}$ に対して

$$(a, b)_m = \begin{cases} \prod_{i=1}^{m} (1 - a b^{i-1}) & m \geqq 1 \\ 1 & m = 0 \end{cases}$$

と置くと、$W_n^n(N, \chi)$ は次のように具体的に与えられる。

定理 1. $N \in \Lambda_{nt}$ とする。

(1) (Murakami) $\chi^2 \neq 1$ とすると

$$
W_n^n(N,\chi) = \begin{cases} \chi_p^{n-1}(N)\,\bar{\chi}(N)\,G(\chi_p)^{n(n-1)/2}\,G(\chi)^{[(n+1)/2]} \\ \qquad \times G(\chi\chi_p)^{[n/2]} & \text{if } t=n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

ここで $G(\chi)$ ($\chi \in \hat{F}^\times$) は普通のガウス和 $\sum_{n=1}^{p-1} \chi(n) e_p(n)$ を表す。また $\bar{\chi}(N) = \bar{\chi}(\det N)$。

(2) $\chi = \chi_p$ とする。

(a) n が奇数のとき

$$
W_n^n(N,\chi_p) = \begin{cases} (-1)^{(n-2m-1)}\,\chi_p(-1)^m\,\chi_p(N)\,p^{(n^2+(2m+1)^2-2)/4} \\ \qquad \times (p^{-1},p^{-2})_m\;G(\chi_p) & \text{if } n-t=2m \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}
$$

(b) n が偶数のとき

$$
W_n^n(N,\chi_p) = (-1)^{(n-2m)/2}\,\chi_p(-1)^{n/2}\,p^{(n^2+(2m)^2)/4} \times (p^{-1},p^{-2})_m
$$

ここで m は $n-t=2m$ 又は $2m-1$ を充たす自然数。

(3) $\chi = \chi_0$ とする。

(a) n が奇数のとき

$$
W_n^n(N,\chi_0) = (-1)^{(n-2m+1)/2}\,p^{(n^2+(2m+1)^2-1)/4} \times (p^{-1},p^{-2})_m
$$

m は (2)(b) と同じ。

(b) n が偶数のとき

$$\mathcal{W}_n^n(N,\chi_0) = \begin{cases} (-1)^{(n-2m)/2}\chi_p((-1)^{(n-2m)/2})\,\chi_p(N) \\ \quad \times\, p^{(n^2+(2m+1)^2-1)/4}(p^{-1},p^{-2})_m & \text{if } n-t=2m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

証明は、[2]の方針に従って

$$\mathcal{W}_n^n(N,\chi) = \sum_{\sigma\in S_n,\,\sigma^2=1} \mathcal{W}_n^n(N,\chi,\sigma),$$

$$\mathcal{W}_n^n(N,\chi,\sigma) = \sum_{S\in\Lambda_n\cap {}^tBw_\sigma B} \chi(S)\,e_p(\mathrm{tr}(NS)),$$

と分解して計算する。ここで、σは位数2のn文字の置換全体を動き、w_σはσに対応する置換行列、Bは$GL_n(F)$の上半三角行列の全体のなす群を表す。$t=n$の時には$\sigma=1$を除いて$\mathcal{W}_n^n(N,\chi,\sigma)=0$となるが、$t<n$の時はそれ以外にも零にならないものがあって計算が長くなる。

以下$\chi=\chi_0,\chi_p$の場合のみ考える。$\mathcal{W}_r^n(N,\chi)$のNに依存する仕方は、$r=n$のときは定理1でわかるが、次は容易に示される。

