数理解析研究所講究録
第 728 巻 1990 年 18-103

Silver Machine による Gap-1 Morass の構成

名古屋大学　古田泰之 (Yasuyuki Koda)

目 次

Introduction

この論文では、Silver Machine($L[A]$-machine) を用いて、

$$V = L[A] \ \& \ A \subseteq \kappa \ \& \ \kappa \geq \omega_1 \ \& \ \kappa \text{は regular} \ \Rightarrow \ (\kappa, 1)\text{-morassが存在する}$$

を証明する。実際には、簡単のために、$\kappa = \omega_1$のときのみを論じ (II. 定理 3.1) 、一般のκについては、$\kappa = \omega_1$の場合と殆ど同じなので、この論文の最後 (II.5) で少々の注意をするにとどめた。この結果自体は、既に $L[A]$の Fine Structure を用いて得られている ([3],[6]を参照) 。また[6]によれば、1978 年までには既に、

$$V = L \ \& \ \kappa \geq \omega_1 \ \& \ \kappa \text{は regular} \ \Rightarrow \ (\kappa, 1)\text{-morassが存在する}$$

も Silver machine を用いて証明されている (Silver and Richardson) 。さて、この証明では、仮定が、$V = L$ であるために、本来の L-machine を用いれば良いが、$V = L[A]$の場合には、L-machine では不十分であるので、これを改良した $L[A]$-machine を用いる。尚、L-machine については[7]を参照されたい。

この論文の構成は、大きく分けて、I と II の二つの部分から成っている。まず、I では、morass の存在証明に用いる Silver machine についての議論がなされる。1 と 2 は、ごく基本的なことであり、これらについては[7]を見られたい。3 で、$L[A]$-machine を定義し、その性質を調べる。

II は、$(\omega_1, 1)$-morass の存在証明にあてられている。1 では、証明に必要な事実を準備し、2 で $(\omega_1, 1)$-morass の定義をする。3 から 5 は全て存在証明である。3 で、morass のもとになる$\overline{\mathfrak{M}}$を定義し、4 で、それ

が必要な性質をもつことを示す。最後に5で、$\overline{\mathfrak{M}}$から$(\omega_1, 1)$-morass $\mathfrak{M}$を構成し、それが$(\omega_1,1)$-morassであることを証明する。そして、$(\kappa,1)$-morassの存在証明についての注意を述べる。

用いる記号は全て通常の集合論の記号であるが、関数σに対して

$$\{\sigma(x)|x \in X\}$$

を表すときに$\sigma[X]$と$\sigma``X$の二種類の記号を用いた。特に使い分ける必要は無いのだが、$\sigma[X]$は、主に$\sigma[p]$の形で用いてある。また、ω_1, ω_2は、それぞれ、1番目2番目のuncountable cardinalである。

I.Silver Machines

1.Machines

まずalgebraを定義する。空でないclass$A$に対し、$A^{<\omega}$は、Aの元の有限列の全体を表すものとする。そしてstructure $\mathcal{A} = (A, F_i)_{i \in I}$がalgebraであるということを、各$F_i$が$A^{<\omega}$から$A$へのpartial functionであることと定める。各F_iを$\mathcal{A}$の関数と呼ぶことにする。

今、$\mathcal{A} = (A, F_i)_{i \in I}, \mathcal{B} = (B, G_i)_{i \in I}$がalgebraであるとする。ただし、index set Iは共通であることに注意する。$\pi : A \to B$が$\mathcal{A}$から$\mathcal{B}$へのmonomorphismであるとは、πが1対1で、さらに、すべての$i \in I$と$u \in A^{<\omega}$に対して

$$\pi(F_i(u)) \simeq G_i(\pi(u))$$

が成り立つことである。このとき

$$\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \quad \text{mono}$$

と書くことにする。ここで、$\pi(u)$は、$u = \langle u_0, \cdots, u_{n-1}\rangle$のとき

$$\pi = \langle \pi(u_0), \cdots, \pi(u_{n-1})\rangle$$

であり、また$\pi(F_i(u)) \simeq G_i(\pi(u))$とは

$$[u \in dom(F_i) \leftrightarrow \pi(u) \in dom(G_i)] \ \& \ [u \in dom(F_i) \to \pi(F_i(u)) = G_i(\pi(u))]$$

のことである。尚、$dom(F_i), dom(G_i)$はF_i, G_iの定義域である。

$X \subseteq A$が$\mathcal{A}$のsubalgebraであるとは、各$i \in I$に対し

$$u \in X^{<\omega} \ \& \ u \in dom(F_i) \to F_i(u) \in X$$

となっていることと定める。また、任意に与えられた$X \subseteq A$に対し、$\mathcal{A}(X)$は、Xで生成された$\mathcal{A}$のsubalgebraを表すものとする。

Algebra については、次のことが容易にわかる。

1.1. 補題. $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$を algebra とする。$\pi_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}, \pi_1 : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$が共に monomorphism であれば、$\pi_1 \circ \pi_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ mono である。

1.2. 補題.$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$を algebra とし、$\pi_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}, \pi_1 : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$が共に monomorphism であるとする。もし $range(\pi_0) \subseteq range(\pi_1)$ であれば

$$\pi_1^{-1} \circ \pi_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \quad \text{mono}$$

である。

1.3. 補題.$\mathcal{A}, \mathcal{B}$が algebra であり、$\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ mono であるとする。このとき任意の $X \subseteq A$ に対し

$$\pi[\mathcal{A}(X)] = \mathcal{B}(\pi[X])$$

である。

証明.$\mathcal{A} = (A, F_i)_{i \in I}$としておく。$\mathcal{A}(X)$ は次のようにして定めることができる:集合列 $\langle X_n | n < \omega \rangle$ を、

$$X_0 = X$$
$$X_{n+1} = X_n \cup \bigcup_{i \in I} F_i[X_n^{<\omega}]$$

とする。すると、

$$\mathcal{A}(X) = \cup_{n<\omega} X_n$$

である。$\mathcal{B}(\pi[X])$ も同じように集合列 $\langle Y_n | n < \omega \rangle$ を作って定めることができる。すると、$n < \omega$について の帰納法で、

$$\pi[X_n] = Y_n$$

がいえるから、このことにより、

$$\pi[\mathcal{A}(X)] = \mathcal{B}(\pi[X])$$

となる。

1.4. 定義.

(1) Algebra $\mathcal{A} = (A, F_i)_{i \in I}$が machine であるとは

(a) $A = On$ または $A \in On - \{0\}$.　ここで On は順序数の全体である。

(b) $I = \omega$.　ωは自然数の全体である。

(c) F_0は、$u \in A^{<\omega}$に対し

$$F_0(u) = \begin{cases} 0, & \text{if } u = \langle \alpha, \beta \rangle \ \& \ \alpha < \beta \\ \text{undefined}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と定められるものである。

(2) $\mathcal{A}=(A,F_i)_{i\in\omega}$を machine とし、$\delta\in On$ とする。このとき、$\mathcal{A}^\delta$は algebra $(\delta,F_i^\delta)_{i\in\omega}$を表すものとする。ここで、$F_i^\delta$は$\delta^{<\omega}$から$\delta$への partial function であり、$u\in\delta^{<\omega}$に対し

$$F_i^\delta(u)=\begin{cases} F_i(u), & \text{if } u\in dom(F_i)\ \&\ F_i(u)<\delta \\ \text{undefined}, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

と定められるものである。これは $\mathcal{A}$ の subalgebra ではないことに注意する。

(3) $\mathcal{A}$ を machine とし、$\bar{\delta},\delta\in On$ とする。$\pi:\bar{\delta}\to\delta$が strong $\mathcal{A}$-map であるとは、

$$\pi:\mathcal{A}^{\bar{\delta}}\to\mathcal{A}^\delta\quad\text{mono}$$

であることである。

1.5. 補題.$\mathcal{A},\mathcal{B}$が machine で $\pi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$　mono であればπは順序保存である。即ち、$\alpha,\beta\in A$ に対して、$\alpha<\beta\to\pi(\alpha)<\pi(\beta)$.

証明.$\mathcal{A}=(A,F_i)_{i\in\omega},\mathcal{B}=(B,G_i)_{i\in\omega}$とする。$F_0,G_0$は共に定義 1.4. の (1) で定められるものである。$\alpha,\beta\in A$ とし、$\alpha<\beta$とする。すると

$$F_0(\langle\alpha,\beta\rangle)=0\in A$$

であるから、$\pi(F_0(\langle\alpha,\beta\rangle))=\pi(0)$ であるが、$\pi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$　mono だから

$$G_0(\langle\pi(\alpha),\pi(\beta)\rangle)=\pi(0).$$

よって $G_0(\langle\pi(\alpha),\pi(\beta)\rangle)$ が定義されていることになるので、$\pi(\alpha)<\pi(\beta)$ でなければならない。さらに $\pi(0)=0$ もわかる。

1.6. 補題.$\mathcal{A},\mathcal{B}$を machine とし、$\pi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$　mono とする。δを

$$\delta=sup\{\pi(\alpha)+1|\alpha\in A\}$$

とすると、$\pi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}^\delta$　mono である。

証明.$\mathcal{A}=(A,F_i)_{i\in\omega},\mathcal{B}=(B,G_i)_{i\in\omega}$とする。$i\in\omega,u\in A^{<\omega}$に対して

$$\pi(F_i(u))\simeq G_i^\delta(\pi(u))$$

を示す。まず、$u\in dom(F_i)$ とすると、$\pi(u)\in dom(G_i)$ であり

$$G_i(\pi(u))=\pi(F_i(u))<\delta.$$

従って、$\pi(u) \in dom(G_i^\delta), \pi(F_i(u)) = G_i^\delta(\pi(u))$ となる。
次に、$\pi(u) \in dom(G_i^\delta)$ であれば、$\pi(u) \in dom(G_i)$ であるから、$u \in dom(F_i)$. これで、$\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}^\delta$ mono がわかる。

1.7. 補題.$\mathcal{A}, \mathcal{B}$を machine とし、$\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ mono とする。$\alpha \in A$ に対し、

$$\pi \upharpoonright \alpha : \mathcal{A}^\alpha \to \mathcal{B}^{\pi(\alpha)} \quad \text{mono}$$

である。
証明. まず、補題 1.5. により、πが順序保存であることに注意する。
$u \in \alpha^{<\omega}$とし、$u \in dom(F_i^\alpha)$ とする。$F_i^\alpha(u) = F_i(u)$ だから

$$\pi(F_i^\alpha(u)) = \pi(F_i(u)) = G_i(\pi(u)).$$

しかも、$F_i^\alpha(u) < \alpha$であるから、$G_i(\pi(u)) < \pi(\alpha)$. 故に

$$\pi(u) \in dom(G_i^{\pi(\alpha)}), \quad \pi(F_i^\alpha(u)) = G_i^{\pi(\alpha)}(\pi(u)).$$

次に、$\pi(u) \in dom(G_i^{\pi(\alpha)})$ であれば、$\pi(u) \in dom(G_i)$ だから、$u \in dom(F_i)$.さて

$$\pi(F_i(u)) = G_i(\pi(u)) = G_i^{\pi(\alpha)}(\pi(u)) < \pi(\alpha)$$

である。このことにより、$F_i(u) < \alpha$ となるから、$u \in dom(F_i^\alpha)$.
これで

$$\pi \upharpoonright \alpha : \mathcal{A}^\alpha \to \mathcal{B}^{\pi(\alpha)} \quad \text{mono}$$

がわかる。

1.8. 補題.$\mathcal{A} = (A, F_i)_{i\in\omega}, \mathcal{B} = (B, G_i)_{i\in\omega}$を machine とし、$\pi : A \to B$が cofinal(即ち、$\forall\beta \in B\exists\alpha \in A(\beta \leq \pi(\alpha)))$ であるとする。さらに A は limit ordinal かまたは $A = On$ とする。もし、任意の$\alpha \in A$ に対して、

$$\pi \upharpoonright \alpha : \mathcal{A}^\alpha \to \mathcal{B}^{\pi(\alpha)} \quad \text{mono}$$

であれば、$\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ mono である。
証明.$u \in A^{<\omega}$とする。$u \in dom(F_i)$ であれば、$F_i(u) \in A$。従って、$\alpha \in A$ を十分大きくとれば、$u \in \alpha^{<\omega}$, $F_i(u) < \alpha$とできる。このとき、$u \in dom(F_i^\alpha)$ であり、$F_i^\alpha(u) = F_i(u)$ である。従って

$$\pi(F_i(u)) = \pi(F_i^\alpha(u)) = G_i^{\pi(\alpha)}(\pi(u)) = G_i(\pi(u)).$$

これで、$\pi(u) \in dom(G_i)$, $\pi(F_i(u)) = G_i(\pi(u))$ となる。

次にもし$\pi(u) \in dom(G_i)$であれば、$G_i(\pi(u)) \in B$, $\pi(u) \in B^{<\omega}$であるから、$\pi : A \to B$が cofinal なことにより、$\alpha \in A$を十分大きくとり、$u \in \alpha^{<\omega}$, $G_i(\pi(u)) < \pi(\alpha)$とできる。すると、$\pi(u) \in dom(G_i^{\pi(\alpha)})$であるから、$u \in dom(F_i^{\alpha})$となるので、$u \in dom(F_i)$. これで、

$$\pi(F_i(u)) \simeq G_i(\pi(u))$$

がいえた。また各$\pi \restriction \alpha$は1対1なので、πも1対1であり、従って

$$\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \quad \text{mono}$$

となる。

1.9. 定義.Machine $\mathcal{A}$ が finite support property (FSP) をみたすとは、任意の$\delta \in On$に対して、次の条件 (1),(2) をみたす有限な $H_\delta \subseteq \delta$が存在することである:

(1) $H_\delta \subseteq \mathcal{A}^{\delta+1}(\{\delta\})$

(2) $\pi : \bar{\delta} \to \delta$が strong $\mathcal{A}$-map で、$H_\delta \subseteq range(\pi)$であれば、$\pi(\bar{\delta}) = \delta$として$\pi$を拡張したものが、$\bar{\delta}+1$から$\delta+1$への strong $\mathcal{A}$-map になる。(このように拡張したものも πと書くことにする。)

このようなH_δをδの support と呼ぶ。

1.10. 定義.

(1) $X \subseteq \delta$とし、$\bar{\delta}$をXの順序型とする。このとき、一意的に定まる順序同型 $\pi : \bar{\delta} \to X$をXの collapsing map という。

(2) Machine $\mathcal{A}$ が collapsing property(CP) をみたすとは、任意の$\delta \in On$と$X \subseteq \delta$に対して、Xが$\mathcal{A}^\delta$の subalgebra であれば、Xの collapsing map $\pi : \bar{\delta} \to X$が $\bar{\delta}$からδへの strong $\mathcal{A}$-map になることである。

1.11. 定理.$\mathcal{A}$ が FSP をみたせば、$\mathcal{A}$ は CP もみたす。

証明.$\delta \in On$を任意にとり、$X \subseteq \delta$を$\mathcal{A}^\delta$の subalgebra,$\pi : \bar{\delta} \to X$をXの collapsing map とする。πを拡張して、$\pi(\bar{\delta}) = \delta$としておく。まず次のことを示しておく。

(1) 任意の$\bar{\eta} \leq \bar{\delta}$に対し、$range(\pi \restriction \bar{\eta})$は$\mathcal{A}^{\pi(\bar{\eta})}$の subalgebra である。

証明.$u \in range(\pi \restriction \eta)^{<\omega}$とし、$F$を$\mathcal{A}$の関数とする。$F^{\pi(\bar{\eta})}(u)$が定義されているとする。$u \in X^{<\omega}$であり、$F^{\pi(\bar{\eta})}(u) = F^\delta(u)$だから、$X$が$\mathcal{A}^\delta$の subalgebra であることから、$F^{\pi(\bar{\eta})}(u) \in X$.従って$F^{\pi(\bar{\eta})}(u) = \pi(\bar{\nu})$となる$\bar{\nu} < \bar{\delta}$がとれる。ところで、$\pi(\bar{\nu}) = F^{\pi(\bar{\eta})}(u) < \pi(\bar{\eta})$だから、$\bar{\nu} < \bar{\eta}$である。故に

$$F^{\pi(\bar{\eta})}(u) \in range(\pi \restriction \eta)$$

となるので、$range(\pi \restriction \eta)$は$\mathcal{A}^{\pi(\bar{\eta})}$の subalgebra である。

(2) $\bar{\eta} \leq \bar{\delta}$に対して、$\sigma_{\bar{\eta}} = sup\{\pi(\bar{\nu})+1 | \bar{\nu} < \bar{\eta}\}$とする。このとき$\pi \restriction \bar{\eta}$が $\bar{\eta}$から$\sigma_{\bar{\eta}}$への strong$\mathcal{A}$-map であれば、

$$\pi \restriction \bar{\eta} : \bar{\eta} \to \pi(\bar{\eta}) \quad \text{strong } \mathcal{A}\text{-map}$$

証明. まず、$\sigma_{\bar{\eta}} \leq \pi(\bar{\eta})$である。今、$F$を$\mathcal{A}$の関数とし、$u \in \bar{\eta}^{<\omega}$とする。まず、$u \in dom(F^{\bar{\eta}})$とすると、

$$\pi(F^{\bar{\eta}}(u)) = F^{\sigma_{\bar{\eta}}}(\pi(u)) = F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u))$$

である。そこで、$\pi(u) \in dom(F^{\pi(\bar{\eta})})$ とする。$\pi(u) \in range(\pi \restriction \bar{\eta})^{<\omega}$だから、(1) によって、$F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u)) \in range(\pi \restriction \bar{\eta})$. 従って

$$F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u)) = \pi(\bar{\nu}), \quad \bar{\nu} < \bar{\eta}$$

とできるが、$\pi(\bar{\nu}) < \pi(\bar{\nu}) + 1 \leq \sigma_{\bar{\eta}}$なので、$F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u)) < \sigma_{\bar{\eta}}$である。即ち、$F^{\sigma_{\bar{\eta}}}(\pi(u))$ が定義されることになる。故に、$u \in dom(F^{\bar{\eta}})$ である。これで、

$$\pi(F^{\bar{\eta}}(u)) \simeq F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u))$$

がいえるので、(2) は証明された。

定理を証明するために、$\bar{\eta} < \bar{\delta}$についての帰納法で、

$$\pi \restriction \bar{\eta} : \bar{\eta} \to \pi(\bar{\eta}) \quad \text{strong } \mathcal{A}\text{-map}$$

を証明する。$\bar{\eta} = \bar{\delta}$とすれば、定理は直ちに従う。

まず、$\bar{\eta}$が limit ordinal であったとする。各$\bar{\nu} < \bar{\eta}$に対しては、

$$\pi \restriction \bar{\nu} : \bar{\nu} \to \pi(\bar{\nu}) \quad \text{strong } \mathcal{A}\text{-map}$$

である。今、$\sigma_{\bar{\eta}}$を (2) のようにとると、

$$\pi \restriction \bar{\eta} : \bar{\eta} \to \sigma_{\bar{\eta}} \quad \text{cofinal}$$

であるから、補題 1.8. により、$\pi \restriction \bar{\eta} : \bar{\eta} \to \sigma_{\bar{\eta}}$ strong $\mathcal{A}$-map となるが、さらに (2) によって、

$$\pi \restriction \bar{\eta} : \bar{\eta} \to \pi(\bar{\eta}) \quad \text{strong } \mathcal{A}\text{-map}$$

となる。

次に、$\bar{\eta} = \bar{\nu} + 1$ とする。$\pi \restriction \bar{\nu} : \nu \to \pi(\bar{\nu})$ strong $\mathcal{A}$-map である。$\mathcal{A}$ は FSP をみたすので、$\pi(\bar{\nu})$ の support $H = H_{\pi(\bar{\nu})}$がとれる。今、もし

$$H \subseteq range(\pi \restriction \bar{\nu})$$

であれば、$\pi \restriction \bar{\nu}$の拡張$\pi \restriction \bar{\eta}$については、定義 1.9.(2) により、

$$\pi \restriction \bar{\eta} : \bar{\eta} \to \pi(\bar{\nu}) + 1 \quad \text{strong } \mathcal{A}\text{-map}$$

となり、従って$\sigma_{\bar{\eta}} = \pi(\bar{\nu}) + 1$ により、(2) から

$$\pi \restriction \bar{\eta} : \bar{\eta} \to \pi(\bar{\eta}) \quad \text{strong } \mathcal{A}\text{-map}$$

となる。従って、$H \subseteq range(\pi \restriction \bar{\nu})$ を示せば良い。以下、これを示す。$\nu = \pi(\bar{\nu})$ とおくと、$\nu \in X$だから、$\nu \in X \cap (\nu+1)$ である。$Y = X \cap (\nu+1)$ とする。Yが $\mathcal{A}^{\nu+1}$の subalgebra であることをいうために、$u \in Y^{<\omega}$とし、Fを $\mathcal{A}$ の関数とし、$F^{\nu+1}(u)$ が定義されているとする。$F^{\nu+1}(u) = F^{\delta}(u) < \nu+1$ だから、Xが $\mathcal{A}^{\nu+1}$の subalgebra であることから、$F^{\nu+1} \in X \cap (\nu+1) = Y$. これで Yが $\mathcal{A}^{\delta+1}$の subalgebra であることがわかった。$\nu \in Y$であったから、定義 1.9.(1) とあわせて、

$$H \subseteq \mathcal{A}^{\nu+1}(\{\nu\}) \subseteq Y$$

従って

$$H = H \cap \nu \subseteq Y \cap \nu = X \cap \pi(\bar{\nu}) = range(\pi \restriction \bar{\nu})$$

となる。

1.12. 定義.Machine $\mathcal{A}$ が finiteness property (FP) をみたすとは、任意の$\delta \in On$ に対して、次の条件をみたす有限な $H \subseteq \delta$が存在することである:

$$\text{任意の } X \subseteq \delta \text{に対し、} \delta \cap \mathcal{A}^{\delta+1}(X \cup \{\delta\}) \subseteq \mathcal{A}^{\delta}(X \cup H)$$

1.13. 定理.$\mathcal{A}$ が FSP をみたせば、$\mathcal{A}$ は FP もみたす。

証明.$\delta \in On$ とする。FSP をみたすから、δの supportH_δがとれる。$H = H_\delta$とすれば良い。

$X \subseteq \delta$を任意にとり、$\pi : \bar{\delta} \to \mathcal{A}^{\delta}(X \cup H_\delta)$ を collapsing map とする。定理 1.11. により $\mathcal{A}$ は CP をみたすから、$\pi : \bar{\delta} \to \delta$ strong $\mathcal{A}$-map である。さらに $H_\delta \subseteq \mathcal{A}^{\delta}(X \cup H_\delta) = range(\pi)$ だから、πを拡張して

$$\pi : \bar{\delta}+1 \to \delta+1, \quad \pi(\bar{\delta}) = \delta$$

としたものは、$\bar{\delta}+1$ から$\delta+1$ への strong $\mathcal{A}$-map である。

$X \cup \{\delta\} \subseteq range(\pi)$ により、

$$\mathcal{A}^{\delta+1}(X \cup \{\delta\}) \subseteq \mathcal{A}^{\delta+1}(range(\pi)) = range(\pi)$$

である。最後の等号は、$\pi : \bar{\delta}+1 \to \delta+1$ が strong $\mathcal{A}$-map だから、$range(\pi)$ が $\mathcal{A}^{\delta+1}$の subalgebra になることによる。そこで、δとの共通部分をとれば、

$$\delta \cap \mathcal{A}^{\delta+1}(X \cup \{\delta\}) \subseteq \delta \cap range(\pi) = \mathcal{A}^{\delta}(X \cup H_\delta)$$

となる。これで定理は証明された。

2.Pairing Machine

$L[A]$-machine を定義する前に、pairing machine $\mathcal{P}$を定める。

2.1. 定義.$u, v \in On^{<\omega}$とし、$u = \langle u_0, \cdots, u_{m-1}\rangle, v = \langle v_0, \cdots, v_{n-1}\rangle$ とする。$u < v$とは、
(1) $max(u) < max(v)$, または
(2) u が vの permutation でなくて

$$\langle u_0, \cdots, u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots, u_{m-1}\rangle < \langle v_0, \cdots, v_{j-1}, v_{j+1}, \cdots, v_{n-1}\rangle$$

ただし、$u_i = max(u), v_j = max(v)$, または
(3) u が vの permutation であって、$u <_{lex} v$. ここで$<_{lex}$は辞書式順序である。
であることと定める。すると、$<$は $On^{<\omega}$を整列する。

2.2. 定義.
(1) $J : On^{<\omega} \to On$ は $On^{<\omega}$と On との間の順序同型である。
(2) $i \in \omega$に対して、C_iは

$$C_i(u) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{if } u = \langle\alpha\rangle \ \& \ J(\langle\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}\rangle) = \alpha \ \& \ i = n \\ \text{undefined}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

で定められる $On^{<\omega}$から On への partial function である。
(3) Machine $\mathcal{P} = (On, F_0, J, C_i)_{i\in\omega}$を pairing machine という。

2.3. 例.
(1) $J(\langle\ \rangle) = 0, J(\langle 0\rangle) = 1, J(\langle 0, 0\rangle) = 2, \cdots, J(\langle 1\rangle) = \omega$.
(2) $J(\langle 0, 1\rangle) = \omega + 1, J(\langle 1, 0\rangle) = \omega + 2, J(\langle 0, 0, 1\rangle) = \omega + 3, \cdots, J(\langle 1, 1\rangle) = \omega + \omega$.
(3) $J(\langle 2\rangle) = \omega^2, J(\langle 3\rangle) = \omega^3, \cdots, J(\langle\omega\rangle) = \omega^\omega$, 一般に、$J(\langle\alpha\rangle) = \omega^\alpha$.

2.4. 補題.
(1) $max(u) \leq J(u)$
(2) $C_i(\langle\alpha\rangle)$ が定義されていれば、$C_i(\langle\alpha\rangle) \leq \alpha$.

証明.(1) $J[\alpha^{<\omega}] = J\{J(u) | u \in \alpha^{<\omega}\}$ は On の initial segment, 従って、順序数である。故に写像$\alpha \mapsto J[\alpha^{<\omega}]$は On から On への increasing map である。このことから、$\alpha \leq J[\alpha^{<\omega}]$がわかる。$\alpha_i = max(u)$ とすれば

$$\alpha_i \leq J[\alpha^{<\omega}] \leq J(u).$$

(2) $J(\langle\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}\rangle) = \alpha$とすると、(1) により

$$C_i(\langle\alpha\rangle) = \alpha_i \leq max(\langle\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}\rangle) \leq J(\langle\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}\rangle) = \alpha.$$

故に $C_i(\langle\alpha\rangle) \leq \alpha$となる。

2.5. 定義.$\alpha \in On$ が J-closed であるとは、$J[\alpha^{<\omega}] \subseteq \alpha$であることである。

2.6. 補題.αが J-closed $\leftrightarrow$ $J(\langle\alpha\rangle) = \alpha$

証明. まず、αが J-closed であったとする。補題 2.4.(1) で $u = \langle\alpha\rangle$ とすれば、$\alpha \leq J(\langle\alpha\rangle)$ である。今、$u < \langle\alpha\rangle$ とすれば

$$u = \langle\beta_0, \cdots, \beta_{n-1}\rangle, \qquad \beta_0, \cdots, \beta_{n-1} < \alpha$$

である。即ち $u \in \alpha^{<\omega}$. 故に

$$J(u)^{\in} J[\alpha^{<\omega}] \subseteq \alpha.$$

これより、$J(\langle\alpha\rangle) = \alpha$がわかるので、$J(\langle\alpha\rangle) = \alpha$.

逆に、$J(\langle\alpha\rangle) = \alpha$とする。もし、$u \in \alpha^{<\omega}$ならば、$u < \langle\alpha\rangle$ なので

$$J(u) < J(\langle\alpha\rangle) = \alpha.$$

従ってαは J-closed になる。

注意.2.3.(3) により、

$$\alpha\text{が}J\text{-closed} \leftrightarrow \omega^\alpha = \alpha$$

である。

2.7. 定理.$\mathcal{P}$は FSP をみたす。(従って CP,FP もみたす。)

証明.$\delta \in On$ とする。δの support H_δを次のように定める。もし、δが J-closed であれば、$H_\delta = \emptyset$ とする。もし、そうでなければ、$J(\langle\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}\rangle) = \delta$となる$\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1} < \delta$があるから、$H_\delta = \{\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}\}$ とする。いずれの場合でも、H_δは有限で、$H_\delta \subseteq \delta$. また、$\alpha_i = C_i(\langle\delta\rangle)$ であるから、$H_\delta \subseteq \mathcal{P}^{\delta+1}(\{\delta\})$.

今、$\pi : \bar{\delta} \to \delta$が strong $\mathcal{P}$-map で $H_\delta \subseteq range(\pi)$ となっているとする。πを拡張して、$\pi(\bar{\delta}) = \delta$ とする。まず、$u \in (\bar{\delta}+1)^{<\omega}$に対して

(1) $J(u) = \bar{\delta} \leftrightarrow J(\pi(u)) = \delta$

を示す。δが J-closed であれば、$\pi : \bar{\delta} \to \delta$ strong $\mathcal{P}$-map だから、$\bar{\delta}$も J-closed である。従って補題 2.6. により $J(\langle\bar{\delta}\rangle) = \bar{\delta}$. 従って $J(u) = \bar{\delta}$であれば、$u = \langle\bar{\delta}\rangle$ である。故に再び補題 2.6. により、$J(\pi(u)) = J(\langle\delta\rangle) = \delta$. また、逆に $J(\pi(u)) = \delta$であれば、$\pi(u) = \langle\delta\rangle$ であるから、$u = \langle\bar{\delta}\rangle$. 故に $J(u) = J(\langle\bar{\delta}\rangle) = \bar{\delta}$.

次に、δが J-closed でないとする。

$$J(\langle\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}\rangle) = \delta, \quad \alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1} < \delta$$

である。$H_\delta = \{\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}\} \subseteq range(\pi)$ であるから、$\pi(\bar{\alpha}_0) = \alpha_0, \cdots, \pi(\bar{\alpha}_{n-1}) = \alpha_{n-1}$となる$\bar{\alpha}_0, \cdots, \bar{\alpha}_{n-1} < \bar{\delta}$が存在する。$a = \langle\bar{\alpha}_0, \cdots, \bar{\alpha}_{n-1}\rangle$ とする。(1) をいうためには、$J(a) = \bar{\delta}$をいえば良い。まず、$u \in On^{<\omega}$を $J(u) = \bar{\delta}$となるものとする。補題 2.4. により、$max(u) \leq \bar{\delta}$だから、$u \in (\bar{\delta}+1)^{<\omega}$である。もし、$a < u$なら $J(a) < J(u)$ だから、$J^{\bar{\delta}}(a)$ が定義されるので

$$\pi(J^{\bar{\delta}}(a)) = J^{\delta}(\pi(a)) = J(\langle\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}\rangle) = \delta$$

となるが、これは不合理である。また、もし、$u < a$ であれば、$u \in \bar{\delta}^{<\omega}$となるので、$J(\pi(u)) < J(\pi(a)) = \delta$であり、$J^{\delta}(\pi(u))$ が定義される。すると、$J^{\bar{\delta}}(u)$ も定義されることになるが、$J(u) = \bar{\delta}$だからこれは不合理。よって $u = a$ となるので、$J(a) = \bar{\delta}$である。これから (1) はすぐにわかる。

さて、(1) を用いて

$$\pi : \bar{\delta} + 1 \to \delta + 1 \quad \text{strong } \mathcal{P}\text{-map}$$

を示す。F_0については、πが順序保存なことより明らかである。$u \in (\bar{\delta}+1)^{<\omega}$に対し、

(2) $\pi(J^{\bar{\delta}+1}(u)) \simeq J^{\delta+1}(\pi(u))$

をいう。まず、$J^{\bar{\delta}+1}(u)$ が定義されたとする。$J^{\bar{\delta}+1}(u) < \bar{\delta}$であれば、補題 2.4. により $max(u) \leq J(u) < \delta$だから $u \in \bar{\delta}^{<\omega}$. 従って、$J^{\delta}(\pi(u)) = J^{\delta+1}(\pi(u))$ も定義され、

$$\pi(J^{\bar{\delta}+1}(u)) = \pi(J^{\bar{\delta}}(u)) = J^{\delta}(\pi(u)) = J^{\delta+1}(\pi(u)).$$

$J^{\bar{\delta}+1}(u) = \bar{\delta}$であれば、(1) により $J(\pi(u)) = \delta$だから、$J^{\delta+1}(\pi(u))$ は定義され

$$\pi(J^{\bar{\delta}+1}(u)) = \pi(\bar{\delta}) = \delta = J^{\delta+1}(\pi(u)).$$

逆に $J^{\delta+1}(\pi(u))$ が定義されたとする。$J^{\delta+1}(\pi(u)) < \delta$であれば、$max(\pi(u)) < \delta$だから、$u \in \bar{\delta}^{<\omega}$であり、$\pi(u) \in dom(J^{\delta})$ だから、$u \in dom(J^{\bar{\delta}}) \subseteq dom(J^{\bar{\delta}+1})$. また、$J^{\delta+1}(\pi(u)) = \delta$ならば、(1) により、$J(u) = \bar{\delta}$だから、$u \in dom(J^{\bar{\delta}+1})$. これで、$J$については問題ない。

最後に C_iについていう。$\beta \leq \bar{\delta}$とし、$\beta = J(\langle \beta_0, \cdots, \beta_{n-1} \rangle), i < n$ とする。$C_i(\langle \beta \rangle) = \beta_i$である。$\beta_0, \cdots, \beta_{n-1} \leq \beta \leq \bar{\delta}$だから、$\langle \beta_0, \cdots, \beta_{n-1} \rangle \in (\bar{\delta}+1)^{<\omega}$.(2) により、

$$\pi(\beta) = J(\langle \pi(\beta_0), \cdots, \pi(\beta_{n-1}) \rangle)$$

であるから、$C_i(\langle \pi(\beta) \rangle) = \pi(\beta_i) = \pi(C_i(\langle \beta \rangle))$.

