

Strong Partition Cardinal と Spector Forcing

ICOT 佐藤洋祐 (Yosuke Sato)

概要 Mitchell Spector により考案された Strong Partition Cardinal の存在を認める集合論のモデルの Generic extension について概説を与える。

§0 準備

定義 0.1 κ が Strong Partition Cardinal であるとは κ が Partition Property $\kappa \rightarrow (\kappa)_{\lambda}^{\kappa}$ を任意の順序数 $\lambda < \kappa$ に対して満たすことと定義する。

以下の結果が知られている。

定理 0.2 κ が Strong Partition Cardinal
 $\implies \kappa$ は measurable cardinal

定理 0.3 κ が Strong Partition Cardinal
 $\implies AC_{\kappa}$ は成り立たない

定理 0.4 $\aleph \rightarrow (\aleph)_{\aleph}^{\aleph} \implies \aleph \rightarrow (\aleph)_{2^{\aleph}}^{\aleph}$

§ 1 Spector Forcing

M を $ZF + DC$ の Standard Transitive モデルとし、 M において \aleph は Strong Partition Cardinal であるとする。

定義 1.1 Forcing Condition (P, \leq) を $(P, \leq) = ([\aleph]^{\aleph}, \subseteq)$ で定義する。

定理 1.2 上の Forcing Condition における Generic extension を $M[G]$ とするとき、 $M[G]$ において以下が成り立つ。

- (1) G は \aleph 上の \aleph -complete nonprincipal ultrafilter
- (2) \aleph^{\aleph}/G には \aleph 番目の要素がない、すなわち G は \aleph 上の non-well-founded measure になる。したがって DC (dependent choice) はなりたたない。
- (3) AC_{ω} (countable axiom of choice) はなりたつ。

定理 1.2 の証明はいくつかの補題で構成されるが、それを述べる前に次の定義を与える。

定義 1.3 $P, Q \in [X]^X$ に対し $PQ \in [X]^X$ を P と Q の合成として定義する. すなわち $\forall \alpha < X \quad PQ(\alpha) = P(Q(\alpha))$.

補題 1.4 $\forall \alpha < X \quad M^\alpha \cap M[G] = M^\alpha \cap M$

証明

$f \in M^\alpha \cap M[G]$ とする. $P \Vdash \underline{f} \in \underline{M}^\alpha$ なる任意の condition P に対し partition $F: [X]^X \rightarrow 2^\alpha$ を以下のように定める.

$$F(Q) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \beta < \alpha \mid \exists \pi \in M \ P \Vdash \underline{f}(\beta) = \pi \}$$

ここで \underline{f} は f の name \underline{M} は M に対応する述語.

M において \aleph は strong partition cardinal なので

$\aleph \rightarrow (\aleph)_{\aleph}^{\aleph}$ をみたす. したがって定理 0.4 により

$\aleph \rightarrow (\aleph)_{2^\alpha}^{\aleph}$ が成り立つ.

よって F は homogeneous set S をもつ. \aleph の部分集合で cardinality \aleph のものは $[X]^X$ の元と同一視できるので S を $[X]^X$ の元とみなすことができる.

さて $r \leq PS \iff \exists S' \leq S \quad r = PS'$ に注意すると

$$\forall r \leq PS \quad \forall \beta < \alpha \quad (\exists \pi \in M \ r \Vdash \underline{f}(\beta) = \pi \iff \exists \pi \in M \ PS \Vdash \underline{f}(\beta) = \pi)$$

また $PS \leq P$ なので $PS \Vdash \underline{f} \in \underline{M}^\alpha$. したがって

$$\forall \beta < \alpha \quad \exists r \leq PS \quad \exists \pi \in M \ r \Vdash \underline{f}(\beta) = \pi$$

以上より

$$\forall \beta < \alpha \quad \exists \pi \in M \ PS \Vdash \underline{f}(\beta) = \pi$$

$f' \in M^\alpha \cap M$ を次のように定める.

$$\forall \beta < \alpha \quad f'(\beta) = \mathcal{X} \iff_{\text{def}} \text{PS} \Vdash \underline{f}(\beta) = \mathcal{X}$$

このとき $\text{PS} \Vdash f' = \underline{f}$ がいえるので

$\text{PS} \Vdash \underline{f} \in M$ が成り立つ.