補題2. $\chi=\chi_0$又はχ_pとする。

(1) $g\in GL_n(F)$に対して

$$W_r^n({}^t g N g, \chi) = W_r^n(N, \chi)$$

が成り立つ。

(2) $a \in F^\times$ に対して

$$W_r^n(aN, \chi_p) = \chi_p(a)^r W_r^n(N, \chi_p)$$

$$W_r^n(aN, \chi_0) = W_r^n(N, \chi_0)$$

が成り立つ。

系3. $N \in \Lambda_{nt}$ とする。

(1) r が奇数, t が奇数ならば, $W_r^n(N, \chi_p)\chi_p(N)$ は N に依存しない。

(2) r が奇数, t が偶数ならば, $W_r^n(N, \chi_p) = 0$。

(3) r が偶数, t が奇数ならば, $W_r^n(N, \chi_p)$ は N に依存しない。

(4) t が奇数ならば, $W_r^n(N, \chi_0)$ は N に依存しない。

r が偶数で, t が偶数の時にも $W_r^n(N, \chi_p)$ は N に依存しないことが証明できる。

系3(1)に注意して, $1 \leq 2u-1,\ 2v-1 \leq n$ を充たす自然数 u, v と $N \in \Lambda_{n\,2v-1}$ に対し

$$W_0^n(u, v) = W_{2u-1}^n(N, \chi_p)\chi_p(N)$$

と置けば、これはNの取り方によらないことがわかる。これを用いて行列値のガウス和 $W_0^n(\chi_p)$ を次で定義する。

定義4.

$$W_0^n(\chi_p) = \left(W_0^n(u, v) \right)$$

ここで、$W_0^n(\chi_p)$ は (u, v) 成分が $W_0^n(u, v)$ の $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 次の正方行列。

例5. $n=3, 5$ の時 $W_0^n(\chi_p)$ は次のように与えられる。

$$W_0^3(\chi_p) = \begin{pmatrix} p^2 & \chi_p(-1)p \\ \chi_p(-1)p^4(1-p^{-1}) & -p^2 \end{pmatrix} G(\chi_p)$$

$$W_0^5(\chi_p) = \begin{pmatrix} p^4 & \chi_p(-1)p^3 & p^2 \\ \chi_p(-1)p^{10}(1+p^{-2})(1-p^{-3}) & p^7 - p^6(1+p^{-2}) & -\chi_p(-1)p^5(1+p^{-2}) \\ p^{12}(1-p^{-1})(1-p^{-3}) & -\chi_p(-1)p^8(1-p^{-1}) & p^6 \end{pmatrix}$$

$$\times\ G(\chi_p)$$

$W_0^1(\chi_p)^2 = G(\chi_p)^2 = \chi_p(-1)p$ の類似として、次の定理が証明できる。

定理6.

$$W_0^n(\chi_p)^2 = \chi_p(-1)\, p^{\frac{n(n+1)}{2}}\, E_{[\frac{n+1}{2}]}$$

ここで $E_{[\frac{n+1}{2}]}$ は次数 $[\frac{n+1}{2}]$ の単位行列を表す。特に行列 $W_0^n(\chi_p)$ は正則である。

$W_r^n(N, \chi_0)$ の場合を取り扱うために、いくつかの命題を示す。

補題7. $\chi = \chi_0$ 又は χ_p とする。M_{rn}^* を

$$M_{rn}^* = \{\, Y \in M_{rn}(F) \mid \mathrm{rank}\, Y = r \,\}$$

と定義すると、次の式が成り立つ。

$$W_r^n(N, \chi) = \sum_{Y \in GL_r(F) \backslash M_{rn}^*} W_r^r(YN\,{}^tY, \chi)$$

この補題により $W_r^n(N, \chi)$ の計算は、定理1に帰着される。定理1から次の命題がわかる。

命題8. n は奇数とし、$M \in \Lambda_{nt}$, $N \in \Lambda_{n-1\, t-1}$ が $\chi_p(M) = \chi_p(N)$ を充たすとすると

$$W^n_n(M, \chi_p) = G(\chi_p)^n W^{n-1}_{n-1}(N, \chi_0)\text{。}$$

補題7と命題8を用いて次の命題が示される。

命題9. rを奇数とする。$M \in \Lambda_{nt}$, $N \in \Lambda_{n-1\,t-1}$ が $\chi_p(M) = \chi_p(N)$を充たすとすると

$$W^n_r(M, \chi_p) = G(\chi_p)^r (W^{n-1}_r(N, \chi_0) + W^{n-1}_{r-1}(N, \chi_0))\text{。}$$