逆に $C_i^{\delta+1}(\langle \pi(\beta) \rangle)$ が定義されたとする。もし、$C_i^{\bar{\delta}+1}(\langle \beta \rangle)$ が定義されないとすると、$C_i(\langle \beta \rangle) \leq \beta \leq \bar{\delta}$であるから、$C_i(\langle \beta \rangle)$ が定義されないことになる。これは

$$\beta = J(\langle \beta_0, \cdots, \beta_{n-1} \rangle)$$

となる$\beta_0, \cdots, \beta_{n-1}$をとったとき、$i \geq n$ となることを表す。さて、$\langle \beta_0, \cdots, \beta_{n-1} \rangle \in (\bar{\delta}+1)^{<\omega}$であるから、(2) により

$$\pi(\beta) = J(\langle \pi(\beta_0), \cdots, \pi(\beta_{n-1}) \rangle)$$

ところが、$i \geq n$ だから、$C_i(\langle \pi(\beta) \rangle)$ は定義されない。これは不合理であるから、$C_i^{\bar{\delta}+1}(\langle \beta \rangle)$ は定義されていなければならない。これで

$$\pi(C_i^{\bar{\delta}+1}(u)) \simeq C_i^{\delta+1}(\pi(u)).$$

以上により

$$\pi : \bar{\delta} + 1 \to \delta + 1, \quad \text{strong } \mathcal{P}\text{-map}.$$

3.$L[A]$-Machine

$L[A]$の定義では、集合論言語 $\mathcal{L}$ に一変数述語記号 Uを新たにつけ加えて

$$L_0[A] = \emptyset$$
$$L_{\xi+1}[A] = Def^U(L_\xi[A], A)$$
$$L_\lambda[A] = \bigcup_{\xi<\lambda} L_\xi[A] \qquad \lambda\text{:limit ordinal}$$
$$L[A] = \bigcup_{\xi\in On} L_\xi[A]$$

と定めた。ここで

$$Def^U(X, A) = \{Y \subseteq X \mid Y \text{は} \mathcal{L}_U\text{-definable in } (X, A)\}$$

である。

さて、今$\alpha \in On$ とし、$A \subseteq \alpha$とすると、

$$A = A \cap L_\alpha[A] = \{x \in L_\alpha[A] | \langle L_\alpha[A], A\rangle \models U(x)\}$$

であるから、$A \in L_{\alpha+1}[A]$. 従って$\xi \geq \alpha + 1$ に対しては

$$\begin{aligned} L_{\xi+1}[A] &= Def^U(L_\xi[A], A) \\ &= Def(L_\xi[A]) \end{aligned}$$

である。よって $L_\xi[A]$の定義は

$$L_0[A] = \emptyset$$
$$L_{\xi+1}[A] = \begin{cases} Def^U(L_\xi[A], A), & \text{if } \xi \leq \alpha \\ Def(L_\xi[A]), & \text{if } \xi > \alpha. \end{cases}$$
$$L_\lambda[A] = \bigcup_{\xi<\lambda} L_\xi[A] \qquad \lambda\text{:limit ordinal}$$

としても良い。

これにあわせて、ramified language $\mathcal{R}_U$で formula や term を定義する。まず、ramified language は次のものから成る:

変数:$x_0, x_1, x_2, \cdots$

述語記号:$=, \in, U$ ($=, \in$ は二変数, Uは一変数)

connectives:$\neg, \vee$

quantifiers:$\exists^\xi$ ($\xi \in On$)

abstruction operators:$\hat{}^{\,\xi}$ ($\xi \in On$)

括弧:(,)

3.1. 定義.$\alpha \in On$ とする。$\xi \in On$ に対して、ξ-formula$^\alpha$とξ-term$^\alpha$を、ξについての帰納法で定める:
(a) $\xi \leq \alpha$のとき
(1) t_1, t_2が変数かまたはζ-term$^\alpha$ $(\zeta < \xi)$ のとき

$$(t_1 = t_2), (t_1 \in t_2), (U(t_1))$$

はξ-formula$^\alpha$
(2) φ, ψがξ-formula$^\alpha$なら、$(\neg\varphi), (\varphi \vee \psi)$ もξ-formula$^\alpha$
(3) φ がξ-formula$^\alpha$なら、$(\exists^{\zeta}_{x_i}\varphi)$ $(\zeta \leq \xi)$ もξ-formula$^\alpha$
(4) φ が x_i以外の自由変数を含まないようなξ-formula$^\alpha$であれば、$(\widehat{x_i}^{\,\xi}\varphi)$ はξ-term$^\alpha$
(b) $\xi > \alpha$のとき
(1) t_1, t_2が変数かまたはζ-term$^\alpha$ $(\zeta < \xi)$ のとき

$$(t_1 = t_2), (t_1 \in t_2)$$

はξ-formula$^\alpha$
(2) φ, ψがξ-formula$^\alpha$なら、$(\neg\varphi), (\varphi \vee \psi)$ もξ-formula$^\alpha$
(3) φ がξ-formula$^\alpha$なら、$(\exists^{\zeta}_{x_i}\varphi)$ $(\zeta \leq \xi)$ もξ-formula$^\alpha$
(4) φ が x_i以外の自由変数を含まないようなξ-formula$^\alpha$であれば $(\widehat{x_i}^{\,\xi}\varphi)$ はξ-term$^\alpha$
(a) と (b) のちがいは、(1) のみであり、(b) では Uを使っていないことである。
尚、括弧は省略することもある。また、&, $\rightarrow$, $\forall^\xi$等の記号も用いることにする。
最後にξ-formula$^\alpha$, ξ-term$^\alpha$は全て $\mathcal{R}_U$の記号の有限列であることに注意しておく。

3.2. 定義.

$$\begin{aligned}
Fmla^\alpha_\xi &= \{\varphi \mid \varphi\text{は}\xi\text{-formula}^\alpha\} \\
Term^\alpha_\xi &= \{t \mid t\text{は}\zeta\text{-term}^\alpha,\ \zeta < \xi\} \\
Fmla^\alpha &= \{\varphi \mid \varphi\ \text{は}\xi\text{-formula}^\alpha,\ \xi \in On\} = \bigcup_{\xi \in On} Fmla^\alpha_\xi \\
Term^\alpha &= \{t \mid t\text{は}\xi\text{-term}^\alpha,\ \xi \in On\} = \bigcup_{\xi \in On} Term^\alpha_\xi
\end{aligned}$$

と定める。また、$\varphi \in Fmla^\alpha$, $t \in Term^\alpha$のときに、それぞれ、φ は fomula$^\alpha$,t は term$^\alpha$であるということにする。また、φ が自由変数を含まない formula$^\alpha$であるとき、φ を sentence$^\alpha$と呼ぶ。

次に $\mathcal{R}_U$の Gödel numbering を考える。まず、記号の Gödel number を定める。記号 s の Gödel number を$\ulcorner s \urcorner$と書くことにする。

$$
\begin{aligned}
\ulcorner\in\urcorner &= J(0,0)\\
\ulcorner=\urcorner &= J(0,1)\\
\ulcorner U\urcorner &= J(0,2)\\
\ulcorner\neg\urcorner &= J(0,3)\\
\ulcorner\vee\urcorner &= J(0,4)\\
\ulcorner(\urcorner &= J(0,5)\\
\ulcorner)\urcorner &= J(0,6)\\
\ulcorner x_i\urcorner &= J(0,7+i), \quad i=0,1,2,\cdots\\
\ulcorner\exists^{\xi}\urcorner &= J(0,\omega+\xi)\\
\ulcorner\frown^{\xi}\urcorner &= J(0,\omega+\xi,\omega+\xi)
\end{aligned}
$$

ここで、$\ulcorner\exists^{\xi}\urcorner < \ulcorner\frown^{\xi}\urcorner$に注意する。記号と、その Gödel numbering を同一視すると

$$Fmla^{\alpha}, Term^{\alpha} \subseteq On^{<\omega}$$

である。

$\mathcal{R}_U$の記号の有限列に対しては、

$$\ulcorner s_1 s_2 \cdots s_n\urcorner = J(1, \ulcorner s_1\urcorner, \cdots, \ulcorner s_n\urcorner)$$

と定める。例えば

$$
\begin{aligned}
\ulcorner(x_0 \in x_2)\urcorner &= J(1, \ulcorner(\urcorner, \ulcorner x_0\urcorner, \ulcorner\in\urcorner, \ulcorner x_2\urcorner, \ulcorner)\urcorner)\\
\ulcorner(U(t))\urcorner &= J(1, \ulcorner(\urcorner, \ulcorner U\urcorner, \ulcorner(\urcorner, \ulcorner s_1\urcorner, \cdots, \ulcorner s_n\urcorner, \ulcorner)\urcorner, \ulcorner)\urcorner) \quad \text{ただし、} t \equiv s_1 \cdots s_n
\end{aligned}
$$

以後、$\mathcal{R}_U$の記号の有限列と、その Gödel number を同一視する。すると、formula$^{\alpha}$,term$^{\alpha}$は全て$\mathcal{R}_U$の記号の有限列だから、この同一視によって、

$$Fmla^{\alpha}, Term^{\alpha} \subseteq On$$

である。

3.3. 補題.φ, ψは formula$^{\alpha}$とする。

(1) $\varphi < (\neg\varphi)$

(2) $\varphi, \psi < (\varphi \vee \psi)$

(3) $t \in Term^{\alpha}_{\xi}$ならば、$t, \varphi(t) < (\exists^{\xi}_{x_i}\varphi(x_i))$

(4) $t \in Term^{\alpha}_{\xi}$ならば、$t, \varphi(t) < (\widehat{x_i}^{\,\xi}\varphi(x_i))$

証明は省略する。(4) については、$\ulcorner\exists^{\xi}\urcorner < \ulcorner\frown^{\xi}\urcorner$であることを用いる。

3.4. 定義.

(1) $E(\widehat{x_i}\,^{\xi}\varphi(x_i) = \widehat{x_j}\,^{\zeta}\psi(x_j)) \equiv \forall^{\eta}_{x_k}[\exists^{\xi}_{x_i}(x_i = x_k \ \&\ \varphi(x_i)) \leftrightarrow \exists^{\zeta}_{x_j}(x_j = x_k \ \&\ \psi(x_j))]$

ただし、$\eta = max(\xi, \zeta)$

(2) $\xi < \zeta$のとき

$E(\widehat{x_i}\,^{\xi}\varphi(x_i) \in \widehat{x_j}\,^{\zeta}\psi(x_j)) \equiv \psi(\widehat{x_i}\,^{\xi}\varphi(x_i))$

(3) $\xi \geq \zeta$のとき

$E(\widehat{x_i}\,^{\xi}\varphi(x_i) \in \widehat{x_j}\,^{\zeta}\psi(x_j)) \equiv \exists^{\xi}_{x_k}[\forall^{\xi}_{x_i}(x_i \in x_k \leftrightarrow \varphi(x_i)) \ \&\ \exists^{\zeta}_{x_j}(x_j = x_k \ \&\ \psi(x_j))]$

3.5. 補題.t_1, t_2がTerm^{α}のとき

(1) $E(t_1 = t_2) < (t_1 = t_2)$

(2) $E(t_1 \in t_2) < (t_1 \in t_2)$

証明は省略する。$\ulcorner\exists^{\xi}\urcorner < \ulcorner\widehat{\ }^{\xi}\urcorner$を用いる。

3.6. 補題.ε_0を最初のJ-closed ordinalとし、$\varepsilon_0 \leq \bar{\delta}, \bar{\alpha} < \bar{\delta}$とする。さらに、$\pi : \bar{\delta} \to \delta$ strong $\mathcal{P}$-mapとし、$\alpha = \pi(\bar{\alpha})$とおく。このとき$\bar{\eta} < \bar{\delta}$に対し

$$\bar{\eta} \in Fmla^{\bar{\alpha}} \quad \text{iff} \quad \pi(\bar{\eta}) \in Fmla^{\alpha}$$
$$\bar{\eta} \in Term^{\bar{\alpha}} \quad \text{iff} \quad \pi(\bar{\eta}) \in Term^{\alpha}$$

がいえる。

証明. 最初に

(1) $\bar{\eta} < \varepsilon_0$ならば、$\pi(\bar{\eta}) = \bar{\eta}$

を示しておく。$\bar{\eta}$についての帰納法による。

$\bar{\eta} = 0$ならば、$0 = J(\langle\ \rangle)$だから、$\pi(0) = \pi(J^{\bar{\delta}}(\langle\ \rangle)) = J^{\delta}(\langle\ \rangle) = 0$

$\bar{\eta} > 0$であれば、$J(\langle\bar{\mu}_1, \cdots, \bar{\mu}_{n-1}\rangle) = \bar{\eta}$なる$\bar{\mu}_1, \cdots, \bar{\mu}_{n-1}$がとれる。$\bar{\eta}$は$J$-closedでないから、$\bar{\mu}_1, \cdots, \bar{\mu}_{n-1} < \bar{\eta}$である。従って帰納法の仮定により

$$\begin{aligned}\pi(\bar{\eta}) = \pi(J^{\bar{\delta}}(\langle\bar{\mu}_1, \cdots, \bar{\mu}_{n-1}\rangle)) &= J^{\delta}(\langle\pi(\bar{\mu}_1), \cdots, \pi(\bar{\mu}_{n-1})\\ &= J(\langle\bar{\mu}_1, \cdots, \bar{\mu}_{n-1}\rangle) = \bar{\eta}.\end{aligned}$$

これで、(1)がいえる。

さて、$\mathcal{R}_U$の記号sのうち、$\exists^{\xi}, \widehat{\ }^{\xi}$以外のものについては、$s < \varepsilon_0$だから、(1)によって

(2) $\pi(s) = s$

である。そこで、$\pi(\exists^{\xi}), \pi(\widehat{\ }^{\xi})$がどうなるかを見る。まず、$\exists^{\xi} < \bar{\delta}$とする。すると、$\exists^{\xi} = J(\langle 0, \omega+\xi\rangle) = J^{\bar{\delta}}(\langle 0, \omega+\xi\rangle)$だから、

$$\begin{aligned}\pi(\exists^{\xi}) = \pi(J^{\bar{\delta}}(\langle 0, \omega+\xi\rangle)) &= J^{\delta}(\langle\pi(0), \pi(\omega+\xi)\rangle)\\ &= J(\langle 0, \pi(\omega+\xi)\rangle).\end{aligned}$$

同様にして、$\widehat{\ }^{\xi} < \bar{\delta}$に対して、$\pi(\widehat{\ }\xi) = J(\langle 0, \pi(\omega+\xi), \pi(\omega+\xi)\rangle)$もわかる。従って、$\pi(\omega+\xi)$の値を調べれば良い。実は

$$\pi(\omega+\xi) = \begin{cases}\omega+\xi, & \text{if } \xi < \omega^2\\ \omega+\pi(\xi), & \text{if } \xi \geq \omega^2\end{cases}$$

である。なぜならば、まず、$\xi < \omega^2$のときは、$\omega + \xi < \varepsilon_0$だから (1) により明らかである。尚、このとき、$\pi(\xi) = \xi$でもある。次に$\xi \geq \omega^2$とすると、$\xi = \omega^2 + \zeta$とできる。すると、

$$\omega + \xi = \omega + \omega^2 + \zeta = \omega(1+\omega) + \zeta = \omega^2 + \zeta = \xi$$

だから、$\pi(\omega + \xi) = \pi(\xi)$. さて、$\xi \geq \omega^2$により、$\pi(\xi) \geq \pi(\omega^2) = \omega^2$だから、$\omega + \xi = \xi$のときと同様にして、$\pi(\xi) = \omega + \pi(\xi)$ がわかる。これで

(3) $\pi(\exists^\xi) = \exists^{\pi(\xi)}, \quad \pi(\frown^\xi) = \frown^{\pi(\xi)}$

となることがわかった。

(2),(3) により、$\bar{\eta} < \bar{\delta}$が formula$^{\bar{\alpha}}$であれば、$\pi(\bar{\eta})$ は、$\bar{\eta}$に現れる $\exists^\xi, \frown^\xi$を全て $\exists^{\pi(\xi)}, \frown^{\pi(\xi)}$におきかえたものである。また$\bar{\eta} \in Term^{\bar{\alpha}}$のときも同様である。これにより

$$\begin{aligned} \bar{\eta} \in Fmla^{\bar{\alpha}} &\rightarrow \pi(\bar{\eta}) \in Fmla^{\alpha} \\ \bar{\eta} \in Term^{\bar{\alpha}} &\rightarrow \pi(\bar{\eta}) \in Term^{\alpha} \end{aligned}$$

がわかる。

さて、今、$\pi(\bar{\eta})$ が $\mathcal{R}_U$の記号の有限列であったとする。従って

$$\pi(\bar{\eta}) = J(1, s_1, \cdots, s_n) = J^\delta(1, s_1, \cdots, s_n)$$

である。ここで、s_iは $\mathcal{R}_U$の記号 (の Gödel number) である。今、πは$\bar{\delta}$からδへの strong $\mathcal{P}$-map だから、$range(\pi)$ は $\mathcal{P}^\delta$の subalgebra である。さらに、

$$s_i = C_i(\pi(\bar{\eta})) = C_i^\delta(\pi(\bar{\eta}))$$

であるから、$s_i \in range(\pi)$. 従って、$s_i = \pi(\bar{s}_i)$ となる$\bar{s}_i < \bar{\delta}$がとれる。このとき、

$$\bar{\eta} = J^{\bar{\delta}}(1, \bar{s}_1, \cdots, \bar{s}_n) = J(1, \bar{s}_1, \cdots, \bar{s}_n)$$

である。$\bar{s}_i = \pi^{-1}(s_i)$ について調べる。まず、s_iが $\exists^\xi, \frown^\xi$以外のものであれば、$s_i < \varepsilon_0$だから、$\bar{s}_i = s_i$ である。そこで、s_iが $\exists^\xi$や$\frown^\xi$のときを考える。まず

$$s_i = \exists^\xi = J(\langle 0, \omega + \xi \rangle) = J^\delta(\langle 0, \omega + \xi \rangle)$$

とする。$s_i \in range(\pi)$ で $range(\pi)$ が $\mathcal{P}^\delta$の subalgebra だから

$$\omega + \xi = C_i^\delta(s_i) \in range(\pi).$$

従って、$\omega + \xi = \pi(\omega + \zeta)$ とできるが、$\pi(\omega + \zeta) = \omega + \pi(\zeta)$ であったから、$\xi = \pi(\zeta)$. 従って

$$\bar{s}_i = J^{\bar{\delta}}(\langle 0, \omega + \zeta \rangle) = J(\langle 0, \omega + \zeta \rangle) = \exists^\zeta = \exists^{\pi^{-1}(\xi)}.$$

同様にして、$s_i = \frown^{\xi}$のとき、$\bar{s}_i = \frown^{\pi^{-1}(\xi)}$であることがわかる。このことにより、$\bar{\eta}$は$\pi(\bar{\eta})$ に現れる$\exists^{\xi}, \frown^{\xi}$を全て$\exists^{\pi^{-1}(\xi)}, \frown^{\pi^{-1}(\xi)}$におきかえたものであることがわかる。このことから

$$\pi(\bar{\eta}) \in Fmla^{\alpha} \rightarrow \bar{\eta} \in Fmla^{\bar{\alpha}}$$
$$\pi(\bar{\eta}) \in Term^{\alpha} \rightarrow \bar{\eta} \in Term^{\bar{\alpha}}$$

がわかる。以上のことにより、補題は証明された。

3.7. 定義.truth value T_A^{α}と denotation operator D_A^{α}
$A \subseteq \alpha$とする。まず、T_A^{α},D_A^{α}はそれぞれ

$$T_A^{\alpha} : Sentence^{\alpha} \rightarrow \{0,1\}$$
$$D_A^{\alpha} : Term^{\alpha} \rightarrow L[A]$$

なる関数である。その値は次のようにして定められる。(1)-(2) では、$t_1, t_2, \in Term^{\alpha}$であり、(3) では、$t \in Term_{\alpha}^{\alpha}$である。:

(1) $$T_A^{\alpha}(t_1 = t_2) = T_A^{\alpha}(E(t_1 = t_2))$$
(2) $$T_A^{\alpha}(t_1 \in t_2) = T_A^{\alpha}(E(t_1 \in t_2))$$
(3) $$T_A^{\alpha}(U(t)) = \begin{cases} 1, & \text{if } D_A^{\alpha}(t) \in A \\ 0, & \text{if } D_A^{\alpha}(t) \notin A \end{cases}$$
(4) $$T_A^{\alpha}(\neg\varphi) = 1 - T_A^{\alpha}(\varphi)$$
(5) $$T_A^{\alpha}(\varphi \vee \psi) = max\{T_A^{\alpha}(\varphi), T_A^{\alpha}(\psi)\}$$
(6) $$T_A^{\alpha}(\exists_{x_i}^{\xi} \varphi(x_i)) = max\{T_A^{\alpha}(\varphi(t)) |\ t \in Term_{\xi}^{\alpha}\}$$
(7) $$D_A^{\alpha}(\ \widehat{x_i}^{\xi} \varphi(x_i)) = \{D_A^{\alpha}(t) |\ t \in Term_{\xi}^{\alpha}\ \&\ T_A^{\alpha}(\varphi(t)) = 1\}$$

右辺の$T_A^{\alpha}, D_A^{\alpha}$の中身は左辺のものよりも Gödel number が小さい。従って、この定義は帰納法による定義になっている。

3.8. 補題.$\xi \in On, t_1, t_2 \in Term_{\xi}^{\alpha}$に対し
(1) $T_A^{\alpha}(t_1 = t_2) = 1$ iff $D_A^{\alpha}(t_1) = D_A^{\alpha}(t_2)$
(2) $T_A^{\alpha}(t_1 \in t_2) = 1$ iff $D_A^{\alpha}(t_1) \in D_A^{\alpha}(t_2)$
(3) $L_{\xi}[A] = \{D_A^{\alpha}(t) |\ t \in Term_{\xi}^{\alpha}\}$
証明は略す。ξについての帰納法を用いる。

今、$\bar{\alpha} \leq \alpha$とする。このとき、各$\xi < \bar{\alpha}$に対して

$$Fmla_{\xi}^{\bar{\alpha}} = Fmla_{\xi}^{\alpha}, \quad Term_{\xi}^{\bar{\alpha}} = Term_{\xi}^{\alpha}$$

であり、また

$$Term_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}} = Term_{\bar{\alpha}}^{\alpha}$$

であるが、さらに次のことがいえる。

3.9. 補題.$A \subseteq \alpha,\ \bar{\alpha} \leq \alpha,\ \bar{A} = A \cap \bar{\alpha}$とする。このとき、$\xi < \bar{\alpha}$に対し

(1) $t \in Term_{\xi}^{\bar{\alpha}} \ \rightarrow\ D_{\bar{A}}^{\bar{\alpha}}(t) = D_{A}^{\alpha}(t)$

(2) $\varphi \in Fmla_{\xi}^{\bar{\alpha}}$ & φがsentence$^{\bar{\alpha}}$ $\rightarrow\ T_{\bar{A}}^{\bar{\alpha}}(\varphi) = T_{A}^{\alpha}(\varphi)$

さらに

(3) $t \in Term_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}} \ \rightarrow\ D_{\bar{A}}^{\bar{\alpha}}(t) = D_{A}^{\alpha}(t)$

証明は略す。ただし、(2) では、$\varphi \equiv U(t)$ のときには、$t \in Term_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}}$だから、$t \equiv (\ \hat{x}^{\zeta}\varphi(x)),\ \zeta < \bar{\alpha}$ となっているので、$D_{A}^{\alpha}(t) \leq \zeta < \bar{\alpha}$となることに注意しておく。

以上の準備のもとで、$L[A]$-machine を定義する。

3.10. 定義.$L[A]$-machine $\mathcal{M}_{\alpha}[A]$

$\alpha \in On,\ A \subseteq \alpha$に対して

$$\mathcal{M}_{\alpha}[A] = (On, F_0, J, C_i, T_{\alpha,A}, K_{\alpha,A})_{i<\omega}$$

と定める。ここで、$T_{\alpha,A}, K_{\alpha,A}$は次のようにして定義される:

$$\begin{aligned} T_{\alpha,A}(\langle\varphi\rangle) &= T_{A}^{\alpha}(\varphi) \qquad \text{if } \varphi \in Sentence^{\alpha} \\ &\quad \text{それ以外は undefined} \\ K_{\alpha,A}(\langle \exists_{x_i}^{\xi}\varphi(x_i)\rangle) &= \text{the least } t \in Term_{\xi}^{\alpha} s.t. T_{A}^{\alpha}(\varphi(t)) = 1 \\ &\qquad \text{if } \exists_{x_i}^{\xi}\varphi(x_i) \in Sentence^{\alpha} \ \&\ T_{A}^{\alpha}(\exists_{x_i}^{\xi}\varphi(x_i)) = 1 \\ &\quad \text{それ以外は undefined} \end{aligned}$$

容易にわかるように、$T_{\alpha,A}(\langle\zeta\rangle), K_{\alpha,A}(\langle\zeta\rangle)$ は定義されていれば

$$T_{\alpha,A}(\langle\zeta\rangle) < \zeta, \quad K_{\alpha,A}(\langle\zeta\rangle) < \zeta.$$

である。

$\mathcal{M}_{\alpha}[A]$については次が成り立つ。

3.11. 補題.$\bar{\alpha} \leq \bar{\nu}$, $\bar{\alpha}$はJ-closedとし、$\pi : \bar{\nu} \rightarrow \nu,\ \nu = J(\beta_0, \cdots, \beta_{n-1})$とする。$\bar{\alpha} < \bar{\nu}$なら$\alpha = \pi(\bar{\alpha}),\ \bar{\alpha} = \bar{\nu}$なら$\alpha = \nu$とし、$H$を

$$H = \begin{cases} \{\beta_0, \cdots, \beta_{n-1}\} \cap \nu, & \text{if } K_{\alpha,A}(\nu) \text{ が undefined} \\ (\{\beta_0, \cdots, \beta_{n-1}\} \cap \nu) \cup \{K_{\alpha,A}(\nu)\}, & \text{if } K_{\alpha,A}(\nu) \text{ が defined} \end{cases}$$

とし、さらに$H \subseteq range(\pi)$と仮定する。このとき、もし

$$\pi : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\nu}} \to \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\nu} \quad \text{mono}$$

ならば、$\pi(\bar{\nu}) = \nu$として拡張した$\pi : \bar{\nu}+1 \to \nu+1$については

$$\pi : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\nu}+1} \to \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\nu+1} \quad \text{mono}$$

である。

証明. まず、もとのπについては、$\pi : \bar{\nu} \to \nu$ strong $\mathcal{P}$-map だから、Hのとり方により、$\pi : \bar{\nu}+1 \to \nu+1$ strong $\mathcal{P}$-map は明らか。さらに$\pi(\bar{\alpha}) = \alpha$だから、補題3.6. により、$\bar{\eta} \leq \bar{\nu}$に対して

(1) $\bar{\eta} \in Fmla^{\bar{\alpha}}$ iff $\pi(\bar{\eta}) \in Fmla^{\alpha}$

(2) $\bar{\eta} \in Term^{\bar{\alpha}}$ iff $\pi(\bar{\eta}) \in Term^{\alpha}$

(3) $\bar{\eta} \in Sentence^{\bar{\alpha}}$ iff $\pi(\bar{\eta}) \in Sentence^{\alpha}$

などがいえる。

補題を証明するには、$\bar{\mu} < \bar{\nu}+1$に対して

(T) $\pi(T^{\bar{\nu}+1}_{\bar{\alpha},\bar{A}}(\bar{\mu})) \simeq T^{\nu+1}_{\alpha,A}(\pi(\bar{\mu}))$

(K) $\pi(K^{\bar{\nu}+1}_{\bar{\alpha},\bar{A}}(\bar{\mu})) \simeq K^{\nu+1}_{\alpha,A}(\pi(\bar{\mu}))$

をいえば良い。ここで、$\bar{A} = A \cap \bar{\alpha}$である。以下、$T_{\bar{\alpha},\bar{A}}, T_{\alpha,A}, K_{\bar{\alpha},\bar{A}}, K_{\alpha,A}$をそれぞれ、$\bar{T}, T, \bar{K}, K$と略記する。

まず、(T) についていう。$\bar{\mu} < \bar{\nu}$のときを考える。$\bar{T}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\mu}) = i$とする。$i = 0, 1$だから、$\bar{T}^{\bar{\nu}}(\bar{\mu}) = i$. 従って$T^{\nu}(\pi(\bar{\mu})) = \pi(i)$となるから、$T^{\nu+1}(\pi(\bar{\mu})) = T^{\nu}(\pi(\bar{\mu})) = \pi(i)$. 即ち、

$$\pi(\bar{T}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\mu})) = T^{\nu+1}(\pi(\bar{\mu})).$$

さて、$T^{\nu+1}(\pi(\bar{\mu}))$が定義されていれば、その値は0または1だから、$T^{\nu}(\pi(\bar{\mu}))$も定義されることになる。従って$\bar{T}^{\bar{\nu}}(\bar{\mu})$が定義され、それ故、$\bar{T}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\mu})$も定義される。故に

$$\pi(\bar{T}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\mu})) \simeq T^{\nu+1}(\pi(\bar{\mu})).$$

さて、$\bar{\mu} = \bar{\nu}$のときが残った。まず、$\bar{T}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\nu}) = i$とする。すると、$\bar{\nu} \in Sentence^{\bar{\alpha}}$である。次のように場合にわけて、$\pi(i) = T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu}))$をいう。

(a) $\bar{\nu} = (t_1 = t_2)$のとき

$$i = \bar{T}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\nu}) = \bar{T}(\bar{\nu}) = \bar{T}(E(t_1 = t_2))$$

である。ところが、$E(t_1 = t_2) < \bar{\nu}$だから、$i = \bar{T}^{\bar{\nu}}(E(t_1 = t_2))$である。従って

$$\pi(i) = T^{\nu}(\pi(E(t_1 = t_2))) = T^{\nu}(E(\pi(t_1 = t_2))) = T(\pi(\bar{\nu})) = T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu})).$$

(b) $\bar{\nu} = (t_1 \in t_2)$ のとき. (a) と同様にすれば良い。

(c) $\bar{\nu} = (U(t))$ のとき. この場合、t はξ-term$^{\bar{\alpha}}$, $\xi < \bar{\alpha}$である。従って$\bar{\alpha}$が J-closed なことにより、$(U(t)) < \bar{\alpha} \leq \bar{\nu}$. 従って、この場合は考えなくても良い。

(d) $\bar{\nu} = (\neg\varphi)$ のとき、$\varphi < \bar{\nu}$であり、$i = \bar{T}(\bar{\nu}) = 1 - \bar{T}(\varphi)$ である。$i = 0$ とすると、$\bar{T}(\varphi) = \bar{T}^{\bar{\nu}}(\varphi) = 1$. 従って $T^{\nu}(\pi(\varphi)) = T(\pi(\varphi)) = \pi(1) = 1.\pi(\bar{\nu}) = (\neg\pi(\varphi))$ であるから、$T(\pi(\bar{\nu})) = 0$, i.e.,$T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu})) = 0 = \pi(0).i = 1$ としても同様にして、$T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu})) = \pi(1)$ となる。従って、$\pi(i) = T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu}))$ である。

(e) $\bar{\nu} = (\varphi \vee \psi)$ のとき.(d) と同様にすれば良い。

(f) $\bar{\nu} = (\exists^{\xi}_{x_i} \varphi(x_i))$ のとき、まず $i = 1$ とする。すると、ある $t \in Term^{\bar{\alpha}}_{\xi}$に対して

$$\bar{T}(\varphi(t)) = 1$$

さらに、$\varphi(t) < \bar{\nu}$だから、これより、$\bar{T}^{\bar{\nu}}(\varphi(t)) = 1$. 従って $T^{\nu}(\pi(\varphi(t))) = \pi(1) = 1$. 今、$\pi(\varphi(t)) = \pi(\varphi)(\pi(t))$ であり、$\pi(t) \in Term^{\alpha}_{\pi(\xi)}$であり、さらに、

$$\pi(\bar{\nu}) = (\exists^{\pi(\xi)}_{x_i} \pi(\varphi)(x_i))$$

だから、これらのことから、$T(\pi(\bar{\nu})) = 1$,i.e.,$T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu})) = 1 = \pi(1)$ となる。

次に $i = 0$ とする。$\pi(\bar{\nu}) \in Sentence^{\alpha}$だから $T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu})) = T(\pi(\bar{\nu})) = 0, 1$. そこで $T(\pi(\bar{\nu})) = 1$ と仮定して矛盾を導く。$\pi(\bar{\nu}) = \nu$は、上記のような sentence$^{\alpha}$だから、$K(\nu)$ が定義される。$t = K(\nu) = K(\pi(\bar{\nu}))$ とすると、$t \in H \subseteq range(\pi \restriction \bar{\nu})$ により、$t = \pi(\bar{t}), \bar{t} < \bar{\nu}$とできる。さらに $t \in Term^{\alpha}_{\pi(\xi)}$だから、$\bar{t} \in Term^{\bar{\alpha}}_{\xi}$. さらに、

$$T(\pi(\varphi)(\pi(\bar{t}))) = 1, \text{ i.e., } T(\pi(\varphi(\bar{t}))) = 1$$

が成り立つ。$\varphi(\bar{t}) < \bar{\nu}$だから、$\pi(\varphi(\bar{t})) < \pi(\bar{\nu}) = \nu$により、これは、$T^{\nu}(\pi(\varphi(\bar{t}))) = 1$ を意味する。従って、$\bar{T}^{\bar{\nu}}(\varphi(\bar{t})) = 1, \bar{t} \in Term^{\bar{\alpha}}_{\xi}$となる。このことから、$\bar{T}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\nu}) = 1$ を得るが、$i = 0$ だから、不合理。故に、$T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu})) = 0$ とならねばならず、それ故

$$\pi(i) = T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu}))$$

となる。

さて逆に $T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu}))$ が定義されていれば、$\pi(\bar{\nu}) \in Sentence^{\alpha}$だから、$\bar{\nu} \in Sentence^{\bar{\alpha}}$となり、$\bar{T}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\nu})$ も定義される。これで

$$\pi(\bar{T}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\nu})) \simeq T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu}))$$

がわかり、(T) がいえた。

最後に (K) をいう。これもまず、$\bar{\mu} < \bar{\nu}$とする。$\bar{t} = \bar{K}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\mu})$ とすると、$\bar{K}$の性質から、$\bar{t} < \bar{\mu} < \bar{\nu}$ だから、$\bar{t} = \bar{K}^{\bar{\nu}}(\bar{\mu})$. 従って$\pi(\bar{t}) = K^{\nu}(\pi(\bar{\mu})) = K^{\nu+1}(\pi(\bar{\mu}))$ となり、このときは

$$\pi(\bar{K}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\mu})) = K^{\nu+1}(\pi(\bar{\mu})).$$

さて、今 $K^{\nu+1}(\pi(\bar{\mu})) = t$ とすると、このときも、$t < \pi(\bar{\mu}) < \pi(\bar{\nu}) = \nu$となるので、$t = K^{\nu}(\pi(\bar{\mu}))$ である。従って $K^{\nu}(\pi(\bar{\mu}))$ は定義され、それ故に、$\bar{K}^{\bar{\nu}}(\bar{\mu})$ も定義される。故に$\bar{K}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\mu})$ も定義される。これらのことにより、

$$\pi(\bar{K}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\mu})) \simeq K^{\nu+1}(\pi(\bar{\mu})).$$

次に$\bar{\mu} = \bar{\nu}$のときを考える。$\bar{t} = \bar{K}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\nu})$ とすると、$\bar{\nu} = (\exists^{\xi}_{x_i}\varphi(x_i))$, $\bar{\nu} \in Sentence^{\bar{\alpha}}$, $\bar{T}(\bar{\nu}) = 1$. さらに、$\bar{t} \in Term^{\bar{\alpha}}_{\xi}$であり、$\bar{T}(\varphi(\bar{t})) = 1$ である。故に (T) により、

$$T(\pi(\varphi(\bar{t}))) = T(\pi(\varphi)(\pi(\bar{t}))) = 1.$$

さらに$\pi(\bar{t}) \in Term^{\alpha}_{\pi(\xi)}$である。ところで、$\pi(\bar{\nu}) = (\exists^{\pi(\xi)}_{x_i}\pi(\varphi)(x_i)) \in Sentence^{\alpha}$であり、$\bar{T}(\bar{\nu}) = 1$ と (T) により $T(\pi(\bar{\nu})) = 1$ がいえるので、$K(\pi(\bar{\nu}))$ が定義される。そこで$t = K(\pi(\bar{\nu})) = K(\nu)$ とすると、$t \in H \subseteq range(\pi \restriction \bar{\nu})$. そこで、$t = \pi(s), s < \bar{\nu}$とする。

$t = \pi(\bar{t})$ をいう。まず、t の最小性から、$t \leq \pi(\bar{t})$ である。また、t の性質と (T) により

$$s \in Term^{\bar{\alpha}}_{\xi}, \quad \bar{T}(\varphi(s)) = 1$$

だから、t の最小性により、$\bar{t} \leq s$. 従って$\pi(\bar{t}) \leq \pi(s) = t$. これで$t = \pi(\bar{t})$ がいえた。さて、$t < \nu < \nu+1$ だから、$t = K^{\nu+1}(\nu) = K^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu}))$. 故に

$$\pi(\bar{K}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\nu})) = \pi(\bar{t}) = t = K^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu})).$$

さて、$K^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu})) = t$ とすると、上の議論により、$\bar{K}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\nu})$ も定義できることがわかる。これで

$$\pi(\bar{K}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\nu})) \simeq K^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu}))$$

となるから、(K) がいえた。

3.12. 補題.$\delta \in On, \alpha \in X \subseteq \delta$とし、$\pi : \bar{\delta} \to X$を$X$の collapsing map とする。さらに、Xは $\mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\delta}$の subalgebra であるとし、$\pi(\bar{\alpha}) = \alpha$とする。このとき、もし$\bar{\alpha}$が J-closed で、$\pi \restriction \bar{\alpha} = id$ であれば

$$\pi : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\delta}} \to \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\delta} \quad \text{mono}$$

証明. まず、Xは $\mathcal{P}^{\delta}$の subalgebra だから、CP(定理.2.7.) により、

$$\pi : \bar{\delta} \to \delta \quad \text{strong } \mathcal{P}\text{-map}$$

である。今、πを拡張して、$\pi(\bar{\delta})=\delta$としておく。

Claim A. 任意の$\bar{\eta}\leq\bar{\delta}$に対し、$range(\pi\restriction\bar{\eta})$ は $\mathcal{M}_\alpha[A]^{\pi(\bar{\eta})}$の subalgebra.