以上より $\forall P \text{ PS} \Vdash \underline{f} \in M^\alpha \Rightarrow \exists r \leq P \text{ } r \Vdash \underline{f} \in M$

が示された.

これにより $P \Vdash \underline{f} \in M^\alpha$ なる任意の P に対し

$D = \{r \in [X]^\alpha \mid r \Vdash \underline{f} \in M\}$ は P 以下で dense すなわち

$\forall q \leq P \exists r \leq q \text{ } r \in D$ となる.

さて P を G の元としてとれるので $D \cap G \neq \emptyset$

よって $\exists r \in G \text{ } r \Vdash \underline{f} \in M$ すなわち $M[G] \models \underline{f} \in M$

したがって $f \in M$.

q.e.d.

補題 1.5 任意の condition $P, Q \in [X]^\alpha$ に対し P, Q が final segment を共有する. すなわちある $\alpha < \mathcal{X}$ が存在して

$P - \alpha = Q - \alpha$ なら, 任意の generic filter G に対し

$$P \in G \iff Q \in G$$

証明

$P \in G \Rightarrow Q \in G$ を示せば十分.

そのためには $\{r \in [X]^\alpha \mid r \leq Q\}$ が P 以下で dense になる

ことをいえばよいが容易に示せる.

q.e.d.

補題 1.6 $M^X \cap M[G] = M^X \cap M$

証明

$f \in M^X \cap M[G]$ とする. 補題 1.4 より $\forall \alpha < X \ f \upharpoonright \alpha \in M$

$P \Vdash \underline{f} \in \underline{M}^X \ \& \ \forall \alpha < X \ f \upharpoonright \alpha \in \underline{M}^X$ なる任意の condition

P に対し partition $F: [X]^X \rightarrow \mathcal{Q}$ を以下のように定める.

$$F(p) = 0 \quad \text{iff} \quad \exists x \in M \ p \Vdash f \upharpoonright n p = x$$

ここで $n p$ は p の最小元を表わす.

$S \in [X]^X$ を F の homogeneous set とする

$p \leq S$ より $p \Vdash \underline{f} \in \underline{M}^X \ \& \ \forall \alpha < X \ f \upharpoonright \alpha \in \underline{M}^X$

よって $\exists t \leq p \ \exists x \in M \ t \Vdash f \upharpoonright n t = x$

よって $\exists r \leq S \ \exists x \in M \ r \Vdash f \upharpoonright n r = x$

$n S = n(r \cup \{n r\})$ なので

$$\exists r \leq S \ \exists x \in M \ r \Vdash f \upharpoonright n(r \cup \{n r\}) = x$$

r と $p(r \cup \{n r\})$ は final segment を共有するので補題 1.5

により $p(r \cup \{n r\}) \Vdash f \upharpoonright n(r \cup \{n r\}) = x$

したがって $F(r \cup \{n r\}) = 0$

よって S が homogeneous であるので $F \upharpoonright [S]^X = \{0\}$

任意の $\alpha < S$ に対し $S' = (S - \alpha) \cup \{\alpha\}$ とおくと

$n S' = \alpha$, $S' \leq S$ より $\exists x \in M \ p \Vdash f \upharpoonright \alpha = x$

$p \Vdash f \upharpoonright \alpha = x$ と p は final segment を共有するので

$p \Vdash f \upharpoonright \alpha = x$ したがって任意の $\beta < \alpha$ に対し

$\exists z \in M \text{ p.s.t. } \underline{z}(\beta) = z$

α はいくらでも大きくとることができるので、これが任意の $\beta < \kappa$ に対してなりたつ。

よって $\text{p.s.t. } \underline{z} \in M$ が補題 1.4 の証明と同様いえる。

したがって同様に $\underline{z} \in M$ が成りたつ。

q.e.d.