系10. $N \in \Lambda_{nt}$とする。rとtが共に奇数ならば $W^n_r(N, \chi_0) + W^n_{r-1}(N, \chi_0) = 0$。$t$が偶数で，$r$が奇数ならば，$(W^n_r(N, \chi_0) + W^n_{r-1}(N, \chi_0))\chi_p(N)$ は，Nに依存しない。

$0 \le 2u, 2v \le n$ なる自然数 u, v と $N \in \Lambda_{n\,2v}$ に対して

$$W^n_e(u, v) = \begin{cases} W^n_{2u}(N, \chi_0)\chi_p(N) & n = 2v \\ (W^n_{2u+1}(N, \chi_0) + W^n_{2u}(N, \chi_0))\chi_p(N) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\tilde{W}^n_e(u, v) = G(\chi_p)^{2u+1} W^n_e(u, v)$$

で $W^n_e(u, v)$, $\tilde{W}^n_e(u, v)$ を定義すれば，これらは u, v に

のみ依存して決まる。

定義11.

$$W_e^n(\chi_p) = (W_e^n(i-1, j-1))$$

$$\widetilde{W}_e^n(\chi_p) = (\widetilde{W}_e^n(i-1, j-1))$$

ここで $W_e^n(\chi_p)$, $\widetilde{W}_e^n(\chi_p)$ は (i, j) 成分が、夫々 $W_e^n(i-1, j-1)$, $\widetilde{W}_e^n(i-1, j-1)$ である $[\frac{n}{2}]+1$ 次の正方行列である。

命題8, 9より $\widetilde{W}_e^n(\chi_p) = W_o^{n+1}(\chi_p)$ がわかる。従って次の命題を得る。

命題12.

$$\widetilde{W}_e^n(\chi_p)^2 = \chi_p(-1)\, p^{(n+1)(n+2)/2}\, E_{[\frac{n}{2}]+1}$$

特に $W_e^n(\chi_p)$ は正則行列である。

注意1. $p=2$ のときも、F_2 上の二次形式を用いて $W_e^2(\chi_p)$ を定義することができる。

注意2. $W_o^3(\chi_p)$, $W_o^5(\chi_p)$ は次のように対角化される。

$$P^{-1} W_o^3(\chi_p) P = \begin{pmatrix} p^{\frac{5}{2}} & 0 \\ 0 & -p^{\frac{5}{2}} \end{pmatrix} G(\chi_p), \quad P = \begin{pmatrix} \chi_p(-1) & \chi_p(-1) \\ -p+p^{\frac{3}{2}} & -p-p^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}W_0^5(\chi_p)P = \begin{pmatrix} p^7 & & 0 \\ & p^7 & \\ 0 & & -p^7 \end{pmatrix} G(\chi_p), \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \chi_p(-1)p^4 & -\chi_p(-1)p & -\chi_p(-1)(p+p^3) \\ -p^2 & p^5 & -p^5+p^4 \end{pmatrix}$$

一般には今の所わからない。

§2. 応用 I. (Siegel保型形式の twisting operator)

簡単のため，p を奇素数，ν を 2 以上の自然数，ψ を $c(\psi)p \mid p^\nu$ を充たす mod p^ν の指標 ($c(\psi)$は ψ の導手)，$\chi = \chi_0$ 又は χ_p とする。

$$\Gamma_0(p^\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_n(\mathbb{Z}) \;\middle|\; C \equiv 0 \bmod p^\nu \right\}$$