証明.$u\in range(\pi\restriction\bar{\eta})^{<\omega}$とする。$u=\pi(\bar{u}),\bar{u}\in\bar{\eta}^{<\omega}$とできる。$F$を $\mathcal{M}_\alpha[A]$の関数とし、$y=F^{\pi(\bar{\eta})}(u)$ とする。$y<\pi(\bar{\eta})\leq\delta$だから、$y=F^\delta(u)$. さて、$u\in X^{<\omega}$であり、$X$は $\mathcal{M}_\alpha[A]^\delta$の subalgebra だから、$y\in X$. 従って、$y=\pi(x)$ となる $x<\bar{\delta}$があるが、$y<\pi(\bar{\eta})$ により、$x<\bar{\eta}$. 故に

$$y=\pi(x)\in range(\pi\restriction\bar{\eta})$$

となり、claim は証明された。

Claim B.$\bar{\eta}\leq\bar{\delta},\bar{\alpha}\leq\bar{\eta}$に対し、$\sigma=sup\{\pi(\bar{\nu})+1|\ \bar{\nu}<\bar{\eta}\}$ とする。もし、

$$\pi\restriction\bar{\eta}:\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A\cap\bar{\alpha}]^{\bar{\eta}}\to\mathcal{M}_\alpha[A]^\sigma\quad\text{mono}$$

であれば、σを$\pi(\bar{\eta})$ にかえても

$$\pi\restriction\bar{\eta}:\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A\cap\bar{\alpha}]^{\bar{\eta}}\to\mathcal{M}_\alpha[A]^{\pi(\bar{\eta})}\quad\text{mono.}$$

証明. まず明らかに$\sigma\leq\pi(\bar{\eta})$ である。今、$\bar{F}$を $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A\cap\bar{\alpha}]$の関数とし、$F$をそれに対応する $\mathcal{M}_\alpha[A]$ の関数とする。$u\in\bar{\eta}^{<\omega}$とする。

まず、$\bar{F}^{\bar{\eta}}(u)$ が定義されていれば、

$$\pi(\bar{F}^{\bar{\eta}}(u))=F^\sigma(\pi(u))=F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u)).$$

そこで、$F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u))$ が定義されていたとする。$\pi(u)\in range(\pi\restriction\bar{\eta})^{<\omega}$だから、Claim A によって $F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u))\in range(\pi\restriction\bar{\eta})$. 従って

$$F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u))=\pi(\bar{\nu}),\ \bar{\nu}<\bar{\eta}$$

とできる。ところが、$\pi(\bar{\nu})<\pi(\bar{\nu})+1\leq\sigma$なので、$F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u))<\sigma$となる。それ故、$F^\sigma(\pi(u))=F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u))$ となって $F^\sigma(\pi(u))$ が定義されるので、$\bar{F}^{\bar{\eta}}(u)$ も定義される。これで

$$\pi(\bar{F}^{\bar{\eta}}(u))\simeq F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u))$$

がいえた。これで claim の証明は終った。

補題を証明するために、$\bar{\eta}\leq\bar{\delta},\bar{\eta}\geq\bar{\alpha}$に対し

$$\pi\restriction\bar{\eta}:\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A\cap\bar{\alpha}]^{\bar{\eta}}\to\mathcal{M}_\alpha[A]^{\pi(\bar{\eta})}\quad\text{mono}$$

を示す。$\bar{\eta}$についての帰納法による。

(a) $\bar{\eta} = \bar{\alpha}$のとき、まず$\pi \restriction \bar{\alpha} : \bar{\alpha} \to \pi(\bar{\alpha})$ strong $\mathcal{P}$-map である。したがって$\mathcal{P}$の関数$F_0, J, C_i (i < \omega)$については問題ない。また、$\pi \restriction \bar{\alpha} = id$だから、補題3.9. により、容易に

$$\pi \restriction \bar{\alpha} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\alpha}} \to \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\pi(\bar{\alpha})} \quad \text{mono}$$

がわかる。

(b) $\bar{\eta}$がlimit ordinalのとき、帰納法の仮定から、$\bar{\nu} < \bar{\eta}, \bar{\nu} \geq \bar{\alpha}$に対し、

$$\pi \restriction \bar{\nu} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\nu}} \to \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\pi(\bar{\nu})} \quad \text{mono}$$

が成り立っている。$\sigma = sup\{\pi(\bar{\nu}) + 1 | \ \bar{\nu} < \bar{\eta}\}$とすると

$$\pi \restriction \bar{\eta} : \bar{\eta} \to \sigma \quad \text{cofinal.}$$

従って、$\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\nu}} = (\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\eta}})^{\bar{\nu}}, \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\pi(\bar{\nu})} = (\mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\sigma})^{\pi(\bar{\nu})}$に注意すれば、補題1.8. により

$$\pi \restriction \bar{\eta} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\eta}} \to \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\sigma} \quad \text{mono}$$

となるので、Claim B により、

$$\pi \restriction \bar{\eta} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\nu}} \to \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\pi(\bar{\eta})} \quad \text{mono.}$$

(c) $\bar{\eta} = \bar{\nu} + 1$のとき、帰納法の仮定から

$$\pi \restriction \bar{\nu} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\nu}} \to \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\nu} \quad \text{mono}$$

である。$\nu = \pi(\bar{\nu})$とおいた。さて、$\nu = J(\beta_0, \cdots, \beta_{n-1})$とする。すると$\beta_i = C_i(\nu), \beta_i \leq \nu < \delta$だから、$\beta_i = C_i^{\delta}(\nu) = C_i^{\delta}(\pi(\bar{\nu})).\pi(\bar{\nu}) \in X$だから、$\beta_i \in X$となる。したがって$\beta_i = \pi(\bar{\beta}_i), \bar{\beta}_i < \bar{\delta}$とできるが、もし$\beta_i < \nu$ならば、$\bar{\beta}_i < \bar{\nu}$となるので、$\beta_i \in range(\pi \restriction \bar{\nu})$. 従って、補題3.11. の記号を用いれば

$$K_{\alpha,A}(\nu)\text{が undefined} \ \to \ H \subseteq range(\pi \restriction \bar{\nu}).$$

次に$K_{\alpha,A}(\nu)$が定義されているとすると、$K_{\alpha,A}(\nu) < \nu < \delta$だから、$K_{\alpha,A}(\nu) = K_{\alpha,A}^{\delta}(\nu).\nu \in X$だから、$K_{\alpha,A}(\nu) \in X$となるので、$K_{\alpha,A} = \pi(t), t < \bar{\delta}$とできる。しかし、$K_{\alpha,A}(\nu) < \nu = \pi(\bar{\nu})$により、$t < \bar{\nu}$だから、

$$K_{\alpha,A}(\nu) \in range(\pi \restriction \bar{\nu}).$$

従って、補題3.11. の記号を用いると

$$K_{\alpha,A}(\nu)\text{が defined} \ \to \ H \subseteq range(\pi \restriction \bar{\nu}).$$

補題 3.11. を用いて

$$\pi \restriction (\bar{\nu}+1) : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\nu}+1} \to \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\nu+1} \quad \text{mono}$$

即ち、

$$\pi \restriction \bar{\eta} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\eta}} \to \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\nu+1} \quad \text{mono}$$

となる。さて、$\nu + 1 = sup\{\pi(\bar{\mu}) + 1 |\ \bar{\mu} < \bar{\eta}\}$ だから、Claim B により、

$$\pi \restriction \bar{\eta} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\eta}} \to \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\pi(\bar{\eta})} \quad \text{mono.}$$

以上により、$\bar{\eta} \leq \bar{\delta}, \bar{\eta} \geq \bar{\alpha}$に対して

$$\pi \restriction \bar{\eta} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\eta}} \to \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\pi(\bar{\eta})} \quad \text{mono}$$

となることがわかった。これで、$\bar{\eta} = \bar{\delta}$とすれば、補題が示される。

この補題 3.12. は CP に対応する。以下、これを CP として用いることがある。

3.13. 補題.$\alpha \in \delta \in On, Y \subseteq \delta$とする。今、$\delta = J(\beta_0, \cdots, \beta_{n-1})$ とし、Hを補題 3.11. のように

$$H = \begin{cases} \{\beta_0, \cdots, \beta_{n-1}\} \cap \delta, & \text{if } K_{\alpha,A}(\delta) \text{ が undefined} \\ (\{\beta_0, \cdots, \beta_{n-1}\} \cap \delta) \cup \{K_{\alpha,A}(\delta)\}, & \text{if } K_{\alpha,A}(\delta) \text{ が defined.} \end{cases}$$

とする。$X = \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\delta}(Y \cup H)$ とし、$\alpha \in X$と仮定する。さらに、$\bar{\alpha} \in On$ が J-closed で、$\bar{\alpha} = X \cap \alpha$ であれば

$$\delta \cap \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\delta+1}(Y \cup \{\delta\}) \subseteq X$$

である。

証明. まず、$\pi : \bar{\delta} \to X$をXの collapsing map とする。すると、$\pi \restriction \bar{\alpha} = id, \pi(\bar{\alpha}) = \alpha$であるから、補題 3.12. により、$\pi$は、

$$\pi : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\delta}} \to \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\delta} \quad \text{mono}$$

である。さらに、$H \subseteq X = range(\pi)$ であるから、補題 3.11. により、πを$\pi(\bar{\delta}) = \delta$として拡張したものは

$$\pi : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\delta}+1} \to \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\delta+1} \quad \text{mono}$$

となっている。

今、$u \in range(\pi)^{<\omega}$とする。$u = \pi(\bar{u}), \bar{u} \in (\bar{\delta}+1)^{<\omega}$とできる。そこで$F$を$\mathcal{M}_{\alpha}[A]$の関数とし、$\bar{F}$をそれに対応する$\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]$の関数とする。$F^{\delta+1}(u) = F^{\delta+1}(\pi(\bar{u}))$ が定義されていれば、$\bar{F}^{\bar{\delta}+1}(\bar{u})$ も定義されている。$\bar{y} = \bar{F}^{\bar{\delta}+1}(\bar{u})$ とする。このとき、$\pi(\bar{y}) = F^{\delta+1}(\pi(\bar{u}))$ だから、$F^{\delta+1}(u) \in range(\pi)$.

このことから、$range(\pi)$ は $\mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\delta+1}$の subalgebra になることがわかる。

さて、$Y \cup \{\delta\} \subseteq X \cup \{\delta\} = range(\pi)$ により

$$\mathcal{M}_\alpha[A]^{\delta+1}(Y \cup \{\delta\}) \subseteq \mathcal{M}_\alpha[A]^{\delta+1}(range(\pi))$$

であるが、$range(\pi)$ が $\mathcal{M}_\alpha[A]^{\delta+1}$ の subalgebra なので

$$\mathcal{M}_\alpha[A]^{\delta+1}(range(\pi)) = range(\pi).$$

従って、

$$\mathcal{M}_\alpha[A]^{\delta+1}(Y \cup \{\delta\}) \subseteq range(\pi) = X \cup \{\delta\}.$$

故にδとの共通部分をとって

$$\delta \cap \mathcal{M}_\alpha[A]^{\delta+1}(Y \cup \{\delta\}) \subseteq X.$$

この補題 3.13. は FP に相当する。

II.(ω_1,1)-Morass

1.Admissible Sets, $L_\xi[A]$の性質

最初に、準備として、admissible sets と、$L_\xi[A]$の性質について述べておくことにする。証明は省くか、概略にとどめる。詳しくは[1],[3]を参照のこと。

1.1. 定義.KP の公理系

(1) Extensionality

$$\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \ \rightarrow \ a = b$$

(2) Foundation

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow \exists x[\varphi(x) \wedge \forall x \in y \neg\varphi(y)]$$

ここで、$\varphi(x)$ は、自由な yが現れない formula である。

(3) Pair

$$\exists a(x \in a \wedge y \in a)$$

(4) Union

$$\exists b \forall y \in a \forall x \in y(x \in b)$$

(5) Infinity

$$\exists x(x \neq 0 \wedge x \text{ is a limit ordinal})$$

(6) Δ_0-Separation

$$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x))$$

ここで、$\varphi(x)$ は、自由な yが現れないΔ_0-formula である。

(7) Δ_0-Collection

$$\forall x \in a \exists y \varphi(x,y) \rightarrow \exists z \forall x \in a \exists y \in z \varphi(x,y)$$

ここで、$\varphi(x,y)$ は自由な z が現れない Δ_0-formula である。

これらの (1)-(7) が KP の公理系である。尚、(2),(6),(7) は、公理の Schema である。

KP からはさまざまな結果が導かれるが、ここでは次のことに注意しておく。

1.2. 定理 (Σ_1-Recursion). G が Σ_1-定義可能な関数であるとき、Σ_1-定義可能な関数 F で

$$\forall x \in dom(F)[F(x) = G(x, F \upharpoonright x)]$$

をみたすものが存在する。

1.3. 定義. Amenable Set, Admissible Set, Admissible Ordinal.

(1) 集合 M が amenable とは、M が transitive であって、次の条件をみたしていることである:

(i) $x, y \in M \;\rightarrow\; \{x,y\} \in M$.

(ii) $x \in M \;\rightarrow\; \bigcup x \in M$.

(iii) $\omega \in M$.

(iv) $x, y \in M \;\rightarrow\; x \times y \in M$.

(v) $R \subseteq M$ が M 上 Δ_0-定義可能であれば、$\forall x \in M(R \cap x \in M)$.

(2) 集合 M が admissible であるとは、M が amenable であって、M が KP のモデルになっていることをいう。

(3) $\alpha \in On$ が admissible であるとは、ある admissible set M に対して

$$\alpha = M \cap On$$

となることをいう。

1.4. 補題. $\xi > \omega$ が limit ordinal であれば、$L_\xi[A]$ は amenable である。

1.5. 補題. Δ_1^{KP}-formula $H(x, \alpha, a)$ で

$$H(x, \alpha, a) \text{ iff } x = L_\alpha[A]$$

となるものが存在する。

1.6. 補題. 関数 $\nu \mapsto L_\nu[A]$ は uniformly $\Delta_1^{L_\alpha[A]}$ for limit $\alpha > \omega$.

1.7. 補題. M が admissible であれば、$a \in M, \alpha \in M$ に対して

$$(L_\alpha[a])^M = L_\alpha[a]$$

1.8. 定理.$\alpha > \omega$が limit ordinalで、$X \prec_1 L_\alpha[A]$のとき

$$\pi : X \simeq L_\beta[B] \quad \text{ただし、} B = \pi[A \cap X]$$

となるπ, βが一意的に存在する。

この節の最後に、一変数のΔ_0-formula $Adm(x)$ で

$$Adm(L_\xi[A]) \text{ iff } L_\xi[A] \text{は admissible}$$

となるものを定める。

1.9. 定義. 集合論言語 $\mathcal{L}$ の formula の Gödel 集合.
formula φ の Gödel 集合を$\ulcorner\varphi\urcorner$で表すことにする。
(i) $\ulcorner \mathrm{v}_i = \mathrm{v}_j \urcorner = \langle 0, i, j\rangle$, $\ulcorner \mathrm{v}_i \in \mathrm{v}_j \urcorner = \langle 1, i, j\rangle$
(ii) φ, ψが formulas のとき

$$\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner = \langle 2, \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner\rangle$$
$$\ulcorner \neg\varphi \urcorner = \langle 3, \ulcorner\varphi\urcorner\rangle$$
$$\ulcorner \exists \mathrm{v}_i \varphi \urcorner = \langle 4, i, \ulcorner\varphi\urcorner\rangle$$

1.10. 定義.$V_\omega = \{x|\ rank(x) < \omega\}$ とする。
(1) $Fm(w, f, n) \equiv n \in \omega \wedge f$は function $\wedge\, dom(f) = n + 1 \wedge f(n) = w \wedge \forall k \le nR(k, f)$.
ただし

$$\begin{aligned} R(k,f) \equiv & \exists i, j \in \omega(f(k) = \langle 0, i, j\rangle \vee f(k) = \langle 1, i, j\rangle) \\ & \vee \exists l, m < k(f(k) = \langle 2, f(l), f(m)\rangle \vee f(k) = \langle 3, f(l)\rangle) \\ & \vee \exists l < k \exists i \in \omega(f(k) = \langle 4, i, f(l)\rangle) \end{aligned}$$

(2) $Fm_0(w, f, n) \equiv n \in \omega \wedge f$は function $\wedge\, dom(f) = n+1 \wedge f(n) = w \wedge \forall k \le nR_0(k, f)$.
ただし

$$\begin{aligned} R_0(k,f) \equiv & \exists i, j \in \omega(f(k) = \langle 0, i, j\rangle \vee f(k) = \langle 1, i, j\rangle) \\ & \vee \exists l, m < k(f(k) = \langle 2, f(l), f(m)\rangle \vee f(k) = \langle 3, f(l)\rangle) \\ & \vee \exists l < k \exists m < l \exists i, j \in \omega(f(k) = \langle 4, i, f(l)\rangle \wedge f(l) = \langle 2, \langle 1, i, j\rangle, f(m)\rangle). \end{aligned}$$

(3) $\widetilde{Fm}(w, f, n) \equiv Fm(w, f, n) \wedge \forall m < n \neg\exists g \in V_\omega Fm(w, g, m)$.
(4) $\widetilde{Fm_0}(w, f, n) \equiv Fm_0(w, f, n) \wedge \forall m < n \neg\exists g \in V_\omega Fm_0(w, f, n)$.
(5) $Fmla(w) \equiv \exists n \in \omega \exists f \in V_\omega \widetilde{Fm}(w, f, n)$.
(6) $Fmla_0(w) \equiv \exists n \in \omega \exists f \in V_\omega \widetilde{Fm_0}(w, f, n)$.
$Fmla(w), Fmla_0(w)$ は、それぞれ、wが、formula,Δ_0-formula の Gödel 集合であることを表している。

1.11. 定義.

$$Sat(w,u,b) \equiv \exists g \exists f \in V_\omega \exists n, r \in \omega[\widetilde{Fm}(w,f,n) \wedge r = rank(w)$$
$$\wedge\, g \text{は function} \wedge dom(g) = n+1 \wedge b \in g(n) \wedge \forall k \leq n S(k,g,r,f,u)]$$

ここで

$$\begin{aligned} S(k,g,r,f,u) \equiv & \exists i,j \in \omega[(f(k) = \langle 0,i,j\rangle \wedge g(k) = \{a \in {}^r u \mid a(i) = a(j)\}) \\ & \vee (f(k) = \langle 1,i,j\rangle \wedge g(k) = \{a \in {}^r u \mid a(i) \in a(j)\})] \\ & \vee \exists l,m < k[f(k) = \langle 2, f(l), f(m)\rangle \wedge g(k) = g(l) \cap g(m)] \\ & \vee \exists l < k[f(k) = \langle 3, f(l)\rangle \wedge g(k) = {}^r u - g(l)] \\ & \vee \exists l < k \exists i \in \omega[f(k) = \langle 4, i, f(l)\rangle \\ & \qquad \wedge g(k) = \{a \in {}^r u \mid \exists x \in u(a(i/x) \in g(l))\}] \end{aligned}$$

尚、$a(i/x)$ は、$dom(a(i/x)) = dom(a)$ なる関数で、$j \in dom(a)$ に対して

$$a(i/x)(j) = \begin{cases} a(j), & \text{if } j \neq i \\ x, & \text{if } j = i. \end{cases}$$

1.12. 定理.$\varphi(\mathrm{v}_{i_1}, \cdots, \mathrm{v}_{i_n})$ が $\mathcal{L}$ の formula で、示されたもの以外に自由変数を含まないとし、$w = \ulcorner\varphi\urcorner$ とする。$r = rank(w)$, $b \in {}^r u$ ならば

$$Sat(w,u,b) \text{ iff } u \models \varphi(b(i_1), \cdots, b(i_n)).$$

注意.1.9. から 1.12. については[8]を参照のこと。

1.13. 補題.$\xi > \omega$が limit ordinal のとき、$Fmla_0(w)$ なる wと $b \in L_\xi[A]$に対して

$$Sat(w, L_\xi[A], b) \text{ iff } \exists u \in L_\xi[A][u \text{は transitive} \wedge range(b) \subseteq u \wedge Sat^{L_\xi[A]}(w,u,b)]$$

証明.$w = \ulcorner\varphi\urcorner$ とする。φ はΔ_0-formula である。さらに、$\mathrm{v}_{i_1}, \cdots, \mathrm{v}_{i_n}$が自由変数として現れているとする。まず、$Sat(w, L_\xi[A], b)$ とすると

$$L_\xi[A] \models \varphi(b(i_1), \cdots, b(i_n))$$

ところが、φ がΔ_0-formula であるから、$b(i_1), \cdots, b(i_n) \in u$ なる transitive set u に対しては

$$u \models \varphi(b(i_1), \cdots, b(i_n)).$$

今、$b \in L_\zeta[A]$となるように$\zeta < \xi$をとり、$u = L_\zeta[A]$とおけば

$$u \in L_\xi[A], \quad u\text{は transitive}, \quad range(b) \subseteq u$$

であり、さらに

$$u \models \varphi(b(i_1), \cdots, b(i_n))$$

である。故に$Sat(w, u, b)$となるが、$u \in L_\xi[A]$であるから、Satの定義式を調べれば

$$Sat^{L_\xi[A]}(w, u, b)$$

となることが容易にわかる。故に

$$\exists u \in L_\xi[A][u\text{は transitive} \wedge range(b) \subseteq u \wedge Sat^{L_\xi[A]}(w, u, b)]$$

となる。逆は殆ど明らかである。今の議論を逆にたどれば良い。

この補題によって、$Sat(w, L_\xi[A], b)$をΔ_0-formulaと考えても良いことがわかる。

1.14.$\xi > \omega$が limit ordinal のとき、"$L_\xi[A] \models \Delta_0$-Collection"は$\Delta_0$-formulaで表される。
証明.次のような formula を考えれば良い:

$$\forall w \in L_\xi[A] \forall b \in L_\xi[A] \forall a \in L_\xi[A][Fmla_0(w) \wedge \forall x \in a \exists y \in L_\xi[A] Sat(w, L_\xi[A], b(0/x, 1/y)) \\ \rightarrow \exists z \in L_\xi[A] \forall x \in a \exists y \in z Sat(w, L_\xi[A], b(0/x, 1/y))]$$

ここで、$b(0/x, 1/y)$は定義1.11.の$a(i/x)$と同様に定義されるものである。補題1.13..によって、これはΔ_0-formulaで表されることがわかる。

1.15. 補題."$L_\xi[A]$は admissible"はΔ_0-formulaで表される。
証明.$L_\xi[A]$は admissible iff $\xi > \omega \wedge \xi$は limit $\wedge L_\xi[A] \models \Delta_0$-Collection であるが

$$\xi > \omega \quad \text{iff} \quad L_\xi[A] \models \exists x(x \neq 0 \wedge x\text{は limit ordinal})$$
$$\xi\text{は limit ordinal} \quad \text{iff} \quad L_\xi[A] \models \forall \alpha \exists \beta(\alpha < \beta)$$

であるから、補題1.14.により、明らかである。

1.16. 定義.$Adm(x)$は1.13.から1.15.のようにして作られたΔ_0-formulaで

$$Adm(L_\xi[A]) \quad \text{iff} \quad L_\xi[A]\text{は admissible}$$

をみたすものである。

2.(ω_1,1)-Morass の定義と、存在証明の準備

まず、(ω_1,1)-Morass の定義をする。[3]の定義をそのまま用いる。

2.1. 定義. まず、$\alpha \in On$ が adequate であるとは、αが admissible であるか、それとも、αが admissible ordinals の極限になっていることをいう。即ち、

$$\alpha \text{が admissible} \vee \forall\beta < \alpha \exists\gamma < \alpha(\beta \leq \gamma \wedge \gamma \text{は admissible})$$

となることである。

さて、今、$\mathcal{S}$を、adequate ordinals の対 (α, ν) の集合で、条件

(i) $\alpha < \nu < \omega_2$ & $\alpha \leq \omega_1$

(ii) $(\alpha, \nu), (\alpha', \nu') \in \mathcal{S}$ & $\alpha < \alpha' \ \rightarrow \ \nu < \alpha'$

をみたすものとする。このとき、次のように定義する。

$$\begin{aligned}
&S^0 = \{\alpha \leq \omega_1 |\ \exists\nu(\alpha, \nu) \in \mathcal{S}\} \\
&S^1 = \{\nu < \omega_2 |\ \exists\alpha(\alpha, \nu) \in \mathcal{S}\} \\
&S = S^0 \cap S^1 \\
&S_\alpha = \{\nu \in S^1 |\ (\alpha, \nu) \in \mathcal{S}\}, \quad \text{for } \alpha \in S^0 \\
&\alpha_\nu = \text{the unique } \alpha \in S^0 \text{ such that } (\alpha, \nu) \in \mathcal{S}, \quad \text{for } \nu \in S^1
\end{aligned}$$

α_νが一意的なのは、$\mathcal{S}$についての条件 (ii) によることに注意しておく。

さらに、$\prec$を tree ordering on S^1で

$$\nu \prec \tau \ \rightarrow \ \alpha_\nu < \alpha_\tau$$

をみたすものとし、$(\pi_{\nu\tau} |\ \nu \prec \tau)$ を、写像$\pi_{\nu\tau} : (\nu + 1) \rightarrow (\tau + 1)$ の commutative system とする。そこで、

$$\mathfrak{M} = (S, \mathcal{S}, \prec, (\pi_{\nu\tau})_{\nu \prec \tau})$$

とする。$\mathfrak{M}$ が、次の (M0) から (M7) をみたすとき、$\mathfrak{M}$ は $(\omega_1, 1)$-morass(以下、単に morass) であるという。

(M0) (a) $\alpha \in S^0$に対し、S_αは closed in $sup(S_\alpha)$ であり、$\alpha < \omega_1$であれば、$sup(S_\alpha) \in S_\alpha$.

(b) $\omega_1 = max(S^0) = sup(S^0 \cap \omega_1)$ であり、$\omega_2 = sup(S_{\omega_1})$

(M1) $\nu \prec \tau$であれば、

$$\pi_{\nu\tau} \restriction \alpha_\nu = id \restriction \alpha_\nu,\ \pi_{\nu\tau}(\alpha_\nu) = \alpha_\tau,\ \pi_{\nu\tau}(\nu) = \tau$$

であり、$\pi_{\nu\tau}$は $S_{\alpha_\nu} \cap (\nu + 1)$ を $S_{\alpha_\tau} \cap (\tau + 1)$ の中へ、順序を保存して写し、しかも次の (i)-(iii) をみたす。

(i) γが S_{α_ν}の最小元ならば、$\pi(\gamma)$ は S_{α_τ}の最小元。

(ii) $S_{\alpha_\nu}\cap(\nu+1)$ の中で、γがβの直後元であれば、$S_{\alpha_\tau}\cap(\tau+1)$ の中で$\pi(\gamma)$ は$\pi(\beta)$ の直後元。
(iii) γが $S_{\alpha_\nu}\cap(\nu+1)$ の limit point であれば、$\pi(\gamma)$ は $S_{\alpha_\tau}\cap(\tau+1)$ の limit point である。
ここで、$\pi_{\nu\tau}$を単にπと書いた。
(M2) $\bar\tau\prec\tau, \bar\nu\in S_{\alpha_\tau}\cap\bar\tau$とし、$\nu=\pi_{\bar\tau\tau}(\bar\nu)$ とする。このとき、

$$\bar\nu\prec\nu\text{であり、}\pi_{\bar\nu\nu}\restriction\bar\nu=\pi_{\bar\tau\tau}\restriction\bar\nu$$

(M3) $\tau\in S^1$に対して、$\{\alpha_\nu|\ \nu\prec\tau\}$ は closed in α_τ.
(M4) もし、τが S_{α_τ}の極大元でないならば、$\{\alpha_\nu|\ \nu\prec\tau\}$ は unbounded in α_τ.
(M5) もし、$\{\alpha_\nu|\ \nu\prec\tau\}$ が unbounded in α_τならば

$$\tau=\bigcup_{\nu\prec\tau}\pi_{\nu\tau}``\nu$$

(M6) $\bar\nu$が limit point of $S_{\alpha_{\bar\nu}}$で、$\bar\nu\prec\nu$とし、さらに$\nu'=sup(\pi_{\bar\nu\nu}``\bar\nu)$ とすると、

$$\bar\nu\prec\nu',\quad \pi_{\bar\nu\nu'}\restriction\bar\nu=\pi_{\bar\nu\nu}\restriction\bar\nu$$

(M7) $\bar\nu$が $S_{\alpha_{\bar\nu}}$の limit point で、$\bar\nu\prec\nu, \nu=sup(\pi_{\bar\nu\nu}``\bar\nu)$ とする。もし

$$\theta\in\bigcap_{\bar\tau\in S_{\alpha_{\bar\nu}}\cap\bar\nu}\{\alpha_\eta|\ \bar\tau\preceq\eta\preceq\pi_{\bar\nu\nu}(\bar\tau)\}$$

であれば、

$$\exists\eta\in S_\theta(\bar\nu\preceq\eta\preceq\nu)$$

((M2) により、$\bar\tau\in S_{\alpha_{\bar\nu}}\cap\bar\nu\rightarrow\bar\tau\prec\pi_{\bar\nu\nu}(\bar\tau)$ であることに注意する。)

これで、morass の定義は終った。この節の残りで、morass の存在証明のための準備をする。

2.2. 定義.Q-submodel.
νを limit ordinal とし、$X\subseteq L_\nu[A]$とする。Xが $L_\nu[A]$の Q-submodel であるとは、任意のΣ_1-formula $\varphi(\mathrm{v}_0,\mathrm{v}_1,\cdots,\mathrm{v}_n)$ と任意の $x_1,\cdots,x_n\in X$に対して、

$$X\models\forall\beta\exists\gamma>\beta\varphi(\gamma,x_1,\cdots,x_n)\text{ iff }L_\nu[A]\models\forall\beta\exists\gamma>\beta\varphi(\gamma,x_1,\cdots,x_n)$$

が成り立つことと定める。このとき、$X\prec_Q L_\nu[A]$と書く。

2.3. 補題.$X\prec_Q L_\nu[A]$であれば、$X\prec_1 L_\nu[A]$.
証明.$\psi(\mathrm{v}_1,\cdots,\mathrm{v}_n)$ をΣ_1-formula とし、$x_1,\cdots,x_n\in X$とする。

$$\varphi(\mathrm{v}_0,\mathrm{v}_1,\cdots,\mathrm{v}_n)\equiv\mathrm{v}_0=\mathrm{v}_0\wedge\psi(\mathrm{v}_1,\cdots,\mathrm{v}_n)$$

とすると、φ はΣ_1と考えて良い。また、νは limit ordinal だから

$$L_\nu[A] \models \forall\beta\exists\gamma > \beta(\gamma = \gamma).$$

従って、$X \models \forall\beta\exists\gamma > \beta(\gamma = \gamma)$ である。故に

$$\begin{aligned} X \models \psi(x_1, \cdots, x_n) &\text{ iff } X \models \forall\beta\exists\gamma > \beta\varphi(\gamma, x_1, \cdots, x_n) \\ &\text{ iff } L_\nu[A] \models \forall\beta\exists\gamma > \beta\varphi(\gamma, x_1, \cdots, x_n) \\ &\text{ iff } L_\nu[A] \models \psi(x_1, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

2.4. 補題.νを limit ordinal とする。$X \prec_1 L_\nu[A], X \cap \nu$が cofinal in ν であれば、$X \prec_Q L_\nu[A]$ である。
証明.$\varphi(\mathrm{v}_0, \mathrm{v}_1, \cdots, \mathrm{v}_n)$ をΣ_1-formula とし、$x_1, \cdots, x_n \in X$とする。まず、

$$X \models \forall\beta\exists\gamma > \beta\varphi(\gamma, x_1, \cdots, x_n)$$

と仮定し、$\beta < \nu$を任意にとる。$X \cap \nu$は cofinal in νだから、$\beta \leq \beta'$なる$\beta' \in X \cap \nu$がとれる。このβ'に対して

$$X \models \exists\gamma > \beta'\varphi(\gamma, x_1, \cdots, x_n)$$

よって、$X \prec_1 L_\nu[A]$及び$\beta \leq \beta'$により

$$L_\nu[A] \models \exists\gamma > \beta\varphi(\gamma, x_1, \cdots, x_n)$$

従って、$L_\nu[A] \models \forall\beta\exists\gamma > \beta\varphi(\gamma, x_1, \cdots, x_n)$ となる。
　逆に $L_\nu[A] \models \forall\beta\exists\gamma > \beta\varphi(\gamma, x_1, \cdots, x_n)$ と仮定する。$\beta \in X$とする。このとき、$\beta \in L_\nu[A]$だから

$$L_\nu[A] \models \exists\gamma > \beta\varphi(\gamma, x_1, \cdots, x_n).$$

故に、$X \prec_1 L_\nu[A]$により

$$X \models \exists\gamma > \beta\varphi(\gamma, x_1, \cdots, x_n)$$

となるので、

$$X \models \forall\beta\exists\gamma > \beta\varphi(\gamma, x_1, \cdots, x_n)$$

である。

　次に、順序数の間の関係を表すために first-order language $\mathcal{M}$ を定める。
2.5. 定義.$\mathcal{M}$ は、次のものから成る。
　変数:x, y, z, x_0, x_1等
　述語記号:$<, =, P_{F_0}, P_J^n\ (n = 0, 1, 2, \cdots), P_{C_i}\ (i = 0, 1, 2, \cdots), P_T, P_K, \in M(\Box \cup \{\ \})$.
　connectives:$\neg, \vee$.

quantifier:∃
括弧:(,).