(注) 実際には任意の順序数 α に対し

$M^\alpha \cap M[G] = M^\alpha \cap M$ が成りたつことが知られている。

補題 1.7 $M[G] \models \underline{G}$ は X 上の κ -complete nonprincipal ultrafilter

証明

(P, \leq) が splitting すなわち任意の condition p に対し incompatible な p の extension r, s が存在するので $G \notin M$ 。したがって G は principal にはなりえない。

さて " $M[G] \models \underline{G}$ は X 上の filter" は明らかなので次を示せば十分。

任意の $\delta < \kappa$ に対し $\bigcup_{\alpha < \delta} A_\alpha = X \Rightarrow \exists \alpha A_\alpha \in G$

補題 1.6 により任意の $\alpha < \delta$ に対し $A_\alpha \in M$

よって補題 1.4 により $\langle A_\alpha \mid \alpha < \delta \rangle \in M$

$\forall p \in [X]^\kappa \bigcup_{\alpha < \delta} (p \cap A_\alpha) = p$ なので

$$\overline{\bigcup_{\alpha < \mathcal{S}} (P \cap A_\alpha)} = \overline{P} = X$$

M で X が measurable なのて regular になることに注意すると

$$\exists \alpha < \mathcal{S} \overline{P \cap A_\alpha} = X$$

したがって $\forall p \in [X]^X \exists r \in [X]^X r \leq p$ かつ $r \leq A_\alpha$ for some $\alpha < \mathcal{S}$.

よって $D = \{r \in [X]^X \mid r \leq A_\alpha \text{ for some } \alpha < \mathcal{S}\}$ は dense になる.

よって $\exists p \in G \cap D$ すなわち $\exists p \in G \exists \alpha p \leq A_\alpha$

したがって $\exists \alpha A_\alpha \in G$

q. e. d.

補題 1.8 $\forall \alpha, \beta < \aleph \ M[G] \models X \rightarrow (X)_\beta^\alpha$

証明

Partition $F: [X]^\alpha \rightarrow \beta$ に対し M の中で

Partition $F': [X]^X \rightarrow \beta + 1$ を次のように定める

$$F'(q) = \begin{cases} \text{the least } \eta < \beta \text{ such that } q \Vdash F(q \upharpoonright \alpha) = \eta & \text{if exists} \\ \beta & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\{X \in [X]^X \mid X \text{ は } F' \text{ の homogeneous set}\}$ は明らかに M に含まれ、dense なのて $\exists s \in G$ s は F' の homogeneous set

$M[G] \models F: [X]^\alpha \rightarrow \beta$ なのて

$\exists r \leq s$ $r \Vdash F(s \upharpoonright \alpha) = \eta$ for some $\eta < \beta$ となる.

$r \leq s$ より $s \upharpoonright \alpha = (r \cup (s \upharpoonright \alpha)) \upharpoonright \alpha$

$$\text{よ, } \tau \quad r \Vdash F((r \cup (S \upharpoonright \alpha)) \upharpoonright \alpha) = \eta$$

r と $r \cup (S \upharpoonright \alpha)$ は final segment を共有するので

$$r \cup (S \upharpoonright \alpha) \Vdash F((r \cup (S \upharpoonright \alpha)) \upharpoonright \alpha) = \eta$$

$$\text{したが, } \tau \quad F'(r \cup (S \upharpoonright \alpha)) = \eta$$

$$\text{よ, } \tau \quad F' "[S]^{\times} = \{\eta\}$$

$\forall t \in [S]^{\alpha} \quad (S - Ut) \cup t \in [S]^{\alpha}$ なので

$$(S - Ut) \cup t \Vdash F(\{(S - Ut) \cup t\} \upharpoonright \alpha) = \eta$$

$\{(S - Ut) \cup t\} \upharpoonright \alpha = t$ なので

$$(S - Ut) \cup t \Vdash F(t) = \eta$$

S と $(S - Ut) \cup t$ は final segment を共有するので

$$(S - Ut) \cup t \in G \quad \text{したが, } \tau \quad M[G] \Vdash F(t) = \eta$$

よ, $\tau \quad S$ は F の homogeneous set になる.

q.e.d.

補題 1.9 X^{\times}/G には κ 番目の要素がない

証明

補題 1.4 の証明と同様に $f \in X^{\times}$ に対し

$P \Vdash f$ is not constant almost everywhere を満たす任意の

condition P に対し condition $q \leq P$ と $g \in X^{\times}$ が存在し

て

$q \Vdash g < f$ almost everywhere & g is not constant almost everywhere

が成り立つことを示せば十分.

ここで $P \in G$ としてもよいことに注意する.