とし，$\Gamma_0(p^\nu)$ に関する指標 ψ，weight k の正則な Siegel 保型形式の空間を $M_k(p^\nu,\psi)$，cusp form の空間を $S_k(p^\nu,\psi)$ で表す。$f \in M_k(p^\nu,\psi)$ に対して

$$f \mid S_\chi^{(r)} = \sum_{S \in \Lambda_{nr}} \chi(S)\, f|_k \begin{pmatrix} E & S/p \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

と定義すると，[6] の Prop. 3.64 と同じように

命題 13　$f \in M_k(p^\nu,\psi)$ とすると，$f \mid S_\chi^{(r)} \in M_k(p^\nu,\psi)$。

$\chi = \chi_0$ 又は χ_p と，r，$0 \le r \le n$，に対して

$$\chi^{(r)}(N) = \begin{cases} \chi(N) & \text{if } N \in \Lambda_{n\,r} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義すると．$f \in M_k(p^\nu, \psi)$ に対して別の twisting operator $R_\chi^{(r)}$ が

$$f \mid R_\chi^{(r)} = \sum_N a(N)\,\chi^{(r)}(N)\,e(tr(NZ)),\ Z \in H_n$$

で定義される。ここで $e(*) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\,*)$ で $f = \sum_N a(N)\,e(tr(NZ))$ を f の Fourier 展開とする。H_n は Siegel 上半空間を表す。これらの operator を係数とするベクトルを

$$S_{\chi_p}^{o} = {}^t(S_{\chi_p}^{(1)}, S_{\chi_p}^{(3)}, \cdots, S_{\chi_p}^{(2[(n+1)/2]-1)})$$

$$S_{\chi_p}^{e} = \begin{cases} {}^t((S_{\chi_p}^{(0)} + S_{\chi_p}^{(1)}), \cdots, (S_{\chi_p}^{(n-2)} + S_{\chi_p}^{(n-1)}), S_{\chi_p}^{(n)}) & n \text{ 偶数} \\ {}^t((S_{\chi_p}^{(0)} + S_{\chi_p}^{(1)}), \cdots, (S_{\chi_p}^{(n-1)} + S_{\chi_p}^{(n)})) & n \text{ 奇数} \end{cases}$$

$$R_{\chi_p}^{o} = {}^t(R_{\chi_p}^{(1)}, R_{\chi_p}^{(3)}, \cdots, R_{\chi_p}^{(2[(n+1)/2]-1)})$$

$$R_{\chi_p}^{e} = {}^t(R_{\chi_p}^{(0)}, R_{\chi_p}^{(2)}, \cdots, R_{\chi_p}^{(2[n/2])})$$

と定めると，§1 の結果より次の命題が得られる。

命題 14.
$$S_{\chi_p}^{o} = W_o^n(\chi_p)\,R_{\chi_p}^{o}$$
$$S_{\chi_p}^{e} = W_e^n(\chi_p)\,R_{\chi_p}^{e}$$

系15　$f \in M_k(p^\nu, \psi)$ に対し $f|R_{\chi_p}^{(r)} \in M_k(p^\nu, \psi)$.

また Hecke operator との関係については、次の命題が示される。

命題16. $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GSp_n^+(\mathbb{R}) \cap M_{2n}(\mathbb{Z})$, $C \equiv 0 \bmod p^\nu$ とし, μ を M の multiplier とする。$f \in M_k(p^\nu, \psi)$ に対し

$$f \mid \Gamma_0(p^\nu) M \Gamma_0(p^\nu) \mid R_\chi^{(r)}$$

$$= \chi(\mu)^r f \mid R_\chi^{(r)} \mid \Gamma_0(p^\nu) M \Gamma_0(p^\nu)$$

が成り立つ。

r に対して

$$M_k^{(r)}(p^\nu, \psi) = M_k(p^\nu, \psi) | (R_{\chi_p}^{(r)})^2$$

$$= \{ f \in M_k(p^\nu, \psi) \mid \mathrm{rank}(N \bmod p) \neq r \Rightarrow a(N) = 0 \}$$