2.6. 定義.$\mathcal{M}$ の formula.
まず、atomic formula は次のとおりである。

$$
\begin{aligned}
&x < y, \quad x = y \\
&P_{F_0}(x_1, x_2, y) \\
&P_J^n(x_1, \cdots, x_n, y) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \\
&P_{C_i}(x, y) \quad (i = 0, 1, 2, \cdots) \\
&P_T(x, y), \quad P_K(x, y) \\
&x \in M^y(\Box \cup \{z_1, \cdots, z_n\}) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)
\end{aligned}
$$

$\mathcal{M}$ の formula は、これらの atomic formula から作られるものである。

2.7. 定義.$\mathcal{M}$ の propositional formula.
$\mathcal{M}$ の atomic formulas を¬及び,∨のみでつないだ formula のことを、特に propositional formula(prop.formula) と呼ぶことにする。即ち、quantifier が現れない formula のことである。

2.8. 定義.$A \subseteq \alpha \subseteq X \subseteq On,\ \alpha' \in On$ とする。$\mathcal{M}$ の formula $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ と、$x_1, \cdots, x_n \in X$ に対して

$$(X, \alpha, A, \alpha') \models \varphi(x_1, \cdots, x_n)$$

を次のように定める。φ が atomic formula のときは次のとおりである。

$$
\begin{aligned}
(X, \alpha, A, \alpha') \models x < y \quad &\text{iff} \quad x < y \ (\text{順序数の大小関係}) \\
(X, \alpha, A, \alpha') \models x = y \quad &\text{iff} \quad x = y \\
(X, \alpha, A, \alpha') \models P_{F_0}(x_1, x_2, y) \quad &\text{iff} \quad F_0(x_1, x_2) = y \\
(X, \alpha, A, \alpha') \models P_J^n(x_1, \cdots, x_n, y) \quad &\text{iff} \quad J(x_1, \cdots, x_n) = y \\
(X, \alpha, A, \alpha') \models P_{C_i}(x, y) \quad &\text{iff} \quad C_i(x) = y \\
(X, \alpha, A, \alpha') \models P_T(x, y) \quad &\text{iff} \quad T_{\alpha, A}(x) = y \\
(X, \alpha, A, \alpha') \models P_K(x, y) \quad &\text{iff} \quad K_{\alpha, A}(x) = y \\
(X, \alpha, A, \alpha') \models x \in M^y(\Box \cup \{z_1, \cdots, z_n\}) \quad &\text{iff} \quad x \in M_\alpha[A]^y(\alpha' \cup \{z_1, \cdots, z_n\})
\end{aligned}
$$

φ が$\neg\psi$のときは、

$$(X, \alpha, A, \alpha') \models \varphi \quad \text{iff} \quad \neg[(X, \alpha, A, \alpha') \models \psi]$$

φ が$\psi \vee \theta$のときは

$$(X, \alpha, A, \alpha') \models \varphi \quad \text{iff} \quad (X, \alpha, A, \alpha') \models \psi \text{ または } (X, \alpha, A, \alpha') \models \theta$$

φ が $\exists z \psi(z)$ のときは

$$(X, \alpha, A, \alpha') \models \varphi \quad \text{iff} \quad \text{ある} z \in X \text{に対して} (X, \alpha, A, \alpha') \models \psi(z)$$

ここで、$F_0, J, C_i, T_{\alpha,A}, K_{\alpha,A}$は、$\mathcal{M}_\alpha[A]$の関数である。

2.9. 補題.$A \subseteq \alpha \subseteq X \subseteq Y \subseteq On,\ \alpha' \in On$ とする。$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ が prop.formula のとき、$x_1, \cdots, x_n \in X$に対して、

$$(X, \alpha, A, \alpha') \models \varphi(x_1, \cdots, x_n) \quad \text{iff} \quad (Y, \alpha, A.\alpha') \models \varphi(x_1, \cdots, x_n).$$

証明は容易である。

3.Morass の存在証明. 其一

以上の準備のもとで、この論文の目標である次の定理を証明する。

3.1. 定理.$A \subseteq \omega_1$とし、$V = L[A]$と仮定する。このとき、$(\omega_1,1)$-morass が存在する。

以下で、この定理 3.1. を証明する。$A \subseteq \omega_1$を固定し、$V = L[A]$と仮定する。

3.2. 定義.

$$\begin{aligned} \bar{S} = \{(\alpha, \nu) |\ & \omega < \alpha \leq \omega_1 \wedge \alpha < \nu < \omega_2 \\ & \wedge \forall \beta < \nu \exists \gamma < \nu (\beta < \gamma \wedge L_\gamma[A \cap \alpha] \text{は admissible}) \\ & \wedge L_\nu[A \cap \alpha] \models \text{“}\forall \beta < \alpha \exists f (f : \omega \to \beta \text{ onto}) \\ & \qquad \wedge \alpha \text{は regular} \wedge \alpha \text{は最大の cardinal”}\} \end{aligned}$$

とし、

$$\begin{aligned} &\bar{S}^0 = \{\alpha \leq \omega_1 |\ \exists \nu (\alpha, \nu) \in \bar{S}\} \\ &\bar{S}^1 = \{\nu < \omega_2 |\ \exists \alpha (\alpha, \nu) \in \bar{S}\} \\ &\bar{S} = \bar{S}^0 \cup \bar{S}^1 \\ &S_\alpha = \{\nu \in \bar{S}^1 |\ (\alpha, \nu) \in \bar{S}\}, \quad \text{for } \alpha \in \bar{S}^0 \end{aligned}$$

とする。$\bar{S}$は adequate ordinals の対の集合であり、$\bar{S}^0, \bar{S}^1$等は、定義 2.1. と同様に定義されていることに注意する。尚、$\bar{S}_\alpha$のみ、S_αと書くことにする。

3.3. 補題.$(\bar{\alpha}, \nu), (\alpha, \nu) \in \bar{S}$ならば、$\bar{\alpha} = \alpha$である。

証明.$\bar{\alpha} < \alpha$とする。$A \cap \alpha \in L_{\alpha+1}[A \cap \alpha] \subseteq L_\nu[A \cap \alpha]$だから

$$A \cap \bar{\alpha} = A \cap \alpha \cap \bar{\alpha} \in L_\nu[A \cap \alpha]$$

である。$\nu = sup\{\gamma < \nu |\ L_\gamma[A\cap\alpha]$は admissible$\}$ であるから、$L_\nu[A\cap\alpha]$の中で、$L_\xi[A\cap\bar{\alpha}], \xi < \nu$ を構成することができる。即ち、$\xi < \nu$に対して

$$L_\xi[A\cap\bar{\alpha}] \in L_\nu[A\cap\alpha]$$

である (補題 1.7. を用いた) 。故に $L_\nu[A\cap\alpha]$が transitive なことから

$$L_\nu[A\cap\bar{\alpha}] \subseteq L_\nu[A\cap\alpha]$$

がわかる。さて、$\alpha \in L_\nu[A\cap\bar{\alpha}]$だから、$(\alpha,\nu) \in \bar{S}$により

$$L_\nu[A\cap\bar{\alpha}] \models \alpha \text{は regular cardinal}$$

ところが、$\bar{\alpha} < \alpha$だから、これは

$$L_\nu[A\cap\bar{\alpha}] \models \bar{\alpha} \text{は最大の cardinal}$$

に反する。$\bar{\alpha} > \alpha$としても同様にして矛盾が導かれるので、$\bar{\alpha} = \alpha$である。

3.4. 定義.$\nu \in \bar{S}^1$に対して

$$\alpha_\nu = \text{the unique ordinal } \alpha \in \bar{S}^0 \text{ such that } (\alpha,\nu) \in \bar{S}$$

と定める。α_νの一意性は補題 3.3. による。

3.5. 補題.$\nu \in S_\alpha$なら、$\nu \leq \omega_2^{L[A\cap\alpha]}$.
証明.$(\alpha,\nu) \in \bar{S}$なら

$$L_\nu[A\cap\alpha] \models \alpha \text{は the unique uncountable cardinal}$$

であることに注意する。もし、$\omega_2^{L[A\cap\alpha]} < \nu$であれば

$$L_\nu[A\cap\alpha] \models \omega_1^{L[A\cap\alpha]} \text{と} \omega_2^{L[A\cap\alpha]} \text{はuncountable cardinals}$$

となって明らかに不合理。故に$\nu \leq \omega_2^{L[A\cap\alpha]}$である。

この補題によって

$$\omega_2^{L[A\cap\alpha]} \in S_\alpha \ \rightarrow \ sup(S_\alpha) = \omega_2^{L[A\cap\alpha]}$$

がいえる。即ち、$\omega_2^{L[A\cap\alpha]}$は S_αの最大元である。

3.6. 補題.$\nu \in S_\alpha$ならば、$\nu \neq \omega_1^{L[A\cap\alpha]}$.
証明.$\nu = \omega_1^{L[A\cap\alpha]}$であったとする。以下、$L[A\cap\alpha]$で考える。
$\alpha < \nu = \omega_1$だから、$|\alpha| = \omega$である。従って $f : \omega \to \alpha$ onto となる $f \in L[A\cap\alpha]$がとれる。limit ordinal $\xi > \omega$を大きくとり、$f \in L_\xi[A\cap\alpha]$とする。すると

$$L_\xi[A\cap\alpha] \models \exists f(f : \omega \to \alpha \text{ onto}).$$

である。今、

$$\alpha \cup \{\alpha, f\} \subseteq X \prec L_\xi[A\cap\alpha] \ \& \ |X| = |\alpha \cup \{\alpha, f\}| = \omega$$

となる Xをとる。定理 1.8. により

$$\pi : X \cong L_\beta[B], \quad B = \pi[A\cap\alpha\cap X] = \pi[A\cap\alpha]$$

となるπ, βがある。$\pi \restriction (\alpha+1) = id$ に注意すれば、$B = A\cap\alpha$であり、

$$L_\beta[A\cap\alpha] \models \exists f(f : \omega \to \alpha \text{ onto}).$$

さて、$|X| = \omega$により、$|\beta| = |L_\beta[A\cap\alpha]| = \omega$となるので、$\beta < \omega_1$. 従って

$$L_{\omega_1}[A\cap\alpha] \models \exists f(f : \omega \to \alpha \text{ onto}).$$

$\omega < \alpha$なので、これは

$$L_\nu[A\cap\alpha] \models \alpha \text{は cardinal でない}$$

を意味する。しかし、これは$\nu \in S_\alpha$に反するので、$\nu \neq \omega_1^{L[A\cap\alpha]}$となる。

3.7. 系.$\nu \in S_\alpha, \nu \neq \omega_2^{L[A\cap\alpha]}$ならば、$L[A\cap\alpha] \models \neg(\nu\text{は cadinal})$. 従って

$$L[A\cap\alpha] \models \nu\text{は singular}.$$

証明. 補題 3.5.,3.6. により明らかである。

3.8. 補題.$\nu \in \bar{S}^1$に対し、$S_{\alpha_\nu} \cap \nu$は uniformly $\Sigma_1^{L_\nu[A\cap\alpha_\nu]}(\{\alpha_\nu, A\cap\alpha_\nu\})$.
証明.$\tau \in S_{\alpha_\nu} \cap \nu$ iff
(1) $\alpha_\nu < \tau$
(2) $\forall\beta < \tau\exists\gamma < \tau(\beta < \gamma \wedge L_\gamma[A\cap\alpha_\nu]$は admissible)
(3) $L_\tau[A\cap\alpha_\nu] \models$ "$\forall\beta < \alpha_\nu\exists f(f : \omega \to \beta$ onto)
$\wedge\alpha_\nu$は regular $\wedge$ α_νは最大の cardinal"
である。(2) は次のように書くことができる:
(2′) $L_\tau[A\cap\alpha_\nu] \models \forall\beta\exists\gamma\exists x(\beta < \gamma \wedge x = L_\gamma[A\cap\alpha_\nu] \wedge Adm(x))$

尚、$L_\gamma[A\cap\alpha_\nu]$の absoluteness については、補題 1.6. を用いる。すると (2′) と (3) をまとめて

$$L_\tau[A\cap\alpha_\nu]\models\varphi(\alpha_\nu, A\cap\alpha_\nu)$$

と書くことができる。φ は (2′) と (3) の formula を$\wedge$でつないだものである。これより

$$\tau\in S_{\alpha_\nu}\cap\nu \text{ iff } \alpha_\nu<\tau\wedge\exists z(z=L_\tau[A\cap\alpha_\nu]\wedge z\models \text{“}\varphi(\alpha_\nu, A\cap\alpha_\nu)\text{”})$$

である。$z=L_\tau[A\cap\alpha_\nu]$は uniformly $\Sigma_1^{L_\nu[A\cap\alpha_\nu]}(\{A\cap\alpha_\nu\})$ だから、これで補題は示された。

3.9. 補題.$\nu\in S_\alpha$, $\nu\neq\omega_2^{L[A\cap\alpha]}$とすると

$$\exists\delta\in On\exists p\subseteq\delta[p\text{は有限集合}\wedge\nu\subseteq\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^\delta(\alpha\cup p)]$$

証明. 系 3.7. により

$$L[A\cap\alpha]\models\neg(\nu\text{は cardinal})$$

従って、$f\in L[A\cap\alpha], f:\beta\to\nu$ onto$,\beta<\nu$なる f,βがある。さて、$\beta<\nu$だから、

$$L_\nu[A\cap\alpha]\models\alpha\text{は最大の cardinal}$$

により、$\beta=\alpha$として良い。そこで、$f:\beta\to\nu$ onto とする。

$f=D^\alpha_{A\cap\alpha}(t)$ なる term$^\alpha$をとる。$t=\ \hat{x}^\xi\varphi(x)$ としておく。そこでδを、$\nu,t,\xi<\delta$なる J-closed な順序数とする。すると、

$$\nu\subseteq\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^\delta(\alpha\cup\{t\})$$

となる。以下、これを示す。まず、$\alpha\subseteq\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^\delta(\alpha\cup\{t\})$ は明らかであるので、

$$\nu-\alpha\subseteq\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^\delta(\alpha\cup\{t\})$$

をいう。$\beta\in\nu-\alpha$とすると、fが全射であるから、

$$\beta=f(\gamma),\quad \gamma<\alpha$$

とできる。故に、

$$\beta=\text{the least } x\in\nu \text{ such that } x=f(\gamma)$$

である。故に、$s=K(\exists^\nu_x(x=t(o_\gamma)))$ とすると、$D^\alpha_{A\cap\alpha}(s)=\beta$となる。まず、

$$s\in\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^\delta(\alpha\cup\{t\})$$

をいう。ここで、$X=\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^\delta(\alpha\cup\{t\})$ とおく。

$t = \hat{x}^\xi\varphi(x) \in X$だから、$\frown^\xi = J(0, \omega+\xi, \omega+\xi)$を思い出せば、$C_i$を用いることにより、$\omega+\xi \in X$. さて、$\gamma < \alpha$であり、$\alpha$は admissible だから、

$$\omega + \gamma < \alpha \subseteq X$$

従って、J^δを用いれば、δが J-closed なので、

$$o_\gamma = \widehat{x_0}^\gamma Ord(x_0) \in X$$

である。尚、$Ord(x_0)$ に現れる quantifier は $\exists^\gamma$を用いる。また、$x = t(o_\gamma)$ は

$$\exists z(z \in t \land z = \langle x, o_\gamma \rangle)$$

と書けるが、$t = \hat{x}^\xi\varphi(x)$ だから、ここに現れる quantifier はすべて $\exists^\xi$としても良い。また、$\omega^2 < \nu$だから、$\omega + \nu = \nu$である (I.3.6. の証明を見よ)。これらのことから、$\exists^\nu, \exists^\gamma, \exists^\xi, t, o_\gamma$等の、$\exists^\nu_x(x = t(o_\gamma))$ に用いる記号は全て Xに属することがわかる。故にこれらを J^δで組み合わせて、

$$\exists^\nu_x(x = t(o_\gamma)) \in X \subseteq \delta$$

従って

$$s = K(\exists^\nu_x(x = t(o_\gamma))) = K^\delta(\exists^\nu_x(x = t(o_\gamma))) \in X$$

となる。

さて、$s = \hat{x}^\zeta\psi(x), \zeta < \nu$とすることができる。ところで $D^\alpha_{A\cap\alpha}(s) = \beta$だから、$\zeta \geq \beta$とならねばならない。しかし、$\zeta > \beta$であれば、

$$o_\beta = \hat{x}^\beta Ord(x) < s,\ D^\alpha_{A\cap\alpha}(o_\beta) = \beta$$

となるから、s の最小性に反する。したがって$\zeta = \beta$でなければならないので

$$s = \hat{x}^\beta\psi(x) \in X$$

従って、t のときと同様にして、$\omega + \beta \in X$を得る。ところが、$\beta \geq \alpha > \omega^2$だから、$\omega + \beta = \beta$. 故に $\beta \in X$となって、

$$\nu \subseteq X = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\delta(\alpha \cup \{t\})$$

となる。

3.10. 定義.D_νと p_ν

$\nu \in \bar{S}^1, \nu \neq \omega_2^{L[A\cap\alpha_\nu]}$に対し

$$D_\nu = min\{\delta |\ \nu \leq \delta \land \exists p \subseteq \delta[p\text{は有限} \land \alpha_\nu \in \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\delta(\alpha_\nu \cup p)$$
$$\land \nu \cap \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\delta(\alpha_\nu \cup p)\text{はcofinal in } \nu]\}.$$

$$p_\nu = \text{the } <^*\text{-least } p \subseteq D_\nu \text{ such that}$$
$$p\text{は有限} \land \alpha_\nu \in \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\delta(\alpha_\nu \cup p)$$
$$\land \nu \cap \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\delta(\alpha_\nu \cup p)\text{は cofinal in } \nu.$$

と定める。尚、$<^*$は$[On]^{<\omega} = \{p|\ p \subseteq On \wedge p$ は有限$\}$上の整列順序で、

$$
\begin{aligned}
p <^* q \text{ iff } \exists\alpha[p - \alpha = q - \alpha \wedge q \cap \alpha \neq \emptyset \\
\wedge (p \cap \alpha = \emptyset \vee max(p \cap \alpha) < max(q \cap \alpha))]
\end{aligned}
$$

と定められるものである。

D_ν, p_νの性質を調べておく。

3.11. 補題.D_νは limit ordinal である。
証明. まず、明らかに$\nu \leq D_\nu$である。今、$D_\nu = \delta + 1$とする。νは limit ordinal だから、$\nu \leq \delta$である。I の補題 3.13. において、$\alpha = \alpha_\nu, Y = \alpha_\nu \cup (p_\nu \cap \delta)$とし、$A$を$A \cap \alpha_\nu$とすると

$$
\begin{aligned}
\delta \cap \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu) &\subseteq \delta \cap \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{\delta+1}(Y \cup \{\delta\}) \\
&\subseteq \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{\delta}(Y \cup H)
\end{aligned}
$$

であり、$Y \cup H = \alpha_\nu \cup ((p_\nu \cap \delta) \cup H)$である。さらに、$(p_\nu \cap \delta) \cup H \subseteq \delta$であり、これは有限集合である。$\nu \leq \delta$だから

$$
\nu \cap \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu) \subseteq \nu \cap \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{\delta}(\alpha_\nu \cup (p_\nu \cap \delta) \cup H)
$$

しかし、これはD_νの最小性に反するので、D_νは limit ordinal でなければならない。

3.12. 補題.$D_\nu = \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu)$
証明.$\pi : \delta \to \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{\delta_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu)$を collapsing map とする。CP(I. 補題 3.12.) により、$\alpha = \alpha_\nu$とおくと

$$
\pi : \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\delta \to \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu} \quad \text{mono}
$$

$p = \pi^{-1}[p_\nu]$とすると、

$$
\delta = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\delta(\alpha_\nu \cup p)
$$

である。

Claim. $\nu \subseteq \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu)$.

今、claim が証明されたと仮定すると、$\pi \restriction \nu = id$だから

$$
\alpha < \nu \subseteq \delta = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\delta(\alpha_\nu \cup p)
$$

故にD_νの最小性から$\delta = D_\nu$. また、明らかに$p \leq^* p_\nu$だから、これもp_νの最小性から$p = p_\nu$. これで

$$
D_\nu = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu)
$$

がいえる。そこで、claim を証明する。

$\bar{\nu} \leq \delta$を$\pi \restriction \bar{\nu} : \bar{\nu} \to \nu$がcofinalになるような最小の順序数とする。明らかに$\alpha < \bar{\nu} \leq \nu$. また、$\bar{\nu}$はlimit ordinalである。Iの補題1.7.,1.8.により

$$\pi \restriction \bar{\nu} : \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\bar{\nu}} \to \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\nu} \quad \text{mono}$$

特に、

$$\pi \restriction \bar{\nu} : \bar{\nu} \to \nu \quad \text{strong } \mathcal{P}\text{-map}$$

である。νはJ-closedだから、$\bar{\nu}$もJ-closedになる。よって$\pi \restriction \bar{\nu}$を拡張して、

(1) $\hat{\pi} : L_{\bar{\nu}}[A \cap \alpha] \prec_1 L_\nu[A \cap \alpha]$

$\hat{\pi}(D^\alpha_{A\cap\alpha}(t)) = D^\alpha_{A\cap\alpha}(\pi(t)) \quad \text{for } t \in Term^\alpha_{\bar{\nu}}$

を得る。特に、$t = o_\beta = \hat{x}^\beta Ord(x)$とすると、$\pi(t) = o_{\pi(\beta)} = \hat{x}^{\pi(\beta)} Ord(x)$だから、

$$\hat{\pi}(\beta) = \pi(\beta), \quad \beta < \bar{\nu}$$

である。

さて、$\alpha \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha \cup p_\nu)$なので、明らかに$\pi(\alpha) = \alpha$である。次に、$\bar{\beta} < \bar{\nu}$に対して

(2) $\pi(\bar{\beta}) \subseteq \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha \cup p_\nu)$

である。これを示すために、$\beta = \pi(\bar{\beta})$とおくと、$\beta < \nu$だから

$$L_\nu[A \cap \alpha] \models \exists f (f : \alpha \to \beta \text{ onto})$$

よって、(1)により、$\hat{\pi}(\alpha) = \pi(\alpha) = \alpha$に注意して

$$L_{\bar{\nu}}[A \cap \alpha] \models \exists f (f : \alpha \to \bar{\beta} \text{ onto})$$

$\bar{f} \in L_{\bar{\nu}}[A \cap \alpha], \bar{f} : \alpha \to \bar{\beta}$ ontoとし、$\bar{f} = D^\alpha_{A\cap\alpha}(\bar{t})$とする。$t = \pi(\bar{t})$とおき、$f = D^\alpha_{A\cap\alpha}(t) = \hat{\pi}(\bar{f})$とすると、$f : \alpha \to \beta$ ontoである。ところで

$$t, \alpha, \beta < \nu, \quad \nu\text{は}J\text{-closed}$$

であり、$t, \alpha, \beta \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha \cup p_\nu)$だから、補題3.9.の証明と同様にして

$$\beta \subseteq \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha \cup p_\nu).$$

すなわち(2)がいえる。

これで

$$\nu = \bigcup_{\bar{\beta} < \bar{\nu}} \pi(\bar{\beta}) \subseteq \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu)$$

となる。

3.13. 補題.$\nu < D_\nu$
証明.$\nu \leq D_\nu, p_\nu \subseteq D_\nu$だから、$\neg(p_\nu \subseteq \nu)$をいえば良い。$p_\nu \subseteq \nu$と仮定して矛盾を導く。$\nu$は admissible ordinals の極限だから、p_νが有限集合であることにより、

$$\delta < \nu \leq D_\nu,\ p_\nu \subseteq \delta,\ \delta は J\text{-closed}$$

となる順序数δがとれる。このとき、補題 3.12. により

$$\nu \subseteq D_\nu = \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu) = \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{\delta}(\alpha_\nu \cup p_\nu)$$

となるので、D_νの最小性に反する。

3.14. 補題.$\nu, \tau \in S_\alpha,\ \nu < \tau$ならば、$D_\nu < \tau$.
証明.$\alpha < \nu < \tau$だから、

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \exists f(f : \alpha \to \nu \text{ onto})$$

$f \in L_\tau[A \cap \alpha],\ f : \alpha \to \nu$ onto とし、$f = D^\alpha_{A\cap\alpha}(t)$ となる $t \in Term^\alpha_\tau$をとる。$t < \tau$である。
従って、$\nu, t < \delta < \tau$となる J-closed なδをとると、再び補題 3.9. の証明と同様にして、

$$\alpha < \nu \subseteq \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\delta(\alpha \cup \{t\})$$

がわかるから、$D_\nu \leq \delta < \tau$である。

次に、$\bar{S}^1$上に tree ordering $\lhd$ を定める。

3.15. 定義.$\nu, \tau \in \bar{S}^1$に対して、$\nu \lhd \tau$を

$$\begin{aligned}\nu \lhd \tau \text{ iff } \nu \neq \omega_2^{L[A\cap\alpha_\nu]}\ \&\ \tau \neq \omega_2^{L[A\cap\alpha_\tau]}\ \&\ \alpha_\nu < \alpha_\tau \\ \&\ \exists\sigma(\sigma : D_\nu \to D_\tau\ \&\ \sigma は \text{(i)-(viii)} の条件をみたす)\end{aligned}$$

ここで、条件 (i)-(viii) は次のとおりである。
(i) $\sigma : (D_\nu, \alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu, \alpha_\nu) \prec_{\exists_{\vec{x}}\text{prop.}} (D_\tau, \alpha_\tau, A \cap \alpha_\tau, \alpha_\tau)$
すなわち、$\varphi(\vec{x}, y_1, \cdots, y_n)$ が言語 $\mathcal{M}$ の prop.formula であり、$\beta_1, \cdots, \beta_n \in D_\nu$のときに

$$\begin{aligned}&(D_\nu, \alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu, \alpha_\nu) \models \exists\vec{x}\varphi(\vec{x}, \beta_1, \cdots, \beta_n) \\ &\qquad \text{iff } (D_\tau, \alpha_\tau, A \cap \alpha_\tau, \alpha_\tau) \models \exists\vec{x}\varphi(\vec{x}, \sigma(\beta_1), \cdots, \sigma(\beta_n))\end{aligned}$$

となることである。
(ii) $\sigma \restriction \alpha_\nu = id$
(iii) $\sigma(\nu) = \tau$
(iv) $\sigma(\alpha_\nu) = \alpha_\tau$

(v) $\sigma[p_\nu] = p_\tau$

(vi) $(\sigma \restriction \nu)^\frown : L_\nu[A \cap \alpha_\nu] \prec_Q L_\tau[A \cap \alpha_\tau]$

尚、$(\sigma \restriction \nu)^\frown$は、$t \in Term_\nu^{\alpha_\nu} \subseteq \nu$に対して

$$(\sigma \restriction \nu)^\frown(D^{\alpha_\nu}_{A\cap\alpha_\nu}(t)) = D^{\alpha_\tau}_{A\cap\alpha_\tau}(\sigma(t))$$

と定められるものである。

(vii) $(\sigma \restriction \nu)^\frown(A \cap \alpha_\nu) = A \cap \alpha_\tau$

(viii) $\xi \in D_\nu$が、$p_\nu \subseteq \xi$ & $\alpha_\nu \in \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\xi(\alpha_\nu \cup p_\nu)$ をみたすとき、ξを十分大きいと言うことにする。このとき、$\xi \in D_\nu$が十分大きく、

$$\bar{\pi} : \bar{\gamma} \to \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\xi(\alpha_\nu \cup p_\nu)$$
$$\pi : \gamma \to \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{\sigma(\xi)}(\alpha_\tau \cup p_\tau)$$

が共に collapsing map であれば、

$$\sigma(\bar{\gamma}) = \gamma, \quad \sigma \circ \bar{\pi}^{-1}[p_\nu] = \pi^{-1}[p_\tau]$$

3.16. 補題.$\sigma : (D_\nu, \alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu, \alpha_\nu) \prec_{\exists_{\not{s}}\mathrm{prop.}} (D_\tau, \alpha_\tau, A \cap \alpha_\tau, \alpha_\tau)$ ならば

$$\sigma : \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu} \to \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{D_\tau} \quad \text{mono}$$

証明. 例えば、J^{D_ν}とJ^{D_τ}に対して

$$\sigma(J^{D_\nu}(\vec{\xi})) \simeq J^{D_\tau}(\sigma(\vec{\xi})), \quad \vec{\xi} < D_\nu$$

を示す。他のものについても同様である。

$\xi_1, \cdots, \xi_n < D_\nu$とし、$\beta = J^{D_\nu}(\xi_1, \cdots, \xi_n)$とすると、$\beta < D_\nu$であり、$\beta = J^{(}\xi_1, \cdots, \xi_n)$であるので

$$(D_\nu, \alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu, \alpha_\nu) \models P^n_J(\xi_1, \cdots, \xi_n, \beta)$$

であるから、σでうつせば

$$(D_\tau, \alpha_\tau, A \cap \alpha_\tau, \alpha_\tau) \models P^n_J(\sigma(\xi_1), \cdots, \sigma(\xi_n), \sigma(\beta))$$

即ち、$\sigma(\beta) = J(\sigma(\vec{\xi}))$, $\sigma(\beta) < D_\tau$となるので

$$\sigma(J^{D_\nu}(\vec{\xi})) = J^{D_\tau}(\sigma(\vec{\xi})).$$

逆に、$J^{D_\tau}(\sigma(\vec{\xi}))$ が定義されているとする。これは

$$\exists\beta < D_\tau(\beta = J(\sigma(\vec{\xi})))$$

のことであり、従って

$$(D_\tau, \alpha_\tau, A \cap \alpha_\tau, \alpha_\tau) \models \exists\beta P^n_J(\sigma(\xi_1), \cdots, \sigma(\xi_n), \beta)$$

とできる。これをσ^{-1}でもどせば

$$(D_\nu, \alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu, \alpha_\nu) \models \exists\beta P^n_J(\xi_1, \cdots, \xi_n, \beta)$$

となる。これは、$J^{D_\nu}(\vec{\xi})$ が定義されることを意味する。

3.17. 補題.$\nu \lhd \tau$の定義にあるσは、ν, τに対して一意的である。
証明. まず、補題 3.16. によって、

$$\sigma : \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu} \to \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{D_\tau} \quad \text{mono}$$

であり、また、$dom(\sigma) = D_\nu = \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu)$ だから、σは$\sigma \restriction (\alpha_\nu \cup p_\nu)$ により定まる。しかし、$\sigma \restriction \alpha_\nu = id, \sigma[p_\nu] = p_\tau$だから、$\sigma$は一意的に定まる。

3.18. 定義.$\nu \lhd \tau$の定義にある一意的なσを$\sigma_{\nu\tau}$と書く。

3.19. 補題.$\lhd$ は$\bar{S}^1$上の tree order である。
証明.$\lhd$ が非反射的順序であることはすぐわかる。また、$\nu \lhd \tau$なら$\alpha_\nu < \alpha_\tau$であるから、well-founded であることも明らかである。そこで、$\{\nu |\ \nu \lhd \tau\}$ が $\lhd$ で全順序になっていることをいえば良い。
$\alpha = \alpha_\tau$とし、$\nu, \nu' \lhd \tau$とする。$\sigma = \sigma_{\nu\tau}, \sigma' = \sigma_{\nu'\tau}$とする。$\sigma$については

$$\sigma : \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu} \to \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{D_\tau} \quad \text{mono}$$

であり、$dom(\sigma) = D_\nu = \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu), \sigma[\alpha_\nu \cup p_\nu] = \alpha_\nu \cup p_\tau$であるから、

$$range(\sigma) = \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{D_\tau}(\alpha_\nu \cup p_\tau).$$

また、同様にして、

$$range(\sigma') = \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{D_\tau}(\alpha_{\nu'} \cup p_\tau)$$

である。

今、$\alpha_\nu < \alpha_{\nu'}$であれば、$range(\sigma) \subseteq range(\sigma')$ だから、${\sigma'}^{-1} \circ \sigma$が定義されるが、実は${\sigma'}^{-1} \circ \sigma = \sigma_{\nu\nu'}$となっている。$\nu \lhd \nu'$の条件のうち、(i)-(vii) は容易に確かめられるから、(viii) のみ示すことにする。$\xi < D_\nu$が十分大きいものとし、$\xi' = {\sigma'}^{-1} \circ \sigma(\xi)$ とすると、$\xi' < D_{\nu'}$も十分大きい。さらに、

$$\begin{aligned}
\bar{\pi} &: \bar{\gamma} \to \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{\xi}(\alpha_\nu \cup p_\nu) \\
\pi &: \gamma \to \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\sigma(\xi)}(\alpha \cup p_\tau) \\
\bar{\pi}' &: \bar{\gamma}' \to \mathcal{M}_{\alpha_{\nu'}}[A \cap \alpha_{\nu'}]^{\xi'}(\alpha_{\nu'} \cup p_{\nu'})
\end{aligned}$$