Partition $F: [X]^2 \rightarrow 3$ を次のように定義する.

$$F(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{if } f(\alpha) < f(\beta) \\ 1 & \text{if } f(\alpha) = f(\beta) \\ 2 & \text{if } f(\alpha) > f(\beta) \end{cases}$$

さて F の homogeneous set が G からとれるので

$P \in G$ とあわせて homogeneous set $X \leq P$ をとることができる.

もし $F''[X]^2 = \{1\}$ なら

$X \models f$ is constant almost everywhere

よって $M[G] \models f$ is constant almost everywhere.

となり矛盾.

もし $F''[X]^2 = \{2\}$ なら

$f(x(0)) > f(x(1)) > \dots$

となり矛盾.

よって $F''[X]^2 = \{0\}$ でなければならぬ.

さて $\mathcal{Q} \in [X]^X$ を $\mathcal{Q} = \{x(\beta+1) \mid \beta < \kappa\}$ とおき

$$g \in X^X \text{ を } g(\alpha) = \begin{cases} f(x(\beta)) & \text{if } \alpha = x(\beta+1) \\ 0 & \alpha \notin \mathcal{Q} \end{cases}$$

で定義する.

任意の $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{Q}$ に対し $\alpha_1 < \alpha_2$ なら、ある $\beta_1 < \beta_2$ があ

って、 $\alpha_1 = X(\beta_1 + 1) < \alpha_2 = X(\beta_2 + 1)$ とおけるので

$F \text{ " } [X]^2 = \{0\}$ より $g(\alpha_1) = f(X(\beta_1)) < f(X(\beta_2)) = g(\alpha_2)$

よって $\mathcal{Q} \Vdash g$ is not constant almost everywhere

また任意の $\alpha \in \mathcal{Q}$ に対し $\alpha = X(\beta + 1)$ とおけ

$g(\alpha) = f(X(\beta)) < f(X(\beta + 1)) = f(\alpha)$

よって $\mathcal{Q} \Vdash g < f$ almost everywhere

q. e. d.

補題 1.10 任意の $\alpha < X$ に対し

$$M \models AC_\alpha \Rightarrow M[G] \models AC_\alpha$$

証明

f を $M[G]$ で 定義域を α とする関数で $\forall \beta < \alpha, f(\beta) \neq \emptyset$ とする.

$P \Vdash \underline{f}$ は 定義域を α とする関数で $\forall \beta < \alpha, \underline{f}(\beta) \neq \emptyset$

なる任意の condition P に対し partition

$F: [X]^\alpha \rightarrow \alpha + 1$ を次のように定義する.

$$F(\mathcal{Q}) = \begin{cases} \text{the least } \beta < \alpha \text{ if exists such that} \\ \quad P \mathcal{Q} \Vdash \tau \in \underline{f}(\beta) \text{ なる term } \tau \text{ が} \\ \quad \text{存在しない} \\ \alpha \text{ otherwise} \end{cases}$$

F の homogeneous set を S とする

もしある $\beta < \alpha$ に対し $F''[S]^X = \{\beta\}$ なら

$\forall r \leq p_S \quad r \Vdash \tau \in \underline{f}(\beta)$ なる term τ が存在しない。

$p_S \leq p$ より $p_S \Vdash \underline{f}(\beta) \neq \emptyset$ なので矛盾

よ、 $\tau \in F''[S]^X = \{\alpha\}$

$M \models AC_\alpha$ なので $\langle \tau_\beta \mid \beta < \alpha \rangle \in M$ をとり

$\forall \beta < \alpha \quad p_S \Vdash \tau_\beta \in \underline{f}(\beta)$ とできる

これを使、 $\tau \in p_S \Vdash \underline{f}$ が choice function を与え

が示される。

よ、 τ 、前と同様にして $M[G] \models AC_\alpha$ が成り立つ。

q. e. d.

参考文献

- [1] J. M. HENLE ; Aspect of choiceless combinatorial set theory, Ph. D. Thesis MIT 1976
- [2] E. M. Kleinberg ; Infinitary combinatorics and the axiom of determinateness, Lecture Notes in Mathematics vol. 612 Springer Berlin, 1977
- [3] M. Spector ; A measurable cardinal with a nonwellfounded ultrapower, The Journal of Symbolic Logic vol. 45, 1980