と置くと

$$M_k(p^\nu, \psi) = \bigoplus_{r=0}^{n} M_k^{(r)}(p^\nu, \psi)$$

は、Hecke operatorで閉じた $M_k(p^r, 4)$ の分解を与える。Hecke operatorの同時固有関数 f で

$$f \mid R^{(r)}_{\chi_p} = f$$

を充たすものは、$n = r = 1$, $p \equiv 3 \bmod 4$ の時には、虚二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ の量指標から得られた。一般にこのような f を特徴付けることは、興味あるように思われる (cf. [3])。

§3 応用II（対称行列のなすベクトル空間に付随する L関数）

p を奇素数とし、χ を $F^\times$ の指標とする。$\chi^2 \neq 1$ の場合は佐藤文広氏[5]により取り扱われているので、$\chi = \chi_0$ 又は χ_p とする。V で、n 次の実係数の対称行列の全体のなすベクトル空間を表し、V_i で signature が $(i, n-i)$ であるものの全体のなす V の部分集合を表す。$G^+ = \{ g \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det g > 0 \}$ とすれば、$\rho(g)x = gx\,{}^tg$, $x \in V$ で G^+ は V に作用する。$\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$ と置く。L で、$\mathbb{Q}$ 係数の n 次の対称行列のなすベクトル空間の格子で

$$\rho(\gamma)L = L \quad \gamma \in \Gamma, \quad L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p = \Lambda_n(\mathbb{Z}_p)$$

を充たすものとする。ここで $\Lambda_n(\mathbb{Z}_p)$ は $\mathbb{Z}_p$ 係数の n 次の対

称行列全体を表す。$\mu(x)$ $(x\in L)$ で G_x^+/Γ_x の測度を表す（測度の詳細については省略）。ここで $G_x^+=\{g\in G^+ \mid \rho(g)x=x\}$, $\Gamma_x=\Gamma\cap G_x^+$。$n\geqq 3$ の時，$\mu(x)$ は有限となることが知られている。$L_i=L\cap V_i$ と置いて L 関数を，$n\geqq 3$ のとき

$$\xi_i(s,L,\chi^{(r)})=\sum_{x\in L_i/\Gamma}\mu(x)\chi^{(r)}(x)|x|^{-s}$$

で定義する。$\xi_i(s,L,\chi^{(r)})$ は $Re\ s>\frac{n+1}{2}$ で絶対収束する。行列係数の L 関数を

$$\xi^o(s,L,\chi_p)=\begin{pmatrix} \xi_0(s,L,\chi_p^{(1)}) & \cdots & \xi_n(s,L,\chi_p^{(1)}) \\ \xi_0(s,L,\chi_p^{(3)}) & \cdots & \xi_n(s,L,\chi_p^{(3)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_0(s,L,\chi_p^{(2[(n+1)/2]-1)}) & \cdots & \xi_n(s,L,\chi_p^{(2[(n+1)/2]-1)}) \end{pmatrix}$$

$$\xi^e(s,L,\chi_p)=\begin{pmatrix} \xi_0(s,L,\chi_p^{(0)}) & \cdots & \xi_n(s,L,\chi_p^{(0)}) \\ \xi_0(s,L,\chi_p^{(2)}) & \cdots & \xi_n(s,L,\chi_p^{(2)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_0(s,L,\chi_p^{(2[n/2])}) & \cdots & \xi_n(s,L,\chi_p^{(2[n/2])}) \end{pmatrix}$$

$$\xi(s,L,\chi_0)=$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \xi_0(s,L,\chi_0^{(0)}+\chi_0^{(1)}) & \cdots & \xi_n(s,L,\chi_0^{(0)}+\chi_0^{(1)}) \\ \xi_0(s,L,\chi_0^{(2)}+\chi_0^{(3)}) & \cdots & \xi_n(s,L,\chi_0^{(2)}+\chi_0^{(3)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_0(s,L,\chi_0^{(n-1)}+\chi_0^{(n)}) & \cdots & \xi_n(s,L,\chi_0^{(n-1)}+\chi_0^{(n)}) \end{pmatrix} \text{ if } n \text{ is odd} \right.$$