がそれぞれ、collapsing map であるとする。$\sigma'(\xi') = \sigma(\xi)$ だから、$\nu \lhd \tau$及び、$\nu' \lhd \tau$により、

$$\begin{aligned}
\sigma(\bar{\gamma}) &= \gamma, \quad \sigma \circ \bar{\pi}^{-1}[p_\nu] = \pi^{-1}[p_\tau] \\
\sigma'(\bar{\gamma}') &= \gamma, \quad \sigma' \circ {\bar{\pi}'}^{-1}[p_{\nu'}] = \pi^{-1}[p_\tau]
\end{aligned}$$

これより直ちに

$$ {\sigma'}^{-1} \circ \sigma(\bar{\gamma}) = \bar{\gamma}', \quad ({\sigma'}^{-1} \circ \sigma) \circ \bar{\pi}^{-1}[p_\nu] = {\bar{\pi}'}^{-1}[p_{\nu'}] $$

これで、条件 (viii) はいえ、$\nu \lhd \nu'$がいえる。

もし、$\alpha_{\nu'} < \alpha_\nu$ならば、今のものと同様にして$\sigma^{-1} \circ \sigma' = \sigma_{\nu'\nu}$となるので、$\nu' \lhd \nu$がわかる。

今、$\alpha_\nu = \alpha_{\nu'}$とすると、$range(\sigma) = range(\sigma')$. また、$\sigma, \sigma'$は共に、1 対 1 で、順序を保存するので、

$$\begin{aligned}
\sigma^{-1} \circ \sigma' &: D_{\nu'} \to D_\nu \\
{\sigma'}^{-1} \circ \sigma &: D_\nu \to D_{\nu'}
\end{aligned}$$

も共に 1 対 1 で順序を保存する。これより、$D_\nu = D_{\nu'}$である。さて、もし、$\nu \in \nu'$であれば、補題 3.14. により、$D_\nu < \nu' < D_{\nu'}$とならねばならぬが、これは不合理。また、$\nu' \in \nu$としても同様にして矛盾を生ずるから、$\nu = \nu'$とならねばならない。

以上により、$\nu \lhd \nu', \nu = \nu', \nu' \lhd \nu$のどれかが成り立つことがわかった。故に $\{\nu | \ \nu \lhd \tau\}$ は $\lhd$ で全順序となる。

3.20. 補題.$\sigma : D_\nu \to D_\tau$が、$\nu \lhd \tau$の定義の (i)-(vii) をみたすとき、

$$ \text{(viii)} \quad \text{iff} \quad \text{(viii)}' $$

である。ここで、(viii)$'$は (viii) において、$\sigma(\bar{\gamma}) = \gamma, \sigma \circ \bar{\pi}^{-1}[p_\nu] = \pi^{-1}[p_\tau]$を

$$ \gamma \in range(\sigma), \quad \pi^{-1}[p_\tau] \subseteq range(\sigma) $$

に弱めたものである。

証明.(viii)$\to$ (viii)$'$は明らかである。そこで、(viii)$'$が成り立っていると仮定し、$\xi < D_\nu$が十分大きいとする。さらに

$$\begin{aligned}
\bar{\pi} &: \bar{\gamma} \to \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{\xi}(\alpha_\nu \cup p_\nu) \\
\pi &: \gamma \to \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{\sigma(\xi)}(\alpha_\tau \cup p_\tau)
\end{aligned}$$

が共に collapsing map であるとする。$\bar{p} = \bar{\pi}^{-1}[p_\nu], p = \pi^{-1}[p_\tau]$とおく。また (viii)$'$が成り立っているから、$\delta < D_\nu$と、有限な $q \subseteq D_\nu$をとり、

$$\sigma(\delta) = \gamma, \quad \sigma[q] = \pi^{-1}[p_\tau] = p$$

とできる。$\delta = \bar{\gamma}, q = \bar{p}$をいえば良い。まず、$\pi$は collapsing map だから、CP によって、

$$\pi : \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^\gamma \to \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{\sigma(\xi)} \quad \text{mono}$$

従って、$\gamma = \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^\gamma(\alpha_\tau \cup p)$. 即ち、

$$\sigma(\delta) = \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{\sigma(\delta)}(\alpha_\tau \cup \sigma[q])$$

これは、

$$(D_\tau, \alpha_\tau, A \cap \alpha_\tau, \alpha_\tau) \models \forall z(z < \sigma(\delta) \leftrightarrow z \in M^{\sigma(\delta)}(\square \cup \sigma[q]))$$

と書けるので、(i) により、σ^{-1}でもどせば

$$\delta = \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\delta(\alpha_\nu \cup q)$$

今、$j : \delta \to \bar{\gamma}$を $j(x) = \bar{\pi}^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ \pi \circ \sigma(x)$ と定める。まず、$j(x)$ が定義されることを確かめておく。$x \in \delta$であれば、$\sigma(x) \in \sigma(\delta) = \gamma$. 従って

$$\pi\sigma(x) \in \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{\sigma(\xi)}(\alpha_\tau \cup p_\tau)$$

ところが、$x \in \delta = \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\delta(\alpha_\nu \cup q)$ であるから、

$$x = \bar{F}^\delta(\vec{\beta}, q), \quad \vec{\beta} < \alpha_\nu, \bar{F}\text{は}\mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]\text{の関数の合成}$$

と書けるので、Fを、$\bar{F}$に対応する $\mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]$の関数の合成とするとき、(i) により、

$$\sigma(x) = F^{\sigma(\delta)}(\sigma(\vec{\beta}), \sigma[q]) = F^\gamma(\vec{\beta}, p)$$

従って

$$\begin{aligned}\pi\sigma(x) = F^{\sigma(\xi)}(\vec{\beta}, p_\tau) &\in \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{\sigma(\xi)}(\alpha_\nu \cup p_\tau) \\ &= \sigma[\mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\xi(\alpha_\nu \cup p_\nu)]\end{aligned}$$

故に、$\sigma^{-1}\pi\sigma(x)$ は定義され、

$$\sigma^{-1}\pi\sigma(x) = \bar{F}^\xi(\vec{\beta}, p_\nu) \in \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\xi(\alpha_\nu \cup p_\nu) = range(\bar{\pi})$$

よって、$\bar{\pi}^{-1}\sigma^{-1}\pi\sigma(x)$ は定義され、しかも、その値は$<\bar{\gamma}$である。これで $j(x)$ が定義され、$j(x)<\bar{\gamma}$ となる。また、明らかに $j(x)$ は、x に対して一意的に定まる。これで、$j:\delta\to\bar{\gamma}$が定義されることがわかった。

さて、$\bar{\pi},\sigma,\pi$が全て、1対1で順序保存だから、$j:\delta\to\bar{\gamma}$も1対1, 順序保存となる。さらに、jは onto である。これを示すために、まず、$\bar{\pi}$が collapsing map であるので、CP により

$$\bar{\pi}:\mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A\cap\alpha_\nu]^{\bar{\gamma}}\to\mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A\cap\alpha_\nu]^{\xi}\quad \text{mono}$$

であり、それ故、$\bar{\gamma}=\mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A\cap\alpha_\nu]^{\bar{\gamma}}(\alpha_\nu\cup\bar{p})$ であることに注意しておく。$y\in\bar{\gamma}$とすると

$$y=\bar{G}^{\bar{\gamma}}(\vec{\beta},\bar{p}),\quad \vec{\beta}<\alpha_\nu,\ \bar{G}\text{は}\mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A\cap\alpha_\nu]\text{の関数の合成}$$

と表せる。$z=\bar{G}^{\delta}(\vec{\beta},q)$ とすると、上で $j(x)$ が定義されることを確かめたときと同様にして、$z<\delta$が存在することと、$j(z)=y$となることがわかる。これで、$j:\delta\to\bar{\gamma}$が、1対1,onto で順序保存であることが示された。ゆえに、$\delta=\bar{\gamma}, j=id$ となる。最後に、

$$\begin{aligned} j[q] &= \bar{\pi}^{-1}\sigma^{-1}\pi\sigma[q] \\ &= \bar{\pi}^{-1}\sigma^{-1}\pi[p] \\ &= \bar{\pi}^{-1}\sigma^{-1}[p_\tau] \\ &= \bar{\pi}^{-1}[p_\nu] \\ &= \bar{p} \end{aligned}$$

だから、$j=id$ により、$q=\bar{p}$. 従って

$$\sigma(\bar{\gamma})=\gamma,\quad \sigma\bar{\pi}^{-1}[p_\nu]=\pi^{-1}[p_\tau]$$

となり、(viii) がいえた。

この補題 3.20. は、次の節で用いられる。

4.Morass の存在証明. 其二

4.1. 定義.$\nu\lhd\tau$となるν,τに対して、$\pi_{\nu\tau}:(\nu+1)\to(\tau+1)$ を

$$\pi_{\nu\tau}=\sigma_{\nu\tau}\restriction(\nu+1)$$

で定める。さらに、

$$\overline{\mathfrak{M}}=(\bar{S},\bar{\mathcal{S}},\lhd,(\pi_{\nu\tau})_{\nu\lhd\tau})$$

とする。

注意. 前節の結果によれば、$\lhd$ は$\bar{S}^1$上の tree ordering であり、$(\pi_{\nu\tau})_{\nu\lhd\tau}$は、写像の commutative system である。

この節では、$\overline{\mathfrak{M}}$が、morass の公理 (M0)-(M7) をみたすことを証明する。

(M0)

(a).S_αが closed in $sup(S_\alpha)$,for all $\alpha \in \bar{S}^0$ は容易に確かめられる。それで、$\alpha \in \bar{S}^0 \cap \omega_1$とし、$\tau = sup(S_\alpha)$ とする。$\tau \in S_\alpha$をいうためには、$(\alpha, \tau) \in \bar{S}$をいえば良いが、$\tau < \omega_2$以外は容易に確かめられるので、$\tau < \omega_2$のみ証明する。まず

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \alpha\text{は最大の cardinal}$$

である (容易にわかる)。さて、$S_\alpha \subseteq \omega_2$なので、$\tau \leq \omega_2$は明らか。そこで、$\tau = \omega_2$と仮定する。すると、$\omega_1 < \tau$となるので、

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \omega_1\text{は cardinal}$$

しかし、$\alpha < \omega_1$だから、これは

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \alpha\text{は最大の cardinal}$$

に反する。故に$\tau \neq \omega_2$であり、従って $(\alpha, \tau) \in \bar{S}$となる。

(b). まず、$A \subseteq \omega_1$だから、次のことに注意しておく。

Claim.$\forall \xi < \omega_2 \exists \beta < \omega_2 (\beta > \xi \land L_\beta[A]\text{は admissible})$

証明.$\xi < \omega_2$とする。$\omega_1 \leq \xi$として良い。

$$\begin{aligned} &\xi \cup \{\xi\} \subseteq N \subseteq L_{\omega_2}[A] \\ &\langle N, A \cap N \rangle \prec \langle L_{\omega_2}[A], A \rangle \\ &|N| = \omega_1 \end{aligned}$$

となる Nがとれる。すると、πを Nの collapsing map とすれば、

$$\pi : N \cong L_\beta[B], \quad B = \pi[A \cap N]$$

ところで、$\pi \upharpoonright \xi \cup \{\xi\} = id$だから、$\xi = \pi(\xi) \in L_\beta[B]$となり、$\xi < \beta$である。さらに、$\omega_1 \leq \xi \subseteq N$により、

$$B = \pi[A \cap N] = \pi[A] = id[A] = A$$

従って、$\pi^{-1} : L_\beta[A] \prec L_{\omega_2}[A]$となるので、$L_\beta[A]$は admissible. さらに、$|N| = \omega_1$により、$|\beta| = \omega_1$. 従って$\beta < \omega_2$である。これで claim は証明された。

さて、この claim は

$$L_{\omega_2}[A] \models \forall \xi \exists \beta \exists x (\beta > \xi \land x = L_\beta[A] \land Adm(x))$$

とも書ける。すると、claim の証明中の$\pi, N, L_\beta[A]$については、

$$\pi : \langle N, A\rangle \cong \langle L_\beta[A], A\rangle$$

であり、$A = A \cap \omega_1 \in L_{\omega_1+1}[A] \subseteq L_\beta[A]$であるから、$\pi^{-1}(A) = A$ がわかる。故に、

$$L_\beta[A] \models \forall\xi\exists\gamma\exists x(\gamma > \xi \wedge x = L_\gamma[A] \wedge Adm(x))$$

となるから、このことより、$\beta \in S_{\omega_1}$が容易にわかる。従って、これより

$$\omega_1 = max(\bar{S}^0), \quad \omega_2 = sup(S_{\omega_1})$$

となる。

今、$\omega_1 = sup(\bar{S}^0 \cap \omega_1)$ をいうために、$\xi < \omega_1$とする。$\omega \leq \xi$として良い。

$$\begin{aligned}
&\xi \cup \{\xi\} \subseteq N \subseteq L_{\omega_2}[A]\\
&\langle N, A \cap N\rangle \prec \langle L_{\omega_2}[A], A\rangle\\
&|N| = \omega_0\\
&N \cap \omega_1 \in \omega_1
\end{aligned}$$

となる Nをとる。$\delta = N \cap \omega_1$とすると、$\xi \cup \{\xi\} \subseteq \delta$である。

$$\pi : \langle N, A \cap N\rangle \cong \langle L_\beta[B], B\rangle, \quad B = \pi[A \cap N]$$

とできる。$|N| = \omega_0$により、$|\beta| = \omega_0$. 従って、$\beta < \omega_1$であり、また$\pi \restriction \delta = id$ により、$B = \pi[N \cap A] = \pi[N \cap A \cap \omega_1] = \pi[\delta \cap A] = \delta \cap A$ となるので、

$$\pi : \langle N, A \cap N\rangle \cong \langle L_\beta[A \cap \delta], A \cap \delta\rangle, \quad \xi < \delta \leq \beta < \omega_1$$

である。ところで

$$\begin{aligned}
\langle L_{\omega_2}[A], A\rangle \models \text{“}&\forall\gamma < \omega_1\exists f(f : \omega \to \gamma \text{ onto} \wedge \omega_1\text{は regular}\\
&\wedge \omega_1\text{は最大の cardinal} \wedge \forall x(U(x) \to x \in \omega_1) \wedge \xi < \omega_1\text{”}
\end{aligned}$$

である。尚、$U(x)$ は $x \in A$ を表す述語である。従って

$$\begin{aligned}
\langle L_{\omega_2}[A], A\rangle \models \exists\alpha[&\forall\gamma < \alpha\exists f(f : \omega \to \gamma \text{ onto}) \wedge \alpha\text{は regular}\\
&\wedge \alpha\text{は最大の cardinal} \wedge \forall x(U(x) \to x \in \alpha) \wedge \xi < \alpha]
\end{aligned}$$

となるが、これは$\langle N, A\cap N\rangle$でも成り立つから、さらに$\pi$でうつせば

$$\langle L_\beta[A\cap\delta], A\cap\delta\rangle \models \exists\alpha[\forall\gamma<\alpha\exists f(f:\omega\to\gamma \text{ onto})\wedge \alpha\text{は regular} \\ \wedge\ \alpha\text{は最大の cardinal}\wedge\forall x(U(x)\to x\in\alpha)\wedge\xi<\alpha]$$

ここで、$\pi\restriction\delta = id$だから、$\pi(\omega)=\omega, \pi(\xi)=\xi$に注意する。そこで、このような$\alpha\in L_\beta[A\cap\delta]$をとれば、$\omega\le\xi<\alpha<\beta<\omega_1$であり、

$$L_{\omega_2}[A]\models \pi^{-1}(\alpha)\text{は最大の cardinal}$$

により、$\pi^{-1}(\alpha)=\omega_1$. これを用いて、$\alpha\subseteq\delta$をいう。$x\in\alpha$とすると、$x\in L_\beta[A\cap\delta]$だから、$\pi^{-1}(x)<\pi^{-1}(\alpha)=\omega_1$. $\pi^{-1}(x)\in N$なので、$\pi^{-1}(x)\in N\cap\omega_1=\delta$. それ故、$x=\pi^{-1}(x)<\delta$となるので、$\alpha\subseteq\delta$を得る。これで、$A\cap\alpha\subseteq A\cap\delta$がわかるが、一方

$$\langle L_\beta[A\cap\delta], A\cap\delta\rangle\models\forall x(U(x)\to x\in\alpha)$$

なので、$A\cap\delta\subseteq\alpha$を得る。これより、$A\cap\delta=A\cap\alpha$となる。故に

$$L_\beta[A\cap\alpha]\models \text{“}\forall\gamma<\alpha\exists f(f:\omega\to\gamma\text{ onto})\wedge\alpha\text{は regular} \\ \wedge\ \alpha\text{は最大の cardinal”}$$

である。また、$A\cap\alpha\in L_{\alpha+1}[A\cap\alpha]\subseteq L_\beta[A\cap\alpha]$であり、$\pi^{-1}(\alpha)=\omega_1$に気をつければ、$\pi^{-1}(A\cap\alpha)=A\cap\omega_1=A$であるから、最初の claim を書き直したものにより、

$$L_\beta[A\cap\alpha]\models\forall\xi\exists\gamma\exists x(\gamma>\xi\wedge x=L_\gamma[A\cap\alpha]\wedge Adm(x)).$$

以上により、$(\alpha,\beta)\in\bar{S}$となるので、$\xi<\alpha, \alpha\in\bar{S}^0\cap\omega_1$となる。

これで、(M0) はいえた。

(M1).$\nu\lhd\tau$とし、$\sigma=\sigma_{\nu\tau}$とする。まず、$\lhd$の定義により

$$\pi_{\nu\tau}\restriction\alpha_\nu = id\restriction\alpha_\nu,\ \pi_{\nu\tau}(\alpha_\nu)=\alpha_\tau,\ \pi_{\nu\tau}(\nu)=\tau$$

は明らかである。また、σは順序保存であることに注意しておく。さらに、$(\sigma\restriction\nu)^\frown : L_\nu[A\cap\alpha_\nu]\prec_Q L_\tau[A\cap\alpha_\tau]$については、

$$(\sigma\restriction\nu)^\frown\restriction\nu=\sigma\restriction\nu$$

であることにも注意しておく。補題 3.8. により、$S_{\alpha_\nu}\cap\nu$は uniformly $\Sigma_1^{L_\nu[A\cap\alpha_\nu]}(\{\alpha_\nu, A\cap\alpha_\nu\})$であるから、$\gamma\in S_{\alpha_\nu}\cap(\nu+1)$であれば、$\pi_{\nu\tau}(\gamma)=\sigma_{\nu\tau}(\gamma)\in S_{\alpha_\tau}\cap(\tau+1)$. 後は (i)-(iii) を示せば良い。

(i) γをS_{α_ν}の最小元であるとする。$\gamma<\nu$ならば、$S_{\alpha_\nu}\cap\nu$の最小元である。$\pi_{\nu\tau}(\gamma)\in S_{\alpha_\tau}\cap\tau$は今示したことからわかる。もし、$\pi_{\nu\tau}(\gamma)$が$S_{\alpha_\tau}$の最小元でなければ

$$L_\tau[A\cap\alpha_\tau]\models\exists x(x<\pi_{\nu\tau}(\gamma)\wedge x\in S_{\alpha_\tau}\cap\tau).$$

従って、$((\sigma\upharpoonright\nu)\hat{\ })^{-1}$でもどせば

$$L_\nu[A\cap\alpha_\nu]\models\exists x(x<\gamma\wedge x\in S_{\alpha_\nu}\cap\nu)$$

となり、γが$S_{\alpha_\nu}\cap\nu$の最小元であることに反するので、$\pi_{\nu\tau}(\gamma)$はS_{α_τ}の最小元である。

次に$\gamma=\nu$とすると、$\pi_{\nu\tau}(\gamma)=\pi_{\nu\tau}(\nu)=\tau\in S_{\alpha_\tau}\cap(\tau+1)$である。もし、$\tau$が$S_{\alpha_\tau}$の最小元でなければ、

$$L_\tau[A\cap\alpha_\tau]\models\exists x(x\in S_{\alpha_\tau}\cap\tau)$$

だから、$\gamma<\nu$のときと同様にして矛盾が出るので、$\tau=\pi_{\nu\tau}(\gamma)$は$S_{\alpha_\tau}$の最小元である。

(ii) $S_{\alpha_\nu}\cap(\nu+1)$の中で、$\gamma$が$\beta$の直後元になっているとする。すると、

$$\pi_{\nu\tau}(\beta),\pi_{\nu\tau}(\gamma)\in S_{\alpha_\nu}\cap(\nu+1),\quad \pi_{\nu\tau}(\beta)<\pi_{\nu\tau}(\gamma)$$

である。まず、$\gamma<\nu$とする。$\pi_{\nu\tau}(\gamma)$が$\pi_{\nu\tau}(\beta)$の直後元でなかったとすると、

$$L_\tau[A\cap\alpha_\tau]\models\exists x(\pi_{\nu\tau}(\beta)<x<\pi_{\nu\tau}(\gamma)\wedge x\in S_{\alpha_\tau}\cap\tau)$$

だから、(i) と同様にして矛盾が出るので、$\pi_{\nu\tau}(\gamma)$は$S_{\alpha_\tau}\cap(\tau+1)$の中で$\pi_{\nu\tau}(\beta)$の直後元である。$\gamma=\nu$でも同様である。

(iii) γが$S_{\alpha_\nu}\cap(\nu+1)$の limit point であるとする。$\pi_{\nu\tau}(\gamma)\in S_{\alpha_\tau}\cap(\tau+1)$である。また、

(1) $$\forall\delta<\gamma\exists\beta<\gamma(\delta<\beta\wedge\beta\in S_{\alpha_\nu}\cap\gamma).$$

である。今、$\beta\in S_{\alpha_\nu}\cap\gamma$は uniformly $\Sigma_1^{L_\gamma[A\cap\alpha_\nu]}(\{\alpha_\nu,A\cap\alpha_\nu\})$だから、これを表す$\Sigma_1$-formula $\varphi(x,y,z)$が、uniformly にとれる。即ち、

$$\beta\in S_{\alpha_\nu}\cap\gamma \text{ iff } L_\gamma[A\cap\alpha_\nu]\models\varphi(\beta,\alpha_\nu,A\cap\alpha_\nu)$$

である。まず、$\gamma<\nu$とすると、(1) は

(2) $$L_\gamma[A\cap\alpha_\nu]\models\forall\delta\exists\beta(\delta<\beta\wedge\varphi(\beta,\alpha_\nu,A\cap\alpha_\nu))$$

と書けるが、$L_\gamma[A\cap\alpha_\nu]\in L_\nu[A\cap\alpha_\nu]$だから、$\Sigma_0$-formula $\psi(x,y,z)$を用い

$$L_\nu[A\cap\alpha_\nu]\models\psi(L_\gamma[A\cap\alpha_\nu],\alpha_\nu,A\cap\alpha_\nu)$$

と書ける。従って$(\sigma \restriction \nu)^\frown$でうつせば、$(\sigma \restriction \nu)^\frown(L_\gamma[A \cap \alpha_\nu]) = L_{\pi_{\nu\tau}(\gamma)}[A \cap \alpha_\tau]$に注意して

$$L_\tau[A \cap \alpha_\tau] \models \psi(L_{\pi_{\nu\tau}(\gamma)}[A \cap \alpha_\tau], \alpha_\tau, A \cap \alpha_\tau)$$

これは

$$\forall\delta < \pi_{\nu\tau}(\gamma)\exists\beta < \pi_{\nu\tau}(\gamma)(\delta < \beta \wedge \beta \in S_{\alpha_\tau} \cap \pi_{\nu\tau}(\gamma)) \tag{3}$$

を表す。これで、$\pi_{\nu\tau}(\gamma)$ が $S_{\alpha_\tau} \cap (\tau+1)$ の limit point であることがわかる。
さて、$\gamma = \nu$のときは、(2) までは同じであるが、これを直ちに$(\sigma \restriction \nu)^\frown$でうつして

$$L_\tau[A \cap \alpha_\tau] \models \forall\delta\exists\beta(\delta < \beta \wedge \varphi(\beta, \alpha_\tau, A \cap \alpha_\tau)) \tag{4}$$

を得る。$\pi_{\nu\tau}(\nu) = \tau$なので、これは (3) と同じことである。(2) から (4) を導くときに、$(\sigma \restriction \nu)^\frown : L_\nu[A \cap \alpha_\nu] \prec_Q L_\tau[A \cap \alpha_\tau]$を用いることに注意しておく。

(M2).$\bar\tau \lhd \tau, \bar\alpha = \alpha_{\bar\tau}, \bar\nu \in S_{\bar\alpha} \cap \bar\tau, \nu = \pi_{\bar\tau\tau}(\bar\nu) = \sigma_{\bar\tau\tau}(\bar\nu)$とする。また、$\alpha = \alpha_\tau$とおく。まず、$\bar\nu < \bar\tau$だから、$\nu < \tau$である。また (M1) により、$\nu \in S_\alpha \cap \tau$である。
$\bar\nu < \bar\tau$だから、補題 3.13. と 3.14. により、$\bar\nu < D_{\bar\nu} < \bar\tau < D_{\bar\tau}$である。そこで、$\sigma = \sigma_{\bar\tau\tau} \restriction D_{\bar\nu}$とする。$\sigma = \sigma_{\bar\nu\nu}$となることを示す。
Claim.1.$\sigma_{\bar\tau\tau}(D_{\bar\nu}) = D_\nu$
証明. まず、machine $\mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]$の概念が uniformly $\Sigma_1^{L_\nu[A\cap\alpha_\nu]}(\{\alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu\})$であること、及び、$\delta < \nu$に対しては

$$Y \in L_\nu[A \cap \alpha_\nu], Y \subseteq \delta \ \rightarrow\ \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\delta(Y) \in L_\nu[A \cap \alpha_\nu]$$

であることに注意する。$D_{\bar\nu}, p_{\bar\nu}$の性質 (補題 3.12. の証明中の claim) により、

$$\bar\nu \subseteq \mathcal{M}_{\alpha_{\bar\nu}}[A \cap \alpha_{\bar\nu}]^{D_{\bar\nu}}(\alpha_{\bar\nu} \cup p_{\bar\nu})$$

これは、$\Sigma_1^{L_{\bar\tau}[A\cap\alpha_{\bar\tau}]}(L_{\bar\tau}[A \cap \alpha_{\bar\tau}])$で書けるので、$(\sigma_{\bar\tau\tau} \restriction \bar\tau)^\frown$でうつして、

$$\nu \subseteq \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^D(\alpha_\nu \cup \sigma_{\bar\tau\tau}[p_{\bar\nu}]) \tag{1}$$

ここで、$D = \sigma_{\bar\tau\tau}(D_{\bar\nu})$である。$D_\nu$の最小性より、$D_\nu \leq D$となる。さて、$D_\nu < D$と仮定し、$p_\nu = \{p_\nu^1, \cdots, p_\nu^n\}$とすると、

$$\exists\delta < D\exists x_1 < \delta\exists x_2 < x_1 \cdots \exists x_n < x_{n-1}[\nu \subseteq \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\delta(\alpha_\nu \cup \{x_1, \cdots, x_n\})]$$

がいえる。これは$\Sigma_1^{L_\tau[A\cap\alpha_\tau]}(L_\tau[A\cap\alpha_\tau])$だから、$((\sigma_{\bar\tau\tau}\restriction\tau)^\frown)^{-1}$でもどせば

$$\exists\delta<D_{\bar\nu}\exists x_1<\delta\exists x_2<x_1\cdots\exists x_n<x_{n-1}[\bar\nu\subseteq\mathcal{M}_{\alpha_{\bar\nu}}[A\cap\alpha_{\bar\nu}]^\delta(\alpha_{\bar\nu}\cup\{x_1,\cdots,x_n\})]$$

となるが、これは$D_{\bar\nu}$の最小性に反する。故に、$D_\nu=D=\sigma_{\bar\tau\tau}(D_{\bar\nu})$となる。

Claim.2.$\sigma[p_{\bar\nu}]=\sigma_{\bar\tau\tau}[p_{\bar\nu}]=p_\nu$.

証明. まず、$\sigma_{\bar\tau\tau}(D_{\bar\nu})=D_\nu$がわかったから、claim.1.(1) により

$$\nu\subseteq\mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A\cap\alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu\cup\sigma[p_{\bar\nu}])$$

となるので、p_νの最小性から、$p_\nu\leq^*\sigma[p_{\bar\nu}]$は明らかである。そこで、$p_\nu<^*\sigma[p_{\bar\nu}]$と仮定し、$p_\nu=\{p_\nu^1,\cdots,p_\nu^n\}$とする。さらに、$p_{\bar\nu}=\{p_{\bar\nu}^1,\cdots,p_{\bar\nu}^m\}$としておく。また、$p_\nu^1>\cdots>p_\nu^n$, $p_{\bar\nu}^1>\cdots>p_{\bar\nu}^m$ととっておく。すると、$p_\nu<^*\sigma[p_{\bar\nu}]$は例えば

$$p_\nu^1=\sigma(p_{\bar\nu}^1)\wedge p_\nu^2<\sigma(p_{\bar\nu}^2)$$

のように、=と<,即ち、等号と大小関係だけで書くことができることに注意する。すると、p_νの性質により

$$\nu\subseteq\mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A\cap\alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu\cup p_\nu)$$

だから、

$$\begin{aligned}\exists x_1<D_\nu\exists x_2<x_1\cdots\exists x_n<x_{n-1}[&\{x_1,\cdots,x_n\}<^*\sigma[p_{\bar\nu}]\\&\wedge\nu\subseteq\mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A\cap\alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu\cup\{x_1,\cdots,x_n\})]\end{aligned}$$

となるので、$((\sigma_{\bar\tau\tau}\restriction\tau)^\frown)^{-1}$でもどせば、

$$\begin{aligned}\exists x_1<D_{\bar\nu}\exists x_2<x_1\cdots\exists x_n<x_{n-1}[&\{x_1,\cdots,x_n\}<^*p_{\bar\nu}\\&\wedge\bar\nu\subseteq\mathcal{M}_{\alpha_{\bar\nu}}[A\cap\alpha_{\bar\nu}]^{D_{\bar\nu}}(\alpha_{\bar\nu}\cup\{x_1,\cdots,x_n\})]\end{aligned}$$

となるが、これは$p_{\bar\nu}$の最小性に反する。従って、$\sigma[p_{\bar\nu}]=p_\nu$である。

これらの claims により、σが$\lhd$の定義の (i)-(vii) までをみたすことがわかる。特に (vi) については、

$$(\sigma\restriction\nu)^\frown:L_{\bar\nu}[A\cap\alpha_{\bar\nu}]\prec L_\nu[A\cap\alpha_\nu]\quad\text{elementary embedding}$$

である。そこで、(viii) を示す。$\xi<D_{\bar\nu}$が十分大きいとし、

$$\bar\pi:\bar\gamma\to\mathcal{M}_{\alpha_{\bar\nu}}[A\cap\alpha_{\bar\nu}]^\xi(\alpha_{\bar\nu}\cup p_{\bar\nu})$$

を collapsing map とする。$\bar{\pi}, \bar{\gamma} \in L_{\bar{\tau}}[A \cap \alpha_{\bar{\nu}}]$に注意しておく。まず、CP により、

$$\bar{\pi} : \mathcal{M}_{\alpha_{\bar{\nu}}}[A \cap \alpha_{\bar{\nu}}]^{\bar{\gamma}} \to \mathcal{M}_{\alpha_{\bar{\nu}}}[A \cap \alpha_{\bar{\nu}}]^{\xi}(\alpha_{\bar{\nu}} \cup p_{\bar{\nu}}) \quad \text{mono}$$

であるから、

$$\bar{\gamma} = \mathcal{M}_{\alpha_{\bar{\nu}}}[A \cap \alpha_{\bar{\nu}}]^{\bar{\gamma}}(\alpha_{\bar{\nu}} \cup \bar{\pi}^{-1}[p_{\bar{\nu}}])$$

である。ところで、もし、$\bar{\nu} \leq \bar{\gamma}$であれば、$D_{\bar{\nu}}$の最小性より、$D_{\bar{\nu}} \leq \bar{\gamma}$とならねばならないが、$\bar{\gamma} \leq \xi < D_{\bar{\nu}}$だから、これは不合理。従って、$\bar{\gamma} < \bar{\nu}$である。

さて、$\pi = (\sigma_{\bar{\tau}\tau} \restriction \bar{\tau})\hat{}(\bar{\pi}), \gamma = (\sigma_{\bar{\tau}\tau} \restriction \bar{\tau})\hat{}(\bar{\gamma}) = \sigma_{\bar{\tau}\tau}(\bar{\gamma}) = \sigma(\bar{\gamma})$ とすると、$(\sigma_{\bar{\tau}\tau} \restriction \bar{\tau})\hat{}$が$\Sigma_1$ elementary embedding なので、$\sigma_{\bar{\tau}\tau}(\xi) = \sigma(\xi)$ に気をつけて、

$$\pi : \gamma \to \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{\sigma(\xi)}(\alpha_\nu \cup p_\nu)$$

が collapsing map になることがわかる。ここで

$$\sigma(\bar{\gamma}) = \gamma$$

であった。また、$p_\nu \subseteq range((\sigma_{\bar{\tau}\tau} \restriction \bar{\tau})\hat{})$ なので、$\pi^{-1}[p_\nu] \subseteq range((\sigma_{\bar{\tau}\tau} \restriction \bar{\tau})\hat{})$ となるが、$\pi^{-1}[p_\nu] \subseteq \gamma < \nu$だから

$$\pi^{-1}[p_\nu] \subseteq range(\sigma)$$

これで (viii)$'$がいえたので、補題 3.20. により、(viii) がいえた。

以上で、$\bar{\nu} \lhd \nu$がわかった。また

$$\pi_{\bar{\nu}\nu} \restriction \bar{\nu} = \sigma_{\bar{\nu}\nu} \restriction \bar{\nu} = \sigma_{\bar{\tau}\tau} \restriction \bar{\nu} = \pi_{\bar{\tau}\tau} \restriction \bar{\nu}$$

となる。

(M3).$\tau \in S_\alpha, \bar{\alpha} < \alpha, \bar{\alpha}$: limit ordinal とし、

$$\{\alpha_\nu | \ \nu \lhd \tau \wedge \alpha_\nu < \bar{\alpha}\} \text{は unbounded in } \bar{\alpha}$$

と仮定する。$\bar{\alpha} \in \{\alpha_\nu | \ \nu \lhd \tau\}$ を証明する。

まず、$P = \{\nu \lhd \tau | \ \alpha_\nu < \bar{\alpha}\}$ とおく。$\eta \in P$に対し、$X_\eta = range(\sigma_{\eta\tau})$ とすると、

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\eta\tau} : \mathcal{M}_{\alpha_\eta}[A \cap \alpha_\eta]^{D_\eta} \to \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\tau} \quad \text{mono} \\
&D_\eta = \mathcal{M}_{\alpha_\eta}[A \cap \alpha_\eta]^{D_\eta}(\alpha_\eta \cup p_\eta) \\
&\sigma_{\eta\tau} \restriction \alpha_\eta = id \\
&\sigma_{\eta\tau}[p_\eta] = p_\tau
\end{aligned}$$

等の性質により、

$X_\eta = \mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^{D_\tau}(\alpha_\eta \cup p_\tau)$

$\alpha, \tau \in X_\eta$

がいえる。そこで

$X = \bigcup\{X_\eta |\ \eta \in P\}$

とする。

Claim.1.$X = \mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^{D_\tau}(\bar\alpha \cup p_\tau)$

証明. まず

(1) $\eta, \eta' \in P, \eta \trianglelefteq \eta' \ \rightarrow\ X_\eta \subseteq X_{\eta'}$

に注意する。$X_\eta = \mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^{D_\tau}(\alpha_\eta \cup p_\tau)$ だからこれは明らかである。また

$$X \subseteq \mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^{D_\tau}(\bar\alpha \cup p_\tau)$$

も、$\alpha_\eta < \bar\alpha$だから明らかである。そこで、逆向きの不等式を証明する。

$$\bar\alpha = sup\{\alpha_\eta |\ \eta \in P\}$$

だから

$$\bar\alpha \cup p_\tau \subseteq X$$

は明らかである。今、Pは $\triangleleft$ によって全順序集合となっており、(1) により、$X_\eta, \eta \in P$は増加列である。さらに、各 X_η $(\eta \in P)$ は $\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^{D_\tau}$ の subalgebra だから、Xも $\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^{D_\tau}$ の subalgebra となる。故に

$$\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^{D_\tau}(\bar\alpha \cup p_\tau) \subseteq X$$

となるので、claim は証明された。

Claim.2.$X \cap \alpha = \bar\alpha$

証明.$x \in X\cap\alpha$とする。$x \in X_\eta = range(\sigma_{\eta\tau})$ となる$\eta \in P$があり、また

$$x = \sigma_{\eta\tau}(\beta), \quad \beta < D_\eta$$

とすることができる。さて、$\sigma_{\eta\tau}(\beta) = x < \alpha = \sigma_{\eta\tau}(\alpha_\eta)$ だから、$\beta < \alpha_\eta$となる。従って、$x = \sigma_{\eta\tau}(\beta) = id(\beta) = \beta < \alpha_\eta < \bar\alpha$となるので、$X\cap\alpha \subseteq \bar\alpha$である。

次に、$x \in \bar\alpha$とすると、$x \in \alpha_\eta$となる$\eta \in P$がとれる。$x = \sigma_{\eta\tau}(x)$ なので、$x \in range(\sigma_{\eta\tau}) = X_\eta \subseteq X$. また、$x < \alpha_\eta$だから、$x = \sigma_{\eta\tau}(x) < \sigma_{\eta\tau}(\alpha_\eta) = \alpha$となるので、$x \in X\cap\alpha$となる。これで、$\bar\alpha \subseteq X\cap\alpha$となる。以上のことから、$X\cap\alpha = \bar\alpha$となることがわかる。

ここで、$\sigma : D \rightarrow X$を Xの collapsing map とする。明らかに$\sigma \restriction \bar\alpha = id$ だが、$\alpha \in X$と claim.2. により、$\sigma^{-1}(\alpha) = \bar\alpha$, 即ち、$\sigma(\bar\alpha) = \alpha$である。また、claim.1. により、$X$は $\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^{D_\tau}$ の subalgebra だから、CP によって

$$\sigma : \mathcal{M}_{\bar\alpha}[A\cap\bar\alpha]^{D} \rightarrow \mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^{D_\tau} \quad \text{mono}$$

となり、従って、再び claim.1. により

$$D = \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^D(\bar{\alpha} \cup p), \quad p = \sigma^{-1}[p_\tau] \subseteq D$$

である。今、$\nu = \sigma^{-1}(\tau)$ とする。$\nu < D$である。

以下では、$\bar{\alpha} = \alpha_\nu, \nu \lhd \tau$を証明する。まず、$\tau \neq \omega_2^{L[A\cap\alpha]}$として良いことに注意しておく。もし、$\tau = \omega_2^{L[A\cap\alpha]}$であれば、$\{\alpha_\eta | \ \eta \lhd \tau\} = \emptyset$ となってしまうからである。(M3) の今までの議論は、実は $\tau \neq \omega_2^{L[A\cap\alpha]}$が仮定されていたことに注意しておく。以下では、$\tau \neq \omega_2^{L[A\cap\alpha]}$である。

Claim.3.$(\sigma \restriction \nu)\hat{} : L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \prec_Q L_\tau[A \cap \alpha]$.

証明. まず、νが J-closed であることに注意する。これは、$\sigma : D \to D_\tau$が strong $\mathcal{P}$-map で、$\tau = \sigma(\nu)$ が J-closed なことからすぐにわかる。このことにより、各 $x \in L_\tau[A \cap \bar{\alpha}]$は

$$x = D^{\bar{\alpha}}_{A\cap\bar{\alpha}}(t), \quad t < \nu, \ t \in Term^{\bar{\alpha}}_\nu$$

と表される。従って、$\sigma : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^D \to \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\tau}$ mono により、

$$(\sigma \restriction \nu)\hat{} : L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \prec_0 L_\tau[A \cap \alpha]$$

がすぐにわかる。これは、Σ_0-formula が、ramified language $\mathcal{R}_U$の formula で表され、しかも、その formula の Gödel number がνより小さいからである。

次に $(\sigma \restriction \nu)\hat{} : L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \prec_1 L_\tau[A \cap \alpha]$をいう。$(\sigma \restriction \nu)\hat{}$を単に$\hat{\sigma}$と書くことにする。$\hat{\sigma}_{\eta\tau}$についても同様である。まず、次のことを示しておく。

(1) $range(\hat{\sigma}) = \bigcup\{range(\hat{\sigma}_{\eta\tau}) | \ \eta \in P\}$

(2) $\eta, \eta' \in P, \ \eta \lhd \eta' \ \to \ range(\hat{\sigma}_{\eta\tau}) \subseteq range(\hat{\sigma}_{\eta'\tau})$

(1) の証明.$\eta \in P$とし、$x \in L_\eta[A \cap \alpha_\eta] = dom(\hat{\sigma}_{\eta\tau}), x = D^{\alpha_\eta}_{A\cap\alpha_\eta}(t), t < \eta$とする。

$$\hat{\sigma}_{\eta\tau}(x) = D^\alpha_{A\cap\alpha}(\sigma_{\eta\tau}(t))$$

であり、$\sigma_{\eta\tau}(t) < \sigma_{\eta\tau}(\eta) = \tau$である。今、$s < D$を、$\sigma(s) = \sigma_{\eta\tau}(t)$ なるものとすると、$s < \sigma^{-1}(\tau) = \nu$であり、$D^{\bar{\alpha}}_{A\cap\bar{\alpha}}(s) \in L_\nu[A \cap \bar{\alpha}]$である。さらに

$$\hat{\sigma}_{\eta\tau}(x) = D^\alpha_{A\cap\alpha}(\sigma_{\eta\tau}(t)) = D^\alpha_{A\cap\alpha}(\sigma(s)) = \hat{\sigma}(D^{\bar{\alpha}}_{A\cap\bar{\alpha}}(s))$$

だから、$\supseteq$がいえる。

逆に $x \in L_\nu[A \cap \bar{\alpha}]$とし、$x = D^{\bar{\alpha}}_{A\cap\bar{\alpha}}(t)$ なる $t < \nu$をとる。すると

$$\hat{\sigma}(x) = D^\alpha_{A\cap\alpha}(\sigma(t)), \quad \sigma(t) < \sigma(\nu) = \tau$$

そこで、$\sigma(t) \in X_\eta$なる$\eta \in P$をとり、$s = \sigma^{-1}_{\eta\tau} \circ \sigma(t)$ とすると、$s < \sigma^{-1}_{\eta\tau}(\tau) = \eta$であり、

$$\hat{\sigma}(x) = D^\alpha_{A\cap\alpha}(\sigma(t)) = D^\alpha_{A\cap\alpha}(\sigma_{\eta\tau}(s)) = \hat{\sigma}_{\eta\tau}(D^{\alpha_\eta}_{A\cap\alpha_\eta}(s))$$

となるので、$\subseteq$もいえた。これで、(1) はいえた。

(2) の証明.$x \in L_\eta[A \cap \alpha_\eta]$とし、$x = D^{\alpha_\eta}_{A\cap\alpha_\eta}(t), t < \eta$とすると、

$$\hat{\sigma}_{\eta\tau}(x) = D^{\alpha}_{A\cap\alpha}(\sigma_{\eta\tau}(t)), \quad \sigma_{\eta\tau}(t) < \tau$$

である。ここで、claim.1. の証明中の (1) により、$\sigma_{\eta\tau} \in X_\eta \subseteq X_{\eta'}$なので、$\sigma_{\eta\tau}(t) = \sigma_{\eta'\tau}(s)$ となる $s < \eta'$がとれる。従って

$$\hat{\sigma}_{\eta\tau}(x) = D^{\alpha}_{A\cap\alpha}(\sigma_{\eta\tau}(t)) = D^{\alpha}_{A\cap\alpha}(\sigma_{\eta'\tau}(s)) = \hat{\sigma}_{\eta'\tau}(D^{\alpha_{\eta'}}_{A\cap\alpha_{\eta'}}(s))$$

となるので、$\hat{\sigma}_{\eta\tau}(x) \in range(\hat{\sigma}_{\eta'\tau})$. これで (2) はいえた。

さて、$\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ をΣ_0-formula とし、$\vec{a} \in L_\nu[A \cap \bar{\alpha}]$とする。

$$L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \models \exists\vec{y}\varphi(\vec{a}, \vec{y}) \text{ ならば } L_\tau[A \cap \alpha] \models \exists\vec{y}\varphi(\hat{\sigma}(\vec{a}), \vec{y})$$

は容易だから、逆を示す。$L_\tau[A \cap \alpha] \models \exists\vec{y}\varphi(\hat{\sigma}(\vec{a}), \vec{y})$ と仮定する。今、(1),(2) により、$\hat{\sigma}(\vec{a}) = \hat{\sigma}_{\eta\tau}(\vec{b})$ となる$\eta \in P$, $\vec{b} \in L_\eta[A \cap \alpha_\eta]$が存在する。すると、

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \exists\vec{y}\varphi(\hat{\sigma}_{\eta\tau}(\vec{b}), \vec{y})$$

だから、

$$L_\eta[A \cap \alpha_\eta] \models \exists\vec{y}\varphi(\vec{b}, \vec{y})$$

そこで、$\vec{y} \in L_\eta[A \cap \alpha_\eta]$, $L_\eta[A \cap \alpha_\eta] \models \varphi(\vec{b}, \vec{y})$ なる$\vec{y}$をとり、$\hat{\sigma}_{\eta\tau}$でうつせば

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \varphi(\hat{\sigma}_{\eta\tau}(\vec{b}), \hat{\sigma}_{\eta\tau}(\vec{y})).$$

ここで、$\hat{\sigma}_{\eta\tau}(\vec{y}) \in range(\sigma)$ だから、$\sigma(\vec{z}) = \hat{\sigma}_{\eta\tau}(\vec{y})$ なる$\vec{z} \in L_\nu[A \cap \bar{\alpha}]$が存在する。すると、

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \varphi\hat{\sigma}(\vec{a}), \hat{\sigma}(\vec{z}))$$

となるから、φ がΣ_0なことから

$$L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \models \varphi(\vec{a}, \vec{z}).$$

となるので

$$L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \models \exists\vec{y}\varphi(\vec{a}, \vec{y})$$

となる。

最後に、$\hat{\sigma} : L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \prec_Q L_\tau[A \cap \alpha]$をいう。$\varphi(y, \vec{x})$ をΣ_1-formula とし、$\vec{a} \in L_\nu[A \cap \bar{\alpha}]$とする。まず

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \forall\beta\exists\gamma > \beta\varphi(\gamma, \hat{\sigma}(\vec{a}))$$

と仮定する。$\beta < \nu$を任意にとると、$\hat{\sigma}(\beta) = \sigma(\beta) < \sigma(\nu) = \tau$だから、

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \exists\gamma > \hat{\sigma}(\beta)\varphi(\gamma, \hat{\sigma}(\vec{a}))$$

よって、$\hat{\sigma} : L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \prec_1 L_\tau[A \cap \alpha]$により、

$$L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \models \exists\gamma > \beta\varphi(\gamma, \vec{a})$$

となるので、$L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \models \forall\beta\exists\gamma > \beta\varphi(\gamma, \vec{a})$ となる。逆に

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \neg\forall\beta\exists\gamma > \beta\varphi(\gamma, \hat{\sigma}(\vec{a}))$$

とする。$\hat{\sigma}(\vec{a}) = \hat{\sigma}_{\eta\tau}(\vec{b})$ となる$\eta \in P, \vec{b} \in L_\eta[A \cap \alpha_\eta]$をとると、

$$\hat{\sigma}_{\eta\tau} : L_\eta[A \cap \alpha_\eta] \prec_Q L_\tau[A \cap \alpha]$$

により、$L_\eta[A \cap \alpha_\eta] \models \neg\forall\beta\exists\gamma > \beta\varphi(\gamma, \vec{b})$, 即ち、

$$L_\eta[A \cap \alpha_\eta] \models \exists\beta\neg\exists\gamma > \beta\varphi(\gamma, \vec{b})$$

そこで、このような$\beta \in L_\eta[A \cap \alpha_\eta]$を固定する。$\hat{\sigma}_{\eta\tau}$でうつせば

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \neg\exists\gamma > \hat{\sigma}_{\eta\tau}(\beta)\varphi(\gamma, \hat{\sigma}(\vec{a}))$$

となる。$\hat{\sigma}_{\eta\tau}(\beta) \in range(\hat{\sigma})$ だから、$\beta' = \hat{\sigma}^{-1} \circ \hat{\sigma}_{\eta\tau}(\beta)$ とすると、$\beta' < \nu$であり、

$$L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \models \neg\exists\gamma > \beta'\varphi(\gamma, \vec{a})$$

故に、$L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \models \exists\beta\neg\exists\gamma > \beta\varphi(\gamma, \vec{a})$, 即ち、

$$L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \models \neg\forall\beta\exists\gamma > \beta\varphi(\gamma, \vec{a})$$

となる。これで、claim は証明された。

Claim.4.$(\sigma \restriction \nu)^\frown(A \cap \bar{\alpha}) = A \cap \alpha$.

証明.$A \cap \bar{\alpha}$を表す$\mathrm{term}^{\bar{\alpha}}$は、$t = \hat{x}\,{}^{\alpha}U(x)$ であり、$\sigma(t) = \hat{x}\,{}^{\alpha}U(x)$ だから、

$$(\sigma \restriction \nu)^\frown(A \cap \bar{\alpha}) = D^{\alpha}_{A\cap\alpha}(\hat{x}\,{}^{\alpha}U(x)) = A \cap \alpha$$

Claim.5.$\nu \in S_{\bar{\alpha}}$ 即ち、$\bar{\alpha} = \alpha_\nu$.
証明.$(\bar{\alpha}, \nu) \in \bar{S}$をいう。そのためには、

$$\forall \beta < \nu \exists \gamma < \nu (\beta < \gamma \land L_\gamma[A \cap \bar{\alpha}] \text{は admissible}) \tag{1}$$

$$L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \models \text{“}\forall \beta < \bar{\alpha} \exists f (f : \omega \to \beta \text{ onto}) \land \bar{\alpha} \text{は regular} \land \bar{\alpha} \text{は最大の cardinal”} \tag{2}$$

をいえば良い。まず、(1) をいう。$(\alpha, \tau) \in \bar{S}$だから、

$$\forall \beta < \tau \exists \gamma < \tau (\beta < \gamma \land L_\gamma[A \cap \alpha] \text{は admissible})$$

であるが、これは

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \forall \beta \exists \gamma > \beta \exists x (x = L_\gamma[A \cap \alpha] \land Adm(x))$$

とも書ける。claim3 と 4 により、$((\sigma \restriction \nu)\hat{})^{-1}$でもどせば

$$L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \models \forall \beta \exists \gamma > \beta \exists x (x = L_\gamma[A \cap \bar{\alpha}] \land Adm(x))$$

となり、これで (1) はいえた。(2) も容易にできる。(2) は $(\sigma \restriction \nu)\hat{}$が$\Sigma_1$ elementary であることで十分である。尚、$(\sigma \restriction \nu)\hat{}(\bar{\alpha}) = \sigma(\bar{\alpha}) = \alpha$ (claim2 の直後) にも注意する。
Claim.6.$\nu \neq \omega_2^{L[A \cap \bar{\alpha}]}$
証明. まず、claim.5. により、$\nu \in S_{\bar{\alpha}}$だから、補題 3.5. により、

$$\bar{\alpha} < \nu \leq \omega_2^{L[A \cap \bar{\alpha}]}$$

従って、$L[A \cap \bar{\alpha}] \models |\bar{\alpha}| \leq \omega_1^{L[A \cap \bar{\alpha}]}$である。$\nu < D = \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^D(\bar{\alpha} \cup p)$ であったが、machine の概念は $L[A \cap \bar{\alpha}]$の中でも変わらないので、

$$L[A \cap \bar{\alpha}] \models \nu \subseteq \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^D(\bar{\alpha} \cup p)$$

となる。従って、$L[A \cap \bar{\alpha}] \models |\nu| = |\bar{\alpha}|$ となるので、$\nu < \omega_2^{L[A \cap \bar{\alpha}]}$.
このclaim によって、D_ν, p_νが定義されることがわかる。実は

$$D = D_\nu,\ p = p_\nu$$

である。これを示すために、次のことを証明する。
Claim.7.$\sigma : (D, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \prec_{\exists_x \text{prop.}} (D_\tau, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$
証明. 最初に、$(D, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \prec_{\text{atomic}} (D_\tau, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$ をいっておく。

$\sigma : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A\cap\bar{\alpha}]^D \to \mathcal{M}_{\alpha}[A\cap\alpha]^{D_\tau}$ mono であったから、$\mathcal{M}$ の atomic formula のうちで問題になるのは、$x \in M^y(\Box \cup \{z_1, \cdots, x_n\})$ のみである。まず

$$(D, \bar{\alpha}, A\cap\bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models x \in M^y(\Box \cup \{z_1, \cdots, z_n\})$$

とすると、σが monomorphism だから、$\sigma(\bar{\alpha}) = \alpha$に気をつけて

$$(D_\tau, \alpha, A\cap\alpha, \alpha) \models \sigma(x) \in M^{\sigma(y)}(\Box \cup \{\sigma(z_1), \cdots, \sigma(z_n)\})$$

となる。逆に

$$(D_\tau, \alpha, A\cap\alpha, \alpha) \models \sigma(x) \in M^{\sigma(y)}(\Box \cup \{\sigma(z)\})$$

と仮定する。簡単のために、$n=1$ のときを考える。$\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z) \in X_\eta$となる$\eta \in P$をとり、

$$x' = \sigma_{\eta\tau}^{-1} \circ \sigma(x),\ y' = \sigma_{\eta\tau}^{-1} \circ \sigma(y),\ z' = \sigma_{\eta\tau}^{-1} \circ \sigma(z)$$

とおけば、

$$(D_\eta, \alpha_\eta, A\cap\alpha_\eta, \alpha_\eta) \models x' \in M^{y'}(\Box \cup \{z'\}).$$

故に、

$$x' = \tilde{F}^{y'}(\vec{\beta}, z'),\ \vec{\beta} < \alpha_\eta,\ \tilde{F}\text{は}\mathcal{M}_{\alpha_\eta}[A\cap\alpha_\eta]\text{の関数の合成}$$

と書くことができる。故に、monomorphism $\sigma_{\eta\tau}$でうつせば

$$\sigma(x) = F^{\sigma(y)}(\vec{\beta}, \sigma(z)),\ \vec{\beta} < \alpha_\eta,\ F\text{は}\mathcal{M}_{\alpha}[A\cap\alpha]\text{の関数の合成で}\tilde{F}\text{に対応するもの}$$

とできる。再び、σが monomorhpism だから、$\vec{\beta} = \sigma(\vec{\beta})$ に注意して

$$x = \bar{F}^y(\vec{\beta}, z),\ \vec{\beta} < \alpha_\eta \le \bar{\alpha},\ \bar{F}\text{は}\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A\cap\bar{\alpha}]\text{の関数の合成で}F\text{に対応するもの}$$

と書けるので、$x \in \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A\cap\bar{\alpha}]^y(\bar{\alpha} \cup \{z\})$ となり、

$$(D, \bar{\alpha}, A\cap\bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models x \in M^y(\Box \cup \{z\})$$

を得る。これで、$\sigma : (D, \bar{\alpha}, A\cap\bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \prec_{\text{atomic}} (D_\tau, \alpha, A\cap\alpha, \alpha)$ はいえ、従って

$$\sigma : (D, \bar{\alpha}, A\cap\bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \prec_{\text{prop.}} (D_\tau, \alpha, A\cap\alpha, \alpha)$$

もわかった。よって、prop.formula $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ に対し、$(D, \bar{\alpha}, A\cap\bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models \exists\vec{x}\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ であれば、容易に、$(D_\tau, \alpha, A\cap\alpha, \alpha) \models \exists\vec{x}\varphi(\vec{x}, \sigma(\vec{y}))$ がわかる。そこで

$$(D_\tau, \alpha, A\cap\alpha, \alpha) \models \exists\vec{x}\varphi(\vec{x}, \sigma(\vec{y}))$$

とする。$\sigma(\vec{y}) \in X_\eta$なる$\eta \in P$をとり、$\sigma(\vec{y}) = \sigma_{\eta\tau}(\vec{z})$, $\vec{z} < D_\eta$とすると、

$$(D_\eta, \alpha_\eta, A \cap \alpha_\eta, \alpha_\eta) \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, \vec{z}).$$

よって、$\vec{x} < D_\eta$, $(D_\eta, \alpha_\eta, A \cap \alpha_\eta, \alpha_\eta) \models \varphi(\vec{x}, \vec{z})$ をみたす$\vec{x}$をとれば

$$(D_\tau, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \varphi(\sigma_{\eta\tau}(\vec{x}), \sigma(\vec{y}))$$

となる。$\sigma_{\eta\tau}(\vec{x}) \in X = range(\sigma)$ だから、$\vec{x}' = \sigma^{-1} \circ \sigma_{\eta\tau}(\vec{x})$ とすると

$$(D, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models \varphi(\vec{x}', \vec{y})$$

となるので、$(D, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, \vec{y})$ である。

これで、$D = D_\nu$, $p = p_\nu$の証明ができる。

Claim.8.$D = D_\nu$, $p = p_\nu$

証明. まず、$D = D_\nu$を示す。$D = \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^D(\alpha_\nu \cup p), \nu < D$ (claim.2. の後に書いたことと、claim.5.) であった。D_νの最小性から、$D_\nu \leq D$である。今、$D_\nu < D$と仮定する。すると、$\nu \subseteq \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu)$ だから、

$$(D, \alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu, \alpha_\nu) \models \forall x (x < \nu \to x \in M^{D_\nu}(\Box \cup \{p_\nu^1, \cdots, p_\nu^n\}))$$

ここで、$p_\nu = \{p_\nu^1, \cdots, p_\nu^n\}$ とおいた。従って、claim.7. により、σでうつせば、

$$(D_\tau, \alpha_\tau, A \cap \alpha_\tau, \alpha_\tau) \models \forall x (x < \tau \to x \in M^{\sigma(D_\nu)}(\Box \cup \{\sigma(p_\nu^1), \cdots, \sigma(p_\nu^n)\}))$$

となる。即ち、

$$\tau \subseteq \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{\sigma(D_\nu)}(\alpha_\tau \cup \sigma[p_\nu])$$

であるが、$\sigma(D_\nu) < D_\tau$だから、これはD_τの最小性に反する。故に、$D_\nu = D$.

次に、$p = p_\nu$を示す。$D = D_\nu$なので、$D_\nu = \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p)$. 従って、$p_\nu$の最小性により、$p_\nu \leq^* p$ である。今、$p_\nu <^* p$ とし、$p = \{p_1, \cdots, p_n\}$ とおくと、$p_1, \cdots, p_n \in D_\nu = \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu)$ だから、

$$\sigma(p_1), \cdots, \sigma(p_n) \in \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{D_\tau}(\alpha_\tau \cup \sigma[p_\nu])$$

さて、$p = \sigma^{-1}[p_\tau]$だったから、これは

$$p_\tau \subseteq \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{D_\tau}(\alpha_\tau \cup \sigma[p_\nu])$$

を意味する。従って、

$$D_\tau = \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{D_\tau}(\alpha_\tau \cup p_\tau) = \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{D_\tau}(\alpha_\tau \cup \sigma[p_\nu])$$

を得る。しかし、$p_\nu <^* p$ により、$\sigma[p_\nu] <^* \sigma[p] = p_\tau$だから、これは p_τの最小性に反する。故に、$p_\nu = p$ となる。

以上の claims によって、$\nu \lhd \tau$のσに関する条件の (i)-(vii) がみたされることがわかる。(viii) をいうために、$\xi < D_\nu$が十分大きいとし、

$$\bar{\pi} : \bar{\gamma} \to \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{\xi}(\alpha_\nu \cup p_\nu)$$
$$\pi : \gamma \to \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{\sigma(\xi)}(\alpha_\tau \cup p_\tau)$$

を collapsing map とする。補題 3.20. により、
(1) $\gamma \in range(\sigma), \quad \pi^{-1}[p_\tau] \subseteq (\sigma)$
をいえば良い。まず、$\sigma(\xi) \in X_\eta$となる$\eta \in P$をとり、$\sigma(\xi) = \sigma_{\eta\tau}(\xi')$ とする。すると、$\xi' < D_\eta$が十分大きいことがわかるので

$$\pi' : \gamma' \to \mathcal{M}_{\alpha_\eta}[A \cap \alpha_\eta]^{\xi'}(\alpha_\eta \cup p_\eta)$$

を collapsing map とすると、$\eta \lhd \tau$により、

$$\sigma_{\eta\tau}(\gamma') = \gamma, \quad \sigma_{\eta\tau} \circ \pi'^{-1}[p_\eta] = \pi^{-1}[p_\tau]$$

だが、$range(\sigma_{\eta\tau}) = X_\eta \subseteq X = range(\sigma)$ なので (1) は明らか。これで、$\bar{\alpha} = \alpha_\nu$, $\nu \lhd \tau$が示され、(M3) の証明は終った。

(M4).$\tau \in S_\alpha$が S_αの極大元でないとする。従って、$\lambda \in S_\alpha, \tau < \lambda$となる$\lambda$がある。$D_\tau < \lambda$だから、

$$D_\tau < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda,\ L_{\lambda_1}[A \cap \alpha], L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]\text{は共に admissible}$$

となるλ_1, λ_2を固定しておく。

$\theta < \alpha$とする。次のような $Y \in L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$を作ることが目的である:

$$\begin{cases} Y \prec L_{\lambda_1}[A \cap \alpha]. \\ Y \cap \alpha\text{は順序数で、}\theta \le Y \cap \alpha < \alpha. \\ \alpha, A \cap \alpha, \tau, D_\tau, p_\tau \in Y. \end{cases}$$

まず、$L_{\lambda_1}[A \cap \alpha]$の標準的な整列順序$<_L$を固定しておく。すると、$<_L \in L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$である。以下、$L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$の中で話を進める。

$Y_n, \beta_n\ (n < \omega)$ を次のように定める:まず、
$Y_0 = \theta \cup \{\alpha, A \cap \alpha, \tau, D_\tau, p_\tau\}$
$\beta_0 = sup(Y_0 \cap \alpha)$
とし、
$Y_{n+1} = Y_n \cup \beta_n \cup \{x \in L_{\lambda_1}[A \cap \alpha] |\ x\text{ は}\cdots\}$
$\beta_{n+1} = sup(Y_{n+1} \cap \alpha)$
とする。Y_{n+1}の定義式における“x は$\cdots$”は、次のものである:

集合論言語$\mathcal{L}$のあるformula $\varphi(\mathrm{v}_1,\cdots,\mathrm{v}_k,\mathrm{v}_{k+1})$と$a_1,\cdots,a_k\in Y_n\cup\beta_n$に対して、
$x=min_{<_L}\{y\in L_{\lambda_1}[A\cap\alpha]|\ L_{\lambda_1}[A\cap\alpha]\models\varphi(a_1,\cdots,a_k,y)\}$
すると、$n<\omega$に対して、

$$\beta_n,Y_n\subseteq Y_{n+1},\quad 及び,\beta_n\leq\beta_{n+1}\leq\alpha<\lambda_1$$

である。また、列$\langle Y_n|\ n<\omega\rangle$と$\langle\beta_n|\ n<\omega\rangle$は、共に$\Sigma_1^{L_{\lambda_2}[A\cap\alpha]}$である。
さて、$Y=\bigcup\{Y_n|\ n<\omega\}$とおくと、$Y\prec L_{\lambda_1}[A\cap\alpha]$. また、

$$\theta,\alpha,A\cap\alpha,\tau,D_\tau,p_\tau\in Y_0\subseteq Y$$

である。さらに、$\bar{\alpha}=sup\{\beta_n|\ n<\omega\}$とすると、

$$Y\cap\alpha=\bigcup_{n<\omega}(Y_{n+1}\cap\alpha)\supseteq\bigcup_{n<\omega}\beta_n=\bar{\alpha}$$

であり、

$$Y\cap\alpha=\bigcup_{n<\omega}(Y_n\cap\alpha)\subseteq\bigcup_{n<\omega}\beta_{n+1}=\bar{\alpha}$$

だから、$Y\cap\alpha=\bar{\alpha}$である。$\bar{\alpha}<\alpha$を示す。
Claim. 各$n<\omega$に対して、$L_{\lambda_2}[A\cap\alpha]\models|Y_n|<\alpha\wedge\beta_n<\alpha$.
証明.$\lambda\in S_\alpha$, $\lambda_2<\lambda$により、
(1) $L_{\lambda_2}[A\cap\alpha]\models\alpha>\omega\wedge\alpha$はregular cardinal
であることに注意する。nについての帰納法で、claimを示す。まず、$n=0$のときは明らかである。そこで、
$L_{\lambda_2}[A\cap\alpha]\models|Y_n|<\alpha\wedge\beta_n<\alpha$
と仮定する。このとき、Y_{n+1}の定義と、(1)により、
$L_{\lambda_2}[A\cap\alpha]\models|Y_{n+1}|<\alpha.$
また、このことから、$L_{\lambda_2}[A\cap\alpha]\models|Y_{n+1}\cap\alpha|<\alpha$なので、再び(1)により、
$L_{\lambda_2}[A\cap\alpha]\models\beta_{n+1}<\alpha$
である。
このclaim及び、claimの証明中の(1)によって、$L_{\lambda_2}[A\cap\alpha]\models\bar{\alpha}<\alpha$, 即ち、$\bar{\alpha}<\alpha$がわかる。
そこで、$\pi^{-1}:Y\cong L_\beta[B]$, $B=\pi^{-1}[Y\cap A\cap\alpha]$とする。まず、$Y\cap\alpha=\bar{\alpha}$だから、$\pi^{-1}\restriction\bar{\alpha}=id$.
従って、

$$B=\pi^{-1}[Y\cap A\cap\alpha]=\pi^{-1}[A\cap\bar{\alpha}]=A\cap\bar{\alpha}$$

となるので、

$$\pi:L_\beta[A\cap\bar{\alpha}]\cong Y\prec L_{\lambda_1}[A\cap\alpha]$$

である。また、$\pi(\bar{\alpha})=\alpha$でもある。今、$\nu=\pi^{-1}(\tau)$とする。$\bar{\alpha}=\alpha_\nu,\nu\lhd\tau$を証明すれば、

$$\theta\leq\alpha_\nu,\quad\alpha_\nu\in\{\alpha_\eta|\ \eta\lhd\tau\}$$

なので、(M4) はいえたことになる。その証明は殆ど (M3) と同じであるので省略する。唯、πが elementary embedding であるので、次のことがいえている:

$x = \pi^{-1}(A \cap \alpha)$ とすると、$x = A \cap \bar{\alpha}$. 従って、$\pi(A \cap \bar{\alpha}) = A \cap \alpha$.

$\pi(L_\nu[A \cap \bar{\alpha}]) = L_\tau[A \cap \alpha]$

$(\pi \restriction \nu)\hat{} = \pi \restriction L_\nu[A \cap \bar{\alpha}]$

これらのことにより、$D_\nu = \pi^{-1}(D_\tau), p_\nu = \pi^{-1}(p_\tau)$ 等もわかる。さらに、

$$\sigma_{\nu\tau} = \pi \restriction D_\nu$$

である。このようなことから、$\bar{\alpha} = \alpha_\nu, \nu \lhd \tau$が証明できるわけである。尚、$\pi$が elementary embedding なので、その証明は、(M3) よりも簡単になる。

最後に、Yの作り方が$\Sigma_1^{L_{\lambda_2}[A\cap\alpha]}$であることに注意しておく。このことは、次の節で用いることになる。

(M5). $\{\alpha_\nu |\ \nu \lhd \tau\}$ が unbounded in α_τであるとする。$\nu \lhd \tau$に対して、$\pi_{\nu\tau} = \sigma_{\nu\tau} \restriction (\nu + 1)$ であったから、$\pi_{\nu\tau}``\nu = \sigma_{\nu\tau}``\nu$. さて、(M3) の証明の最初に書いたように、

$$range(\sigma_{\nu\tau}) = \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{D_\tau}(\alpha_\nu \cup p_\tau)$$

であり、$\sigma_{\nu\tau}$が順序保存であることと、$\sigma_{\nu\tau}(\nu) = \tau$とを併せれば、

$$\pi_{\nu\tau}``\nu = \tau \cap \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{D_\tau}(\alpha_\nu \cup p_\tau)$$

である。よって、$\alpha_\tau = sup\{\alpha_\nu |\ \nu \lhd \tau\}$ により、

$$\tau = \bigcup\{\pi_{\nu\tau}``\nu |\ \nu \lhd \tau\}$$

は容易にわかる。

(M6). $\bar{\nu}$が S_{α_ν}の limit point であるとし、$\bar{\nu} \lhd \nu$とする。さらに、

$$\nu' = sup(\sigma_{\bar{\nu}\nu}``\bar{\nu})$$

とする。$\bar{\alpha} = \alpha_{\bar{\nu}},\ \alpha = \alpha_\nu$としておく。$\bar{\alpha} < \alpha$である。このとき、

$$\bar{\nu} \lhd \nu', \quad \pi_{\bar{\nu}\nu'} \restriction \bar{\nu} = \pi_{\bar{\nu}\nu} \restriction \bar{\nu}$$

をいう。まず、$\nu' \leq \nu$は明らかである。もし、$\nu' = \nu$ならば問題はないので、$\nu' < \nu$のときを考える。$\nu' = sup\{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau}) |\ \bar{\tau} \in S_{\bar{\alpha}} \cap \bar{\nu}\}$ であるから、(M1), 及び (M0) の (a) により、

$$\nu' \in S_\alpha$$

である。今、$\eta = sup(\sigma_{\bar{\nu}\nu}``D_{\bar{\nu}})$ とおくと、明らかに$\eta \leq D_\nu$である。また、補題 3.11. により、$D_{\bar{\nu}}$が limit ordinal なので、

ηは limit ordinal

$p_\nu = \sigma_{\bar{\nu}\nu}[p_{\bar{\nu}}] \subseteq \eta$

である。また、$\sigma_{\bar{\nu}\nu} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{D_{\bar{\nu}}} \to \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}$ mono であるから、

$$\sigma_{\bar{\nu}\nu} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{D_{\bar{\nu}}} \to \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\eta \quad \text{mono}$$

である。(I. 補題 1.6.)