$$\left(\begin{pmatrix} \xi_0(s,L,\chi_0^{(0)}+\chi_0^{(1)}) & \cdots & \xi_n(s,L,\chi_0^{(0)}+\chi_0^{(1)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_0(s,L,\chi_0^{(n-2)}+\chi_0^{(n-1)}) & \cdots & \xi_n(s,L,\chi_0^{(n-2)}+\chi_0^{(n-1)}) \\ \xi_0(s,L,\chi_0^{(n)}) & \cdots & \xi_n(s,L,\chi_0^{(n)}) \end{pmatrix} \right. \text{if } n \text{ is even}$$

と定義すると次の定理が証明される。

定理17. $n \geqq 3$ とする。$\xi^o(s,L,\chi_p)$, $\xi^e(s,L,\chi_p)$, $\xi(s,L,\chi_0)$ は、全 s 平面に有理形関数として解析接続され、関数等式

$$\xi^o\left(\tfrac{n+1}{2}-s, L, \chi_p\right) = v(L)^{-1}\chi_p(-1)\, p^{-n(n+1)/2} p^{ns} \gamma(s) W_o^n(\chi_p)\, \xi^o(s,L^*,\chi_p)\, U(s)$$

$$\xi\left(\tfrac{n+1}{2}-s, L, \chi_p\right) = v(L)^{-1} p^{-n(n+1)/2} p^{ns} \gamma(s) W_e^n(\chi_p)\, \xi^e(s,L^*,\chi_p)\, U(s)$$

を充たす。ここで L^* は L の dual lattice,

$$\gamma(s) = \pi^{n(n-1)/4}(2\pi)^{-ns} e(ns/4) \prod_{i=0}^{n-1} \Gamma\left(s - \tfrac{n-1-i}{2}\right),$$

$U(s)$ は指数関数の一次結合を成分とする $n+1$ 次の正方行列である。

証明は [7] に従う。$n+1$ 列目については、その極と留数を記述できる。$n=2$ の場合も [4], [7] に従って取り扱うことができる。例えば $\chi_p(-1)=-1$ のとき

$$\zeta_2\left(\tfrac{3}{2}-s,\ L^*,\ \chi_p\right) = i^{-1} v(L) W_0^2(\chi_p) p^{2s-3} 2^{2-2s} \pi^{1/2-2s}\, \Gamma\left(s-\tfrac{1}{2}\right)\Gamma(s) \times \sin \pi s\ \zeta_2(s, L, \chi_p)$$

が示せる。これは荒川恒男氏が[1]で述べておられることと合っている。

文献

[1] T. Arakawa, Special values of L-functions associated with the space of quadratic forms and the representation of $Sp(2n, F_p)$ in the space of Siegel cusp forms, Adv. Studies in Pure Math. 15, 1989. 96–169

[2] J. Murakami, 概均質ベクトル空間のガウス和. 第31回代数学シンポジウム報告集, 1985.

[3] H. Saito, M. Yamauchi, Trace formula of certain Hecke operators for $\Gamma_0(q^\nu)$, Nagoya Math. J. 76, 1–33 (1979).

[4] F. Sato, On zeta functions of ternary zero forms. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 28, 585–604 (1981).

[5] F. Sato, On functional equations of zeta distributions, Adv. Studies in Pure Math. 15, 1989, 465–508

[6] G. Shimura, Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Iwanami Shoten, Princeton U.P, 1971

[7] T. Shintani, On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 22, 25–65 (1975).

[8] H. Saito, A generalization of Gauss sums and its applications to Siegel modular forms and L-functions associated with the vector space of quadratic forms (preprint)