Claim.1.$\sigma_{\bar{\nu}\nu} : (D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \prec_{\exists_{\vec{x}}\text{prop.}} (\eta, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$.

証明. まず、$\sigma_{\bar{\nu}\nu}$の定義によって、

$$\sigma_{\bar{\nu}\nu} : (D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \prec_{\exists_{\vec{x}}\text{prop.}} (D_\nu, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$$

であることに注意する。従って、$\alpha \subseteq \eta \subseteq D_\nu$だから、補題 2.9. により、

$$\sigma_{\bar{\nu}\nu} : (D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \prec_{\text{prop.}} (\eta, \alpha, A \cap \alpha, \alpha).$$

今、$\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ を prop.formula とし、$\vec{a} \in D_{\bar{\nu}}$とする。$\sigma_{\bar{\nu}\nu}$を単に$\sigma$と書くと、

$$(D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models \exists\vec{y}\varphi(\vec{a}, \vec{y}) \text{ ならば } (\eta, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists\vec{y}\varphi(\sigma(\vec{a}), \vec{y})$$

は容易にわかる。そこで逆を証明するために、

$$(\eta, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists\vec{y}\varphi(\sigma(\vec{a}), \vec{y})$$

とする。すると、$\eta \subseteq D_\nu$なので、補題 2.9. によって

$$(D_\nu, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists\vec{y}\varphi(\sigma(\vec{a}), \vec{y})$$

であるから、σ^{-1}でもどせば、

$$(D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models \exists\vec{y}\varphi(\vec{a}, \vec{y}).$$

これで、claim は証明された。

さて、ここで、$X = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\eta(\alpha \cup p_\nu)$ とする。すると、次のことがいえる。

Claim.2.$range(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) \subseteq X$.

証明.$\xi \in D_{\bar{\nu}} = \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{D_{\bar{\nu}}}(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}})$ とすると、$D_{\bar{\nu}}$は limit ordinal なので、

$$\xi \in \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^\zeta(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}})$$

となる$\zeta < D_{\bar{\nu}}$がとれる。すると、

$$\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi) \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\zeta)}(\bar{\alpha} \cup p_\nu) \subseteq X$$

となるので、これで、claim は証明された。

Claim.3.$X \cap \nu = \nu'$.

証明.$x \in X \cap \nu$とする。すると、ある$\vec{\beta} < \alpha$をとり、

$$x = F^\eta(\vec{\beta}, \vec{p}_\nu), \quad F\text{は}\mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]\text{の関数の合成}$$

とできる。尚、$\vec{p}_\nu$はp_νの元の列を表す。ηは limit ordinal だから、$\tau < \eta$を十分大きくとって、

$$x = F^\tau(\vec{\beta}, \vec{p}_\nu)$$

とできる。さらに、$\eta = sup(\sigma_{\bar{\nu}\nu}“D_{\bar{\nu}})$なので、$\tau \in range(\sigma_{\bar{\nu}\nu})$としても良い。$\bar{\tau} < D_{\bar{\nu}}$を、$\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau}) = \tau$となるようにとっておく。また、$\bar{\tau} < D_{\bar{\nu}}$は十分大きいものとしておく。即ち、

$$p_{\bar{\nu}} \subseteq \bar{\tau} \ \&\ \bar{\alpha} \in \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\tau}}(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}})$$

をみたしている。そこで

$$\bar{\theta} = sup[\bar{\nu} \cap \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\tau}}(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}})]$$

とすると、$\bar{\tau} < D_{\bar{\nu}}$なので、$D_{\bar{\nu}}$の最小性から、$\bar{\theta} < \bar{\nu}$であり、

$$(D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models \forall x(x < \bar{\nu} \wedge x \in M^{\bar{\tau}}(\Box \cup \{p^1_{\bar{\nu}}, \cdots, p^n_{\bar{\nu}}\}) \to x \leq \bar{\theta})$$

よって、$\theta = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\theta})$とすれば、$\theta < \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\nu}) = \nu$であり、

$$(D_\nu, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \forall x(x < \nu \wedge x \in M^\tau(\Box \cup \{p^1_\nu, \cdots, p^n_\nu\}) \to x \leq \theta)$$

となる。今、$x = F^\tau(\vec{\beta}, \vec{p}_\nu) \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\tau(\alpha \cup p_\nu)$, $x < \nu$であったから、

$$x \leq \theta = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\theta}) < sup(\sigma_{\bar{\nu}\nu}“\bar{\nu}) = \nu'$$

これで、$X \cap \nu \subseteq \nu'$がわかる。

逆に、$\xi \in \nu'$とする。$\bar{\delta} < \bar{\nu}$をとり、$\xi < \delta = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\delta})$とすることができる。$\bar{\delta} < \bar{\nu}$だから、$\bar{f} \in L_{\bar{\nu}}[A \cap \bar{\alpha}]$, $\bar{f} : \bar{\alpha} \to \bar{\delta}$ onto となる$\bar{f}$がある。そこで、$\bar{t} < \bar{\nu}$を、$D^{\bar{\alpha}}_{A \cap \bar{\alpha}}(\bar{t}) = \bar{f}$なる term$^{\bar{\alpha}}$とし、$t = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{t})$とする。すると、

$$f = D^\alpha_{A \cap \alpha}(t) = (\sigma_{\bar{\nu}\nu} \restriction \bar{\nu})^\frown(\bar{f})$$

だから、$f:\alpha \to \delta$ onto である。よって、$\xi = f(\beta)$ となる$\beta < \alpha$が存在する。また、$t \in range(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) \subseteq X$である。従って、補題 3.9. と同様にして、$K(\langle \exists_x^\delta\, x = t(o_\beta)\rangle)$ と C_iの組合せで、$\xi \in X$となる。もちろん、$\xi < \nu' < \nu$なので、$\xi \in X \cap \nu$となり、$\nu' \subseteq X \cap \nu$を得る。

このclaimにより、$\alpha \in \nu' \subseteq X$がわかる。そこで、

$$\pi_1 : D \to X \quad \text{collapsing map}$$

とする。すると、claim.3. により、$\pi_1 \restriction \nu' = id$ である。また、$\nu \in range(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) \subseteq X$なので、$\pi_1^{-1}(\nu) = \nu'$, i.e., $\pi_1(\nu') = \nu$となっている。また、CP により、

(1) $\pi_1 : \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^D \to \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\eta$ mono

であり、従って、

(2) $D = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha](\alpha \cup q), \quad q = \pi_1^{-1}[p_\nu].$

である。また、

(3) $\pi_1 : (D, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \prec_{\text{prop.}} (\eta, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$

であることはすぐわかる。

さらに、$\sigma = \pi_1^{-1} \circ \sigma_{\bar{\nu}\nu}$とする。claim.2. により、これは定義できることに注意する。すると、$\sigma : D_{\bar{\nu}} \to D$であり、$\sigma \restriction \bar{\alpha} = id,\ \sigma(\bar{\alpha}) = \alpha,\ \sigma(\bar{\nu}) = \nu'$がいえる。また、

$$\sigma_{\bar{\nu}\nu} \restriction \bar{\nu} = \sigma \restriction \bar{\nu}$$

である。なぜならば、$\xi < \bar{\nu}$に対しては、$\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi) \in X \cap \nu = \nu'$だから、

$$\sigma(\xi) = \pi_1^{-1} \circ \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi) = id^{-1} \circ \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi) = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)$$

となるからである。このことにより、

(4) $(\sigma \restriction \bar{\nu})^\wedge = (\sigma_{\bar{\nu}\nu} \restriction \bar{\nu})^\wedge$

であり、また、$(\sigma_{\bar{\nu}\nu} \restriction \bar{\nu})^\wedge : L_{\bar{\nu}}[A \cap \bar{\alpha}] \prec_0 L_{\nu'}[A \cap \alpha]$, cofinal なので

(5) $(\sigma \restriction \bar{\nu})^\wedge : L_{\bar{\nu}}[A \cap \bar{\alpha}] \prec_Q L_{\nu'}[A \cap \alpha]$

である。

Claim.4.$\sigma : (D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \prec_{\exists_{\vec{x}}\text{prop.}} (D, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$.

証明.Claim.1. と (3) を用いれば、prop.formula $\varphi(\vec{x})$ と$\vec{a} < D_{\bar{\nu}}$に対して、

$$\begin{aligned}(D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models \varphi(\vec{a}) &\text{ iff } (\eta, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \varphi(\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\vec{a})) \\ &\text{ iff } (D, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \varphi(\sigma(\vec{a}))\end{aligned}$$

はすぐわかる。従って、

$$\sigma : (D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \prec_{\text{prop.}} (D, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$$

である。これより、prop.formula $\psi(\vec{x}, \vec{y})$ と$\vec{b} < D_{\bar{\nu}}$に対して

$$(D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models \exists \vec{x} \psi(\vec{x}, \vec{b}) \text{ ならば } (D, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists \vec{x} \psi(\vec{x}, \sigma(\vec{b}))$$

は容易である。そこで、逆に

$$(D, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists \vec{x} \psi(\vec{x}, \sigma(\vec{b}))$$

とする。$\vec{x} \in D$で、$(D, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \psi(\vec{x}, \sigma(\vec{b}))$ となるものを固定する。π_1でうつせば、(3) により、$(\eta, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \psi(\pi_1(\vec{x}), \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\vec{b}))$. 従って、

$$(\eta, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists \vec{x} \psi(\vec{x}, \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\vec{b}))$$

となるので、claim.1. により、${\sigma_{\bar{\nu}\nu}}^{-1}$でもどせば、

$$(D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models \exists \vec{x} \psi(\vec{x}, \vec{b})$$

となり、claim は示される。

Claim.5.$D = D_{\nu'}$

証明. まず、(2) により、

$$D = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^D(\alpha \cup q), \quad q = \pi_1^{-1}[p_\nu]$$

であった。また、$\nu' = \pi_1^{-1}(\nu) \in D$であるから、$D_{\nu'} \leq D$はすぐにわかる。そこで、$D_{\nu'} < D$であると仮定する。$p_{\nu'} = \{p_{\nu'}^1, \cdots, p_{\nu'}^n\}$ とすると、

$$p_{\nu'}^1, \cdots, p_{\nu'}^n < D_{\nu'} < D$$

であるから、

$$\begin{aligned} &\pi_1(p_{\nu'}^1), \cdots, \pi_1(p_{\nu'}^n) \in X = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\eta(\alpha \cup p_\nu) \\ &\pi_1(D_{\nu'}) \in X \subseteq \eta \end{aligned}$$

となる。従って、ある$\bar{\tau} < D_{\bar{\nu}}$に対し、$\tau = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau})$ とすると、

$$\begin{aligned} &\pi_1(p_{\nu'}^1), \cdots, \pi_1(p_{\nu'}^n) \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\tau(\alpha \cup p_\nu) \\ &\pi_1(D_{\nu'}) < \tau \end{aligned}$$

となる。今、$\tau \in range(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) \subseteq X = range(\pi_1)$ に注意すると、π_1の性質 (3) により、$\pi_1^{-1}(\tau) = \sigma(\bar{\tau})$ なので

$$\begin{aligned} &p_{\nu'}^1, \cdots, p_{\nu'}^n \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(\bar{\tau})}(\alpha \cup q) \\ &D_{\nu'} < \sigma(\bar{\tau}) \end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{\nu}) = \nu' &\subseteq \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_{\nu'}}(\alpha \cup p_{\nu'}) \\ &\subseteq \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(\bar{\tau})}(\alpha \cup q) = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(\bar{\tau})}(\alpha \cup \sigma[p_{\bar{\nu}}]) \end{aligned}$$

となる。これは、

$$(D, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \forall x (x < \sigma(\bar{\nu}) \to x \in M^{\sigma(\bar{\tau})}(\square \cup \{\sigma(p_{\bar{\nu}}^1), \cdots, \sigma(p_{\bar{\nu}}^m)\}))$$

となる。尚、$p_{\bar{\nu}} = \{p_{\bar{\nu}}^1, \cdots, p_{\bar{\nu}}^m\}$ とした。claim.4. により、σ^{-1}でもどせば

$$(D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models \forall x(x < \bar{\nu} \to x \in M^{\bar{\tau}}(\square \cup \{p_{\bar{\nu}}^1, \cdots, p_{\bar{\nu}}^m\})$$

すなわち、

$$\bar{\nu} \subseteq \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\tau}}(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}})$$

となるが、$\bar{\tau} < D_{\bar{\nu}}$だから、これは不合理。従って、$D_{\nu'} = D$とならねばならない。

Claim.6.$q = \pi_1^{-1}[p_\nu] = p_{\nu'}$.

証明.$D = D_{\nu'}$がわかったので、$D_{\nu'} = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_{\nu'}}(\alpha \cup q)$ である。従って、$p_{\nu'} \leq^* q$は明らかである。そこで、$p_{\nu'} <^* q$と仮定する。$q \subseteq D = D_{\nu'}$だから、

$$q \subseteq D_{\nu'} = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_{\nu'}}(\alpha \cup p_{\nu'}).$$

故に、π_1でうつせば、$D_{\nu'} = D = dom(\pi_1)$ なので、

$$p_\nu \subseteq \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\eta(\alpha \cup \pi_1[p_{\nu'}]) \subseteq \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha \cup \pi_1[p_{\nu'}]).$$

従って、

$$\nu < D_\nu = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha \cup p_\nu) = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha \cup \pi_1[p_{\nu'}]).$$

ところが、$p_{\nu'} <^* q$だったから、$\pi_1[p_{\nu'}] <^* \pi_1[q] = p_\nu$となるが、これは$p_\nu$の最小性に反する。故に、$q = p_{\nu'}$である。

以上の claims 及び、(1)-(5) 等によって、$\sigma : D_{\bar{\nu}} \to D_{\nu'}$が、$\sigma_{\bar{\nu}\nu'}$の条件の (i)-(vii) をみたすことがわかる。最後に、σが (viii) をみたすことを示す。そのために、$\xi < D_{\bar{\nu}}$を十分大きいとし、

$$\bar{\pi} : \bar{\gamma} \to \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^\xi(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}})$$
$$\pi' : \gamma' \to \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(\xi)}(\alpha \cup p_{\nu'})$$

を collapsing map とする。さらに

$$\pi : \gamma \to \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)}(\alpha \cup p_\nu)$$

も collapsing map とする。すると、$\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\gamma}) = \gamma$, $\sigma_{\bar{\nu}\nu} \circ \bar{\pi}^{-1}[p_{\bar{\nu}}] = \pi^{-1}[p_\nu]$である。
$\sigma(\xi) = \pi_1^{-1} \circ \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)$ であったから、claim.6. により、

$$\pi_1 : \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(\xi)}(\alpha \cup p_{\nu'}) \cong \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)}(\alpha \cup p_\nu)$$

は順序同型である。故に、$\gamma' = \gamma = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\gamma})$ であるが、(M2) で (viii) を示したときのように、$\gamma' < \nu'$ となるので、$\pi_1 \restriction \nu' = id$ に気をつければ、

$$\gamma' = \pi_1^{-1} \circ \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\gamma}) = \sigma(\bar{\gamma}).$$

また、$\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^{\sigma(\xi)}(\alpha\cup p_{\nu'})$ 上では、$\pi'^{-1}=\pi^{-1}\circ\pi_1$となるので、claim.6. により、

$$\pi'^{-1}[p_{\nu'}]=\pi^{-1}\circ\pi_1[p_{\nu'}]=\pi^{-1}[p_\nu]=\sigma_{\bar\nu\nu}\circ\bar\pi^{-1}[p_{\bar\nu}]$$

ここで、$\pi'^{-1}[p_{\nu'}]\subseteq\gamma'<\nu'$だから、再び $\pi_1\restriction\nu'$により、

$$\sigma_{\bar\nu\nu}\circ\bar\pi^{-1}[p_{\bar\nu}]=\pi_1^{-1}\circ\sigma_{\bar\nu\nu}\circ\bar\pi^{-1}[p_{\bar\nu}]=\sigma\circ\bar\pi^{-1}[p_{\bar\nu}].$$

これで (viii) がいえたので、$\sigma=\sigma_{\bar\nu\nu'}$, $\bar\nu\lhd\nu'$がわかる。

(M7).$\bar\nu$が$S_{\bar\alpha}$の limit point で、$\nu\in S_\alpha$とし、$\bar\nu\lhd\nu$, $\nu=sup(\pi_{\bar\nu\nu}``\bar\nu)$ とする。さらに、θを

$$\theta\in\bigcap_{\bar\tau\in S_{\bar\alpha}\cap\bar\nu}\{\alpha_\eta|\ \bar\tau\unlhd\eta\unlhd\pi_{\bar\nu\nu}(\bar\tau)\}$$

なるものとする。$\eta\in S_\theta$ & $\bar\nu\unlhd\eta\unlhd\nu$なる η の存在を示す。まず、θのとり方により、$\bar\alpha\le\theta\le\alpha$であるが、$\theta=\bar\alpha$または$\theta=\alpha$のときは、それぞれ、$\eta=\bar\nu$, または $\eta=\nu$とすれば良いので、$\bar\alpha<\theta<\alpha$としておく。

まず、θのとり方から、$\bar\tau\in S_{\bar\alpha}\cap\bar\nu$に対し、

$\eta(\bar\tau)=$ the unique $\eta\in S_\theta$ such that $\bar\tau\lhd\eta\lhd\sigma_{\bar\nu\nu}(\bar\tau)$

を定義することができる。すると、$\tau=\sigma_{\bar\nu\nu}(\bar\tau)$ としたとき、

$\eta(\bar\tau)=\sigma_{\bar\tau,\eta(\bar\tau)}(\bar\tau),\quad \tau=\sigma_{\eta(\bar\tau),\tau}(\eta(\bar\tau))$

である。さて、$\bar\tau,\bar\tau'\in S_{\bar\alpha}\cap\bar\nu$, $\bar\tau<\bar\tau'$とする。$\tau=\sigma_{\bar\nu\nu}(\bar\tau)$, $\tau'=\sigma_{\bar\nu\nu}(\bar\tau')$ とする。すると、(M2) により、$\sigma_{\bar\nu\nu}\restriction\bar\tau'=\sigma_{\bar\tau',\tau'}\restriction\bar\tau'$なので、$\tau=\sigma_{\bar\tau',\tau'}(\bar\tau)$ であり、

$\bar\tau\lhd\eta(\bar\tau)\lhd\tau,\quad \bar\tau'\lhd\eta(\bar\tau')\lhd\tau'$

である。今、$\eta_{\bar\tau}=\sigma_{\bar\tau',\eta(\bar\tau')}(\bar\tau)$ とする。$\eta_{\bar\tau}=\eta(\bar\tau)$ をいう。まず、$\bar\tau<\bar\tau'$なので、明らかに、$\eta_{\bar\tau}<\eta(\bar\tau')$.
また、

$\sigma_{\eta(\bar\tau'),\tau'}(\eta_{\bar\tau})=\sigma_{\eta(\bar\tau'),\tau'}\circ\sigma_{\bar\tau',\eta(\bar\tau')}(\bar\tau)=\sigma_{\bar\tau',\tau'}(\bar\tau)=\tau$

だから、(M2) により、$\eta_{\bar\tau}\lhd\tau$である。故に、$\eta_{\bar\tau},\eta(\bar\tau)\lhd\tau$となるので、$\lhd$ が tree order なことと、$\eta_{\bar\tau},\eta(\bar\tau)\in S_\theta$により、$\eta_{\bar\tau}=\eta(\bar\tau)$ となる。このことから、$\eta(\bar\tau)<\eta(\bar\tau')$ もわかる。また、(M2) により、

$$(1)\qquad\begin{cases}\sigma_{\bar\tau,\eta(\bar\tau)}\restriction\bar\tau=\sigma_{\bar\tau',\eta(\bar\tau')}\restriction\bar\tau\\ \sigma_{\eta(\bar\tau),\tau}\restriction\eta(\bar\tau)=\sigma_{\eta(\bar\tau'),\tau'}\restriction\eta(\bar\tau)\end{cases}$$

となることもわかる。

そこで、$\eta=sup\{\eta(\bar\tau)|\ \bar\tau\in S_{\bar\alpha}\cap\bar\nu\}$ とする。すると、(M1) により、S_θが closed なので、$\eta\in S_\theta$ である。$\bar\nu\lhd\eta\lhd\nu$であることを示すのであるが、$\lhd$ が tree order で、$\alpha_{\bar\nu}=\bar\alpha<\theta=\alpha_\eta$なので、$\eta\lhd\nu$をいえば十分である。まず

$$\sigma_0=\bigcup\{\sigma_{\bar\tau,\eta(\bar\tau)}\restriction\bar\tau|\ \bar\tau\in S_{\bar\alpha}\cap\bar\nu\}$$
$$\sigma_1=\bigcup\{\sigma_{\eta(\bar\tau),\tau}\restriction\eta(\bar\tau)|\ \bar\tau\in S_{\bar\alpha}\cap\bar\nu\}\quad(\tau\text{は}\sigma_{\bar\nu\nu}(\bar\tau)\text{である})$$

とすると、先の (1) により、σ_0, σ_1は共に関数となることがわかる。また、$\bar{\nu}, \eta$の性質により、

$$\sigma_0 : \bar{\nu} \to \eta, \quad \sigma_1 : \eta \to \nu$$

である。明らかに

$$\hat{\sigma}_0 : L_{\bar{\nu}}[A \cap \bar{\alpha}] \prec_0 L_\eta[A \cap \theta]$$
$$\hat{\sigma}_1 : L_\eta[A \cap \theta] \prec_0 L_\nu[A \cap \alpha]$$

であるが、σ_0, σ_1は共に cofinal なので、

$$(2) \qquad \begin{cases} \hat{\sigma}_0 : L_{\bar{\nu}}[A \cap \bar{\alpha}] \prec_Q L_\eta[A \cap \theta] \\ \hat{\sigma}_1 : L_\eta[A \cap \theta] \prec_Q L_\nu[A \cap \alpha] \end{cases}$$

である。

Claim.1. $range(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) \cap \nu \subseteq range(\sigma_1)$

証明. $y \in range(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) \cap \nu$とし、$y = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(x)$, $x < D_{\bar{\nu}}$とする。$\nu = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\nu})$ だから、$x < \bar{\nu}$. ところで、$\bar{\nu}$は$S_{\bar{\alpha}}$の limit point なので、

$$x < \bar{\tau}, \quad \bar{\tau} \in S_{\bar{\alpha}} \cap \bar{\nu}$$

となる$\bar{\tau}$がとれる。すると、$\tau = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau})$ として

$$\sigma_1 \circ \sigma_0(x) = \sigma_{\eta(\bar{\tau}),\tau} \circ \sigma_{\bar{\tau},\eta(\bar{\tau})}(x) = \sigma_{\bar{\tau}\tau}(x).$$

故に、(M2) により、

$$y = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(x) = \sigma_{\bar{\tau}\tau}(x) = \sigma_1 \circ \sigma_0(x) \in range(\sigma_1)$$

となる。

Claim.2.$\sigma_{\bar{\nu}\nu} : D_{\bar{\nu}} \to D_\nu$については、$D_\nu = sup(\sigma_{\bar{\nu}\nu}``D_{\bar{\nu}})$.

証明.$D = sup(\sigma_{\bar{\nu}\nu}``D_{\bar{\nu}})$ とすると、明らかに、$D \leq D_\nu$である。

今、$\xi < \nu$を任意にとると、$\nu = sup(\sigma_{\bar{\nu}\nu}``\bar{\nu})$ により、

$$\xi < \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\beta) < \nu$$

となる$\beta < \bar{\nu}$がとれる。

$$\beta < D_{\bar{\nu}} = \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{D_{\bar{\nu}}}(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}})$$

だから、$D_{\bar{\nu}}$が limit ordinal であることから、

$$\beta \in \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\zeta}(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}})$$

となる $\zeta < D_{\bar{\nu}}$がとれる。従って、

$$\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\beta) \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\zeta)}(\alpha \cup p_\nu) \subseteq \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^D(\alpha \cup p_\nu).$$

故に、このことから、

$$\nu \cap \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^D(\alpha \cup p_\nu) \text{ は cofinal in } \nu$$

がわかる。また、上の議論で、$\beta = \bar{\alpha}$とすると

$$\alpha \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^D(\alpha \cup p_\nu)$$

もいえる。従って、$D_\nu \leq D$であるから、これで、$D = D_\nu$となる。

Claim.3.$\forall x < \nu \exists \bar{y} < D_{\bar{\nu}} \exists \bar{\beta} < D_{\bar{\nu}} (x < \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{y}) \subseteq \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\beta})}(\alpha \cup p_\nu))$.

証明.$x < \nu$とする。すると、$\nu = sup(\sigma_{\bar{\nu}\nu}``\bar{\nu})$ だから、

$$x < \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{y}) < \nu$$

となる$\bar{y} < \bar{\nu}$がとれる。$\bar{\alpha} \leq \bar{y}$として良い。また、$\bar{\nu}$は$S_{\bar{\alpha}}$の limit point なので、$\bar{y} < \bar{\tau} < \bar{\nu}$, $\bar{\tau} \in S_{\bar{\alpha}}$なる$\bar{\tau}$を固定しておく。

$$L_{\bar{\tau}}[A\cap\bar{\alpha}] \models \ \bar{\alpha}\text{は最大の cardinal.}$$

だから、$\bar{f}\in L_{\bar{\tau}}[A\cap\bar{\alpha}]$, $\bar{f}:\bar{\alpha}\to\bar{y}$ onto となる$\bar{f}$がある。そこで、

$$D^{\bar{\alpha}}_{A\cap\bar{\alpha}}(\bar{t})=\bar{f},\quad \bar{t}<\bar{\tau}$$

となる $\bar{t}\in Term^{\bar{\alpha}}$をとる。$t=\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{t})$, $f=D^{\alpha}_{A\cap\alpha}(t)$ とすると、

$$f=(\sigma_{\bar{\nu}\nu}\restriction\bar{\nu})^{\wedge}(\bar{f})$$

だから、$y=\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{y})$ とおけば、

$$f:\alpha\to y \text{ onto}$$

である。また、$\tau=\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau})$ とすれば、$\tau\in S_\alpha\cap\nu$であり、$t<\tau$である。よって、$\bar{\beta}<D_{\bar{\nu}}$を、

$$p_{\bar{\nu}}\subseteq\bar{\beta},\ \bar{\tau},\bar{t},\bar{\alpha},\bar{y}\in\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A\cap\bar{\alpha}]^{\bar{\beta}}(\bar{\alpha}\cup p_{\bar{\nu}})$$

となるようにとれば、$p_\nu\subseteq\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\beta})$ であり、

$$\tau,t,\alpha,y\in\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\beta})}(\alpha\cup p_\nu)$$

となる。さて、$\alpha,y,t<\tau$, $\tau\in S_\alpha\cap\nu$であり、$f=D^{\alpha}_{A\cap\alpha}(t)$ については、

$$f:\alpha\to y \text{ onto}$$

であったから、補題 3.9. の証明と同様にして、

$$y\subseteq\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\beta})}(\alpha\cup p_\nu)$$

となる。これで、claim は証明された。尚、$\bar{\beta},\bar{y}$はいくらでも大きくとれることを注意しておく。

今、

$$X=\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^{D_\nu}(\theta\cup p_\nu)$$

とし、

$$\sigma:D\to X \quad \text{collapsing map}$$

とする。すると、次のことがいえる。

Claim.4.$X\cap\nu=range(\sigma_1)$.

証明. まず、$x\in X\cap\nu$とする。Claim.3. により、

$$x<\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{y})\subseteq\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\beta})}(\alpha\cup p_\nu)$$

となる$\bar{y}<\bar{\nu}$, $\bar{\beta}<D_{\bar{\nu}}$をとっておく。さらに、

$$p_{\bar{\nu}}\subseteq\bar{\beta},\ \bar{\alpha}\in\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A\cap\bar{\alpha}]^{\bar{\beta}}(\bar{\alpha}\cup p_{\bar{\nu}})$$

としておく。また、claim.2. により、$D_\nu=sup(\sigma_{\bar{\nu}\nu}``D_{\bar{\nu}})$ なので、

$$x\in X=\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^{D_\nu}(\theta\cup p_\nu)$$

により、$\bar{\beta}$については、

$$x\in\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\beta})}(\theta\cup p_\nu)$$

をみたすものとする。すると、$p_\nu=\{\vec{p}_\nu\}$ とすれば、$\theta_1,\cdots,\theta_n<\theta$をとって、

$$x=F^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\beta})}(\theta_1,\cdots,\theta_n,\vec{p}_\nu),\quad F\text{は}\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]\text{の関数の合成}$$

と書くことができる。今、

$$\bar{\pi} : \bar{\gamma} \to \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\beta}}(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}})$$
$$\pi : \gamma \to \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\beta})}(\alpha \cup p_{\nu})$$

を共に collapsing map とする。すると、

$$\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\gamma}) = \gamma, \quad \sigma_{\bar{\nu}\nu}\bar{\pi}^{-1}[p_{\bar{\nu}}] = \pi^{-1}[p_{\nu}]$$

である。ところで、$\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{y}) \subseteq \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\beta})}(\alpha \cup p_{\nu})$ だから、

$$x = \pi^{-1}(x) \in \gamma = \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\gamma}(\alpha \cup \pi^{-1}[p_{\bar{\nu}}])$$

さて、$\bar{\gamma} < \bar{\nu}$なので、$\gamma' = \sigma_0(\bar{\gamma})$ とすると、$\sigma_1(\gamma') = \sigma_1 \circ \sigma_0(\bar{\gamma}) = \gamma$である。また、$\pi^{-1}[p_{\nu}] = \sigma_{\bar{\nu}\nu}\bar{\pi}^{-1}[p_{\bar{\nu}}]$なので、claim.1. により、

$$\pi^{-1}[p_{\nu}] \subseteq range(\sigma_1).$$

そこで、$\sigma_1[q] = \pi^{-1}[p_{\nu}]$, $q \subseteq \eta$となる qをとる。$q = \{\vec{q}\}$ とする。
πは monomorphism であるから、$x = F^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\beta})}(\theta_1, \cdots, \theta_n, \vec{p}_{\nu})$ をπ^{-1}でもどせば、

$$x = F^{\gamma}(\theta_1, \cdots, \theta_n, \pi^{-1}(\vec{p}_{\nu})) = F^{\sigma_1(\gamma')}(\theta_1, \cdots, \theta_n, \sigma_1(\vec{q})).$$

ここで、σ_1の定義と、I の補題 1.8. により、

$$\sigma_1 : \mathcal{M}_{\theta}[A \cap \theta]^{\eta} \to \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\nu} \quad \text{mono}$$

であることに注意すれば、$\bar{F}$を $\mathcal{M}_{\theta}[A \cap \theta]$の関数の合成で、$F$に対応するものとするとき、
$\bar{F}^{\gamma'}(\theta_1, \cdots, \theta_n, \vec{q})$ が定義されていることがわかり、しかも、

$$x = \sigma_1(\bar{F}^{\gamma'}(\theta_1, \cdots, \theta_n, \vec{q})) \in range(\sigma_1)$$

となる。これで、$X \cap \nu \subseteq range(\sigma_1)$ となる。
逆に、$x \in \eta = dom(\sigma_1)$ とする。$x < \theta$なら、

$$\sigma_1(x) = id(x) = x < \theta$$

となるので、明らかに、$\sigma_1(x) \in X \cap \nu$. そこで、$\theta \leq x$ とする。すると、$\alpha = \sigma_1(\theta) \leq \sigma_1(x)$ である。
$\bar{y} < \bar{\nu}$を大きくとって、

$$\alpha \leq \sigma_1(x) < \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{y}) < \nu$$

とし、$y = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{y})$ とおく。$\alpha = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\alpha})$ なので、$\bar{\alpha} < \bar{y} < \bar{\nu}$である。そこで、$\bar{y} < \bar{\tau} < \bar{\nu}$なる$\bar{\tau} \in S_{\bar{\alpha}}$をとる。

$$L_{\bar{\tau}}[A \cap \bar{\alpha}] \models \exists f(f : \bar{\alpha} \to \bar{y} \text{ onto})$$

だから、$\bar{f} \in L_{\bar{\tau}}[A \cap \bar{\alpha}]$, $\bar{f} : \bar{\alpha} \to \bar{y}$ onto とし、$\bar{t} < \bar{\tau}$を、$\bar{t} \in Term^{\bar{\alpha}}$で、$\bar{f} = D^{\bar{\alpha}}_{A\cap\bar{\alpha}}(\bar{t})$ となるものとする。$f = D^{\theta}_{A\cap\theta}(\sigma_0(\bar{t})) = \hat{\sigma}_0(\bar{f})$ とすると、$\sigma_0(\bar{\alpha}) = \theta$に注意して、

$$f : \theta \to \sigma_0(\bar{y}) \text{ onto}$$

である。さらに、$\sigma_0(\bar{y}), \sigma_0(\bar{t}) < \sigma_0(\bar{\tau}) = \eta(\bar{\tau}) < \eta$, $\eta(\bar{\tau}) \in S_\theta$である。さて、

$$\sigma_1(x) < y = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{y}) = \sigma_1(\sigma_0(\bar{y}))$$

だから、$x < \sigma_0(\bar{y})$. よって、$x = f(\beta)$ となる$\beta < \theta$がとれる。これを$\hat{\sigma}_1$でうつせば、$\hat{\sigma}_1(f) = D^{\alpha}_{A\cap\alpha}(\sigma_1 \circ \sigma_0(\bar{t})) = D^{\alpha}_{A\cap\alpha}(\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{t}))$ なので、

$$\sigma_1(x) = D^{\alpha}_{A\cap\alpha}(t)(\beta), \quad \beta < \theta$$

である。ただし、$t = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{t})$ である。さらに、

$$\begin{aligned} y, t, \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau}) \in range(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) &= \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\bar{\alpha} \cup p_\nu) \\ &\subseteq \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\theta \cup p_\nu) = X \end{aligned}$$

だから、補題 3.9. の証明と同様にして、$\sigma_1(x) \in X \cap \nu$となる。

以上のことから、$X \cap \nu = range(\sigma_1)$ となる。

この claim.4. により、$\sigma \restriction \eta = \sigma_1$がわかる。また、$\nu \in range(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) \subseteq X$なので、$\sigma(\eta) = \nu$である。さらに、$\sigma \restriction \theta = \sigma_1 \restriction \theta = id$, $\sigma(\theta) = \sigma_1(\theta) = \alpha$である。また、CP によって、

$$\sigma : \mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]^D \to \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu} \quad \text{mono} \tag{3}$$

$$D = \mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]^D(\theta \cup \sigma^{-1}[p_\nu]) \tag{4}$$

である。以下では、$D = D_\eta$, $\sigma^{-1}[p_\nu] = p_\eta$を証明する。その前に、まず、$\eta \in S_\theta$であったから、

$$L_\eta[A \cap \theta] \models \theta \text{は唯一の uncountable cardinal}$$

となっていることに注意する。すると、明らかに、

$$L[A \cap \theta] \models \theta \leq \omega_1$$

となる。故に (4) から、

$$L[A \cap \theta] \models |D| \leq \omega_1$$

となるので、$\eta < D < \omega_2^{L[A\cap\theta]}$となって、$D_\eta$, p_ηは定義されている。

Claim.5.Dは limit ordinal である。

証明.$D = \delta + 1$ とする。$\delta \in D$だから、$\sigma(\delta) \in X$である。ところで、

$$\sigma(\delta) \in D_\nu = sup(\sigma_{\bar{\nu}\nu}``D_{\bar{\nu}})$$

だから、$\xi < D_{\bar{\nu}}$, $\sigma(\delta) < \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)$ とすることができる。このとき、

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi) \in range(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) &= \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\bar{\alpha} \cup p_\nu) \\ &\subseteq \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\theta \cup p_\nu) = X \end{aligned}$$

であるから、$\delta < \sigma^{-1}\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi) < D$となり不合理。従って、$D$は limit ordinal である。

Claim.6.$x \in X$で、$\xi < D_{\bar{\nu}}$が十分大きいとする。さらに

$$\pi : \gamma \to \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)}(\alpha \cup p_\nu)$$

が collapsing map で、$x \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)}(\theta \cup p_\nu)$ とする。このとき、

$$\pi^{-1}(x) \in range(\sigma_1)$$

である。

証明. まず、Fを$\mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]$の関数の合成とし、$\theta_1, \cdots, \theta_n < \theta$をとり、

$$x = F^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)}(\theta_1, \cdots, \theta_n, \vec{p}_\nu)$$

と表す。尚、$p_\nu = \{\vec{p}_\nu\}$ である。$\pi \restriction \alpha = id,\ \theta < \alpha$だから、

$$\pi^{-1}(x) = F^\gamma(\theta_1, \cdots, \theta_n, \pi^{-1}(\vec{p}_\nu))$$

となる。さらに、

$$\gamma \in range(\sigma_1), \quad \pi^{-1}[p_\nu] \subseteq \nu \cap range(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) \subseteq range(\sigma_1)$$

である。そこで、$\gamma = \sigma_1(\gamma'),\ \pi^{-1}[p_\nu] = \sigma_1[q]$とする。$\sigma_1 \restriction \theta = id$ なので、

$$\sigma_1 : \mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]^\eta \to \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\nu \quad \text{mono}$$

(Claim.4. の証明中) により、

$$\pi^{-1}(x) = \sigma_1(\bar{F}^{\gamma'}(\theta_1, \cdots, \theta_n, \vec{q})) \in range(\sigma_1)$$

となる。ここで、$q = \{\vec{q}\}$ であり、$\bar{F}$は $\mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]$の関数の合成で、$F$に対応するものである。

Claim.7. $\sigma : (D, \theta, A \cap \theta, \theta) \prec_{\exists_{\not{x}}\text{prop.}} (D_\nu, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$.

証明. まず、$\sigma : (D, \theta, A \cap \theta, \theta) \prec_{\text{atomic}} (D_\nu, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$ を示す。(3) から、

$$\sigma : \mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]^D \to \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu} \quad \text{mono}$$

なので、問題なのは、$x \in M^y(\square \cup \{z_1, \cdots, z_n\})$ のみである。さらに、これについても、

$$(D, \theta, A \cap \theta, \theta) \models x \in M^y(\square \cup \{z_1, \cdots, z_n\})$$
$$\text{ならば } (D_\nu, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \sigma(x) \in M^{\sigma(y)}(\square \cup \{\sigma(z_1), \cdots, \sigma(z_n)\})$$

は明らかに成り立っている。そこで逆をいうために、

$$(D_\nu, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \sigma(x) \in M^{\sigma(y)}(\square \cup \{\sigma(z_1), \cdots, \sigma(z_n)\})$$

と仮定する。すなわち、

$$\sigma(x) \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(y)}(\alpha \cup \{\sigma(z_1), \cdots, \sigma(z_n)\})$$

と仮定する。まず、$x, y, z_1, \cdots, z_n \in D = \mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]^D(\alpha \cup \sigma^{-1}[p_\nu])$ であり、Dは limit ordinal(Claim.5.) なので、$\xi < D$を大きくとって、

$$x, y, z_1, \cdots, z_n \in \mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]^\xi(\alpha \cup \sigma^{-1}[p_\nu])$$

としておく。また、$\sigma(\xi) \in X \subseteq D_{\bar{\nu}}$, $range(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) \subseteq X$なので、claim.2. により、

$\sigma(\xi) \in range(\sigma_{\bar{\nu}\nu})$

としても良く、さらに、

$$p_{\bar{\nu}} \subseteq \sigma_{\bar{\nu}\nu}^{-1} \circ \sigma(\xi), \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}^{-1} \circ \sigma(\xi)}(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}})$$

と仮定しても良い。すなわち、$\sigma_{\bar{\nu}\nu}^{-1} \circ \sigma(\xi) < D_{\bar{\nu}}$が十分大きい。そこで、

$$\pi : \gamma \to \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(\xi)}(\alpha \cup p_\nu)$$

をcollapsing map とすると、$\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z_1), \cdots, \sigma(z_n) \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(\xi)}(\alpha \cup p_\nu)$ となるので、claim.6. により、

$\pi^{-1}\sigma(x), \pi^{-1}\sigma(y), \pi^{-1}\sigma(z_1), \cdots, \pi^{-1}\sigma(z_n) \in range(\sigma_1)$

である。そこで、$x', y', z'_1, \cdots, z'_n < \eta$を、

$\pi^{-1}\sigma(x) = \sigma_1(x'), \pi^{-1}\sigma(y) = \sigma_1(y'), \pi^{-1}\sigma(z_1) = \sigma_1(z'_1), \cdots, \pi^{-1}\sigma(z_n) = \sigma_1(z'_n)$

となるようにとる。$\pi : \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\gamma \to \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(\xi)}$ mono であるから、

$\sigma(x) \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(y)}(\alpha \cup \{\sigma(z_1), \cdots, \sigma(z_n)\})$

をπ^{-1}でもどせば、

$\sigma_1(x') \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_1(y')}(\alpha \cup \{\sigma_1(z'_1), \cdots, \sigma_1(z'_n)\})$

となる。故に、ある$\vec{\beta} < \alpha$をとって、

$$\sigma_1(x') = F^{\sigma_1(y')}(\vec{\beta}, \sigma_1(z'_1), \cdots, \sigma_1(z'_n)\}), \quad F\text{は}\mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]\text{の関数の合成}$$

と書くことができる。今、$\bar{\tau} \in S_{\bar{\alpha}} \cap \bar{\nu}$を大きくとれば、$x', y', z'_1, \cdots, z'_n < \eta(\bar{\tau})$ とできることに注意する。すると、これは、$\tau = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau}) = \sigma_{\eta(\bar{\tau}),\tau}(\eta(\bar{\tau}))$ とすると、

$$(D_\tau, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists\vec{\beta}[\vec{\beta} < \alpha \wedge \sigma_1(x') = F^{\sigma_1(y')}(\vec{\beta}, \sigma_1(z'_1), \cdots, \sigma_1(z'_n))]$$

と書ける。尚、これは正式なformula ではないが、$\sigma_1(x') = F^{\sigma_1(y')}(\cdots)$ のところは、P_J^mやP_T, P_K等と$\exists$で書くことができるので、$\exists_{\vec{x}}$prop. の形のformula だと考えても良い。これを$\sigma_{\eta(\bar{\tau}),\tau}^{-1}$でもどせば、$\sigma_1 \upharpoonright \eta(\bar{\tau}) = \sigma_{\eta(\bar{\tau}),\tau} \upharpoonright \eta(\bar{\tau})$ に注意して、

$$(D_{\eta(\bar{\tau})}, \theta, A \cap \theta, \theta) \models \exists\vec{\beta}[\vec{\beta} < \theta \wedge x' = \bar{F}^{y'}(\vec{\beta}, z'_1, \cdots, z'_n)]$$

となる。ここで、$\bar{F}$は $\mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]$の関数の合成で、$F$に対応するものである。従って、$\vec{\beta} < \theta$をとり、

$x' = \bar{F}^{y'}(\vec{\beta}, z'_1, \cdots, z'_n)$

とできることがわかった。これを、再び、$\sigma_{\eta(\bar{\tau}),\tau}$でうつせば、

$\sigma_1(x') = F^{\sigma_1(y')}(\vec{\beta}, \sigma_1(z'_1), \cdots, \sigma_1(z'_n)).$

πでうつして、

$$\sigma(x) = F^{\sigma(y)}(\vec{\beta}, \sigma(z_1), \cdots, \sigma(z_n))$$

ここで、$\vec{\beta} < \theta$だから、σ^{-1}でもどせば、先ほどの$\bar{F}$を用いて、

$$x = \bar{F}^y(\vec{\beta}, z_1, \cdots, z_n) \in \mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]^y(\theta \cup \{z_1, \cdots, z_n\})$$

となる。これで、atomic formula については全て終った。従って、

$$\sigma : (D, \theta, A \cap \theta, \theta) \prec_{\text{prop.}} (D_\nu, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$$

もわかる。

今、$\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ を prop.formula とし、$\vec{z} \in D$とする。

$$(D_\nu, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, \sigma(\vec{z}))$$

と仮定する。まず、$(D_\nu, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \varphi(\vec{x}, \sigma(\vec{z}))$ となる$\vec{x} < D_\nu$を固定する。$\xi < D_{\bar{\nu}}$を十分大きくとり、

$$\sigma(\vec{z}) \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)}(\theta \cup p_\nu)$$
$$\vec{x} \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)}(\alpha \cup p_\nu)$$

となるようにとる。Claim.2. により、このようなξは存在する。今、

$$Y = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)}(\alpha \cup p_\nu)$$

とすると、$(Y, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \varphi(\vec{x}, \sigma(\vec{z}))$ である。そこで、$\pi : \gamma \to Y$を、collapsing map とすると、CP により、

$$\pi : \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\gamma \to \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)} \quad \text{mono}$$

なので、$\pi : (\gamma, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \prec_{\text{prop.}} (\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi), \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$ がわかる。また、$Y \subseteq \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)$ なので、補題 2.9. により、

$$(\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi), \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \varphi(\vec{x}, \sigma(\vec{z}))$$

だから、π^{-1}でもどせば、

$$(\gamma, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \varphi(\pi^{-1}(\vec{x}), \pi^{-1}\sigma(\vec{z}))$$

となる。さて、$\sigma(\vec{z}) \in X$だから、claim.6. によって、$\pi^{-1}\sigma(\vec{z}) = \sigma_1(\vec{z}')$ となる$\vec{z}' < \eta$がとれる。すると、

(1) $\quad (\gamma, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, \sigma_1(\vec{z}'))$

がいえる。今、$\bar{\nu} \lhd \nu$だったから、$\sigma_{\bar{\nu}\nu}$の性質 (定義 3.15.(viii)) により、

$$\gamma \in range(\sigma_{\bar{\nu}\nu}), \ \pi^{-1}[p_\nu] \subseteq range(\sigma_{\bar{\nu}\nu})$$

であるが、claim.1. により、$\gamma \in range(\sigma_1)$, $\pi^{-1}[p_\nu] \subseteq range(\sigma_1)$ である。そこで、

$$\gamma = \sigma_1(\gamma'), \ \pi^{-1}[p_\nu] = \sigma_1[q], \ q \subseteq \gamma'$$

とする。また、$\bar{\tau} \in S_{\bar{\alpha}} \cap \bar{\nu}$を大きくとり、

$$\vec{z}', \gamma' < \eta(\bar{\tau})$$

とする。$\tau = \sigma_1(\eta(\bar{\tau}))$ とおく。すると、$\sigma_1(\vec{z}'), \sigma_1(\gamma') < \tau < D_\tau$なので、(1) は、

$$(D_\tau, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists \vec{x}[\vec{x} < \gamma \wedge \varphi(\vec{x}, \sigma_1(\vec{z}'))]$$

となる。$\sigma_1 \restriction \eta(\bar{\tau}) = \sigma_{\eta(\bar{\tau}),\tau} \restriction \eta(\bar{\tau})$ なので、これをσ_1^{-1}でもどせば、

(2) $\quad (D_{\eta(\bar{\tau})}, \theta, A \cap \theta, \theta) \models \exists \vec{x}[\vec{x} < \gamma' \wedge \varphi(\vec{x}, \vec{z}')]$

である。ところで、$\gamma = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\gamma(\alpha \cup \pi^{-1}[p_\nu])$ だから、

$$(D_\tau, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \forall \beta(\beta < \gamma \leftrightarrow \beta \in M^\gamma(\square \cup \pi^{-1}[p_\nu])).$$

従って、$\sigma_{\eta(\bar{\tau}),\tau}^{-1}$でもどせば、

$$(D_{\eta(\bar{\tau})},\theta,A\cap\theta,\theta)\models\forall\beta(\beta<\gamma'\leftrightarrow\beta\in M^{\gamma'}(\square\cup q))$$
となるので、$\gamma'=\mathcal{M}_\theta[A\cap\theta]^{\gamma'}(\theta\cup q)$ である。そこで、(2) により、
$$(D_{\eta(\bar{\tau})},\theta,A\cap\theta,\theta)\models\varphi(\vec{x},\vec{z}')$$
となる$\vec{x}<\gamma'$をとる。$\sigma_{\eta(\bar{\tau}),\tau}$でうつせば、$\sigma_1(\vec{x})=\sigma_{\eta(\bar{\tau}),\tau}(\vec{x})<\sigma_1(\gamma')=\gamma$であり、
$$(D_\tau,\alpha,A\cap\alpha,\alpha)\models\varphi(\sigma_1(\vec{x}),\sigma_1(\vec{z}'))$$
なので、
$$(\gamma,\alpha,A\cap\alpha,\alpha)\models\varphi(\sigma_1(\vec{x}),\sigma_1(\vec{z}'))$$
となる。よって、πでうつせば、$\sigma_1(\vec{z}')=\pi^{-1}\sigma(\vec{z})$ だったから、
$$(3)\quad (D_\nu,\alpha,A\cap\alpha,\alpha)\models\varphi(\pi\sigma_1(\vec{x}),\sigma(\vec{z})).$$
後は、$\pi\sigma_1(\vec{x})\in X=range(\sigma)$ をいえば良い。これをいうために、$\vec{x}=x_1,\cdots,x_n$とし、$\pi\sigma_1(x_1)\in X$をいう。$x_2,\cdots,x_n$についても同様にして証明できる。まず、
$$x_1<\gamma'=\mathcal{M}_\theta[A\cap\theta]^{\gamma'}(\theta\cup q)$$
なので、
$$x_1=\bar{F}^{\gamma'}(\vec{\beta},\vec{q}),\quad \vec{\beta}<\theta,\ \bar{F}\text{は}\mathcal{M}_\theta[A\cap\theta]\text{の関数の合成}$$
と書ける。従って、$\sigma_1(\sigma_{\eta(\bar{\tau}),\tau})$ でうつすと、
$$\sigma_1(x_1)=F^{\gamma}(\vec{\beta},\pi^{-1}(\vec{p}_\nu)),\quad F\text{は}\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]\text{の関数の合成で}\bar{F}\text{に対応するもの}$$
となる。故に
$$\pi\sigma_1(x_1)=F^{\sigma_{D\nu}(\xi)}(\vec{\beta},\vec{p}_\nu)\in\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^{\sigma_{D\nu}(\xi)}(\theta\cup p_\nu)\subseteq X$$
となる。故に、σの性質により、$\sigma:(D,\theta,A\cap\theta,\theta)\prec_{\text{prop.}}(D_\nu,\alpha,A\cap\alpha,\alpha)$ だから、(3) をσ^{-1}でもどせば、$\sigma^{-1}\pi\sigma_1(\vec{x})<D$であり、
$$(D,\theta,A\cap\theta,\theta)\models\varphi(\sigma^{-1}\pi\sigma_1(\vec{x}),\vec{z})$$
となるので、$(D,\theta,A\cap\theta,\theta)\models\exists\vec{x}\varphi(\vec{x},\vec{z})$ となる。逆は明らかなので、これで claim は証明された。

Claim.8. $D=D_\eta,\ \sigma^{-1}[p_\nu]=p_\eta$.

証明.$p=\sigma_1[p_\nu]$とすると、(4) により、
$$\eta=\sigma^{-1}(\nu)<D=\mathcal{M}_\theta[A\cap\theta]^D(\theta\cap p)$$
なので、$D_\eta\le D$は明らかである。そこで、$D_\eta<D$とする。すると、$p_\eta\subseteq D_\eta<D$であり、$\eta\subseteq\mathcal{M}_\theta[A\cap\theta]^{D_\eta}(\theta\cup p_\eta)$ だから、claim.7. により、σでうつせば、(M3) の claim.8. と同様にして、
$$\nu\subseteq\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^{\sigma(D_\eta)}(\alpha\cup\sigma[p_\eta])$$
となるが、$\sigma(D_\eta)<D_\nu$なので、これはD_νの最小性に反し、故に、$D=D_\eta$でなければならない。

このことにより、
$$\eta<D_\eta=\mathcal{M}_\theta[A\cap\theta]^{D_\eta}(\theta\cup p)$$
となることがわかるので、p_ηの最小性により、$p_\eta\le^* p$ である。そこで、$p_\eta<^* p$ と仮定する。すると、$p\subseteq D_\eta=\mathcal{M}_\theta[A\cap\theta]^{D_\eta}(\theta\cup p_\eta)$ なので、
$$p\subseteq\mathcal{M}_\theta[A\cap\theta]^{\xi}(\theta\cup p_\eta)$$
となる$\xi<D_\eta$がある。従って、σでうつせば、$p=\sigma^{-1}[p_\nu]$なので、
$$\begin{aligned}p_\nu&\subseteq\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^{\sigma(\xi)}(\alpha\cup\sigma[p_\eta])\\&\subseteq\mathcal{M}_\alpha[A\cap\alpha]^{D_\nu}(\alpha\cup\sigma[p_\eta])\end{aligned}$$

となる。従って、

$$D_\nu = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha \cup p_\nu) = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha \cup \sigma[p_\eta])$$

となるが、$p_\eta <^* p$ により、$\sigma[p_\eta] <^* \sigma[p] = p_\nu$だから、これは p_νの最小性に反する。従って、$p_\eta = p$ である。

以上の claims 等により、$\eta \lhd \nu$のσに関する条件の (i)-(vii) がみたされることがわかる。(viii) を示すために、$\xi < D_\eta$を大きくとる。

$$\sigma(\xi) \in X = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\theta \cup p_\nu)$$

だから、claim.2. により、

$$\sigma(\xi) \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\xi})}(\theta \cup p_\nu)$$

となる、十分大きい$\bar{\xi} < D_{\bar{\nu}}$を固定しておく。まず、

$$\pi : \gamma \to \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\xi})}(\alpha \cup p_\nu)$$

を collapsing map とすると、$\gamma \in range(\sigma_1)$, $\pi^{-1}[p_\nu] \subseteq range(\sigma_1)$ であり、また、claim.6. により、$\pi^{-1}\sigma(\xi) \in range(\sigma_1)$ である。そこで、

$$\sigma_1(\xi') = \pi^{-1}\sigma(\xi),\ \sigma_1(\gamma') = \gamma,\ \sigma_1(\vec{p}) = \pi^{-1}(\vec{p}_\nu)$$

としておく。すると、

$$\pi : \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_1(\xi')}(\alpha \cup \sigma_1[p]) \cong \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(\xi)}(\alpha \cup p_\nu)$$

は順序同型である。今、

$$\pi' : \delta \to \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(\xi)}(\alpha \cup p_\nu)$$

を collapsing map とする。すると、

$$\pi^{-1} \circ \pi' : \delta \to \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_1(\xi')}(\alpha \cup \sigma_1[p])$$

は collapsing map であり、

$$(\pi^{-1} \circ \pi')^{-1}\sigma_1[p] = \pi'^{-1} \circ \pi \circ \pi^{-1}[p_\nu] = \pi'^{-1}[p_\nu]$$

である。さて、今、$\alpha, A \cap \alpha, \sigma_1(\xi'), \sigma_1[p] \in range(\hat{\sigma}_1)$ であり、さらに、

$$\hat{\sigma}_1 : L_\eta[A \cap \theta] \prec_Q L_\nu[A \cap \alpha]$$

だから、(M2) の証明と同様にして (Silver machine がΣ_1であること等を用いて)、

$$\pi^{-1} \circ \pi' \in range(\hat{\sigma}_1).$$

これより、すぐ上のことも用いて、

$$\delta = dom(\pi^{-1} \circ \pi') \in range(\hat{\sigma}_1) \cap On = range(\sigma_1)$$
$$\pi'^{-1}[p_\nu] = (\pi^{-1} \circ \pi')^{-1}[\sigma_1[p]] \in range(\hat{\sigma}_1)$$

従って、

$$\delta \in range(\sigma_1), \quad \pi'^{-1}[p_\nu] \subseteq range(\sigma_1)$$

となるので、補題3.20. により、(viii) がわかる。これで、$\sigma = \sigma_{\eta\nu}$, $\eta \lhd \nu$となる。以上で (M7) は示された。

これらをまとめると、

4.2. 補題.$\overline{\mathfrak{M}}$は、morass の公理 (M0)-(M7) をみたす。

5.Morass の存在証明. 其三

前節の結果から、$\overline{\mathfrak{M}}$は morass の公理 (M0)-(M7) をみたすことがわかるが、$\overline{\mathfrak{M}}$は morass にはなっていない。というのも、morass の定義 (2.1.) では$\mathcal{S}$に対して、

$$(\alpha, \nu), (\alpha', \nu') \in \mathcal{S} \ \& \ \alpha < \alpha' \ \rightarrow \ \nu < \alpha'$$

が要請されていたが、$\bar{\mathcal{S}}$は、これをみたすとは限らない。実際、

$$(\alpha, \nu), (\alpha', \nu') \in \bar{\mathcal{S}} \ \& \ \alpha < \alpha' < \nu' < \nu$$

となることがあるかも知れない。そこで、この節では、$\mathcal{S} \subseteq \bar{\mathcal{S}}$をうまく作って、$\mathfrak{M} = (S, \mathcal{S}, \prec, (\pi_{\nu\tau})_{\nu\prec\tau})$を定義し、これが morass になることを示す。

まず、次の二つの場合にわける。

(a) $sup(S_\alpha) = \omega_1$ となる $\alpha < \omega_1$が存在しないとき

(b) $sup(S_\alpha) = \omega_1$ となる $\alpha < \omega_1$が存在するとき

これは、A の性質による。以下では (a) の場合を考える。(b) の場合は、少し修正すれば、(a) と殆ど同じである。

5.1. 補題.(a),(b), いずれの場合でも、$\alpha \in \bar{S}_0 \cap \omega_1$ならば、

$$S_\alpha \subseteq \omega_1 + 1, \quad \text{従って、} sup(S_\alpha) \leq \omega_1$$

証明.$\nu \in S_\alpha$ならば、$L_\nu[A \cap \alpha] \models$ "αは唯一の uncountable cardinal"であるから、明らかである。

5.2. 定義.$\xi \leq \omega_1$に対し、$\alpha(\xi) \in \bar{S}^0$を次のように定める:

$$\alpha(\xi) = min\{\alpha \in \bar{S}^0 | \ \forall\zeta < \xi \forall\nu(\nu \in S_{\alpha(\zeta)} \rightarrow \nu < \alpha)\}$$

すると、(a) の場合を考えているので。$\alpha(\xi)$ は全ての$\xi \leq \omega_1$に対して定義される。また、$\langle \alpha(\xi) | \xi \leq \omega_1 \rangle$は増加列であり、従って、$\alpha(\omega_1) = \omega_1$である。

5.3. 定義.$\mathcal{S} \subseteq \bar{\mathcal{S}}$を

$$\mathcal{S} = \{(\alpha, \nu) \in \bar{\mathcal{S}} | \ \exists\xi \leq \omega_1(\alpha = \alpha(\xi))\}$$

と定める。従って、定義 3.2. の記号を用いれば、

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\xi \leq \omega_1} (\{\alpha(\xi)\} \times S_{\alpha(\xi)})$$

であり、また、定義 2.1. のように S^0, S^1等を定めると、

$$\begin{aligned} S^0 &= \{\alpha(\xi) | \ \xi \leq \omega_1\} \\ S^1 &= \bigcup_{\xi \leq \omega_1} S_{\alpha(\xi)} \\ S &= S^0 \cup S^1 \\ S_\alpha &= \text{定義3.2.の}S_\alpha, \quad \text{for } \alpha \in S^0 \end{aligned}$$

となる。この最後のものが、定義 3.2. で$\bar{S}_\alpha$と書かなかった理由である。そして、

$$\mathfrak{M} = (S, \mathcal{S}, \prec, (\pi_{\nu\tau})_{\nu \prec \tau})$$

とする。ただし、$\prec$は $\lhd$ の S^1への制限であり、$\pi_{\nu\tau}$は定義 4.1. のものである。

5.4. 補題.$(\alpha, \nu), (\alpha', \nu') \in \mathcal{S}$ & $\alpha < \alpha' \ \to \ \nu < \alpha'$.
証明.$\alpha = \alpha(\zeta), \ \alpha' = \alpha(\xi)$ とすると、$\langle \alpha(\xi) | \ \xi \leq \omega_1 \rangle$ が増加列なので、$\zeta < \xi$である。従って、定義 5.2. より明らかに、$\nu < \alpha(\xi) = \alpha'$となる。

以上の準備のもとで、次のことを証明する。

5.5. 定理.$\mathfrak{M}$ は morass である。
証明. 前節、定義 4.1. の直後の注意や、補題 5.4. により、$\mathfrak{M}$ が (M0)-(M7) をみたすことを証明すれば十分である。しかし、前節で証明したように、$\overline{\mathfrak{M}}$は (M0)-(M7) をみたすので、$\mathfrak{M}$ については、(M0),(M3),(M4),(M5) 以外はそのまま成り立つ。そこで、これら四つについてのみ証明する。(M0),(M5) は簡単なので先に示し、後から、(M3).(M4) を示すことにする。

(M0).(b) の、$\omega_1 = max(S^0) = sup(S^0 \cap \omega_1)$ のみが問題となる。まず、定義 5.2. に書いたように、$\alpha(\omega_1) = \omega_1$なので、$\omega_1 \in S^0$となり、最初の等号は成り立つ。次に、$\overline{\mathfrak{M}}$の (M0) により、

$$\omega_1 = sup(\bar{S}^0 \cap \omega_1)$$

であるから、$S^0 \cap \omega_1 = \{\alpha(\xi) | \ \xi < \omega_1\}$ は unbounded in ω_1となり、$\omega_1 = sup(S^0 \cap \omega_1)$ となる。(実は、定義 5.2. で、$\alpha(\xi)$ が全ての$\xi \leq \omega_1$に対して定義されるといったのは、このようにして証明されるのである。)

(M5).$\overline{\mathfrak{M}}$の (M5) の証明と全く同じである。$\lhd$ を$\prec$にするだけで良い。

(M3).$\alpha \in S^0, \ \tau \in S_\alpha, \ \bar{\alpha} < \alpha, \ \bar{\alpha}$:limit ordinal とし、

$$\{\alpha_\nu | \ \nu \prec \tau \wedge \alpha_\nu < \bar{\alpha}\} \text{ は unbounded in } \bar{\alpha}$$

と仮定する。すると、$\{\alpha_\nu |\ \nu \lhd \tau \wedge \alpha_\nu < \bar{\alpha}\}$ は unbounded in $\bar{\alpha}$ なので、$\overline{\mathfrak{M}}$が、(M3) をみたすことから、$\alpha_\nu = \bar{\alpha}$となる$\nu \lhd \tau$が存在する。$\tau \in S^1$なので、$\nu \in S^1$をいえば$\nu \prec \tau$となる。そのためには、$\bar{\alpha} \in S^0$をいえば良い。そこで、$\bar{\alpha} \notin S^0$と仮定する。従って、$\bar{\alpha} \neq \omega_1$である。$\mathfrak{M}$ は (M0) をみたすので、$\bar{\alpha} < \alpha(\xi)$ となる$\xi < \omega_1$が存在する。そこで、

$$\xi_0 = min\{\xi < \omega_1 | \bar{\alpha} < \alpha(\xi)\}$$

とおく。まず、$\bar{\alpha} < \alpha(\xi_0)$ だから、$\xi_0 = 0$ でないとして良い。もし、$\xi_0 = 0$ なら、$\alpha(\xi_0) = min(\bar{S}^0)$ なので、$\{\alpha_\nu |\ \nu \prec \tau \wedge \alpha_\nu < \bar{\alpha}\} = \emptyset$ となり、問題外だからである。そこで、$\xi_0 = \zeta + 1$ とする。すると、ξ_0の最小性と、$\bar{\alpha} \in S^0$により、

$$\alpha(\zeta) < \bar{\alpha} < \alpha(\xi_0).$$

ところが、これでは、$sup\{\alpha_\nu |\ \nu \prec \tau \wedge \alpha_\nu < \bar{\alpha}\} \leq \alpha(\zeta) < \bar{\alpha}$となって、unbounded in $\bar{\alpha}$とはならない。従って、ξ_0は limit ordinal である。しかし、このときは、

(1) $\quad \forall \zeta < \xi_0 \forall \nu (\nu \in S_{\alpha(\zeta)} \rightarrow \nu < \bar{\alpha})$

となってしまうので、$\alpha(\xi_0)$ の定義から、$\alpha(\xi_0) \leq \bar{\alpha}$となって、$\bar{\alpha} < \alpha(\xi_0)$ に矛盾してしまう。従って $\bar{\alpha} \in S^0$とならねばならず、これで (M3) がいえる。

以下は (1) の証明.$\zeta < \xi_0$, $\nu \in S_{\alpha(\zeta)}$とすると、$\zeta < \zeta + 1 < \xi_0$なので

$$\nu < \alpha(\zeta + 1) < \bar{\alpha}$$

となり、(1) がいえる。

(M4).$\alpha \in S^0$とし、$\tau \in S_\alpha$がS_αの極大元でないとする。また、$\alpha = \alpha(\xi)$ としておく。明らかに、$\xi \leq \alpha$ である。まず、$\overline{\mathfrak{M}}$が (M4) をみたすことと、$\alpha(0) = min(\bar{S}^0)$ により、$\xi \neq 0$ がわかる。そこで、$\overline{\mathfrak{M}}$の (M4) の証明のように、$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$をとる。すなわち、$\lambda \in S_\alpha, \tau < \lambda$であり、さらに、

$$D_\tau < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda, \quad L_{\lambda_1}[A \cap \alpha], L_{\lambda_2}[A \cap \alpha] \text{は共に admissible.}$$

$\mu < \alpha$を任意にとる。ここでは、次のような、$X \in L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$を作る。

$$\begin{cases} X \prec L_{\lambda_1}[A \cap \alpha] \\ X \cap \alpha \text{は順序数で、} \mu \leq X \cap \alpha < \alpha \ \&\ X \cap \alpha \in S^0 \\ \alpha, A \cap \alpha, \tau, D_\tau, p_\tau \in X \end{cases}$$

今、$\overline{\mathfrak{M}}$の (M4) の証明で作ったYのことを思い出すと、Yは、$\theta, \alpha, A \cap \alpha$等をパラメーターとして$\Sigma_1^{L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]}$であった。ここで、$\theta$以外のパラメーターは固定されているから、$Y$を$Y(\theta)$ と書くことにすれば、$Y(\theta)$ はθに対して、一意的に決まり、しかも$\Sigma_1^{L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]}$である。そこで、$L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$の中で、$\Sigma_1$-Recursion によって求める$X$を構成することにする。尚、$Y(\theta)$ の作り方から、

$$\theta_1 \leq \theta_2 \ \rightarrow\ Y(\theta_1) \subseteq Y(\theta_2)$$

であることに注意しておく。

以下では、$L_{\lambda_2}[A\cap\alpha]$の中で考える。まず、$A\cap\alpha\in L_\tau[A\cap\alpha]\in L_{\lambda_2}[A\cap\alpha]$である。

$$\begin{aligned}\mathcal{S}'=\{(\beta,\nu)\in\alpha\times\alpha|\omega<\beta<\nu\wedge L_\nu[A\cap\beta]\models\forall\delta\exists\gamma(\gamma>\delta\wedge Adm(L_\gamma[A\cap\beta]))\\ \wedge L_\nu[A\cap\beta]\models\text{“}\forall\delta<\beta\exists f(f:\omega\to\delta\text{ onto})\\ \wedge\beta\text{は regular}\wedge\beta\text{は最大の cardinal”}\}\end{aligned}$$

とする。すると、$\alpha\times\alpha\in L_{\lambda_2}[A\cap\alpha]$であり、また、$L_\nu[A\cap\beta]\models\cdots$のところは、$L_\nu[A\cap\beta]$が$L_\tau[A\cap\alpha]$の中で構成できることと、$L_\tau[A\cap\alpha]\in L_{\lambda_2}[A\cap\alpha]$であることから、$\Delta_0^{L_{\lambda_2}[A\cap\alpha]}(\{L_\tau[A\cap\alpha],A\cap\alpha\})$と考えて良いので、$\Delta_0$-Separation によって、$\mathcal{S}'\in L_{\lambda_2}[A\cap\alpha]$がわかる。また、$\mathcal{S}'$の定義から、容易に

$$\mathcal{S}'=(\alpha\times\alpha)\cap\bar{\mathcal{S}}$$

がわかる。さらに、

$$\mathcal{S}'^0=\{\beta<\alpha|\ \exists\nu<\alpha(\beta,\nu)\in\mathcal{S}'\}$$
$$\mathcal{S}'^1=\{\nu<\alpha|\ \exists\beta<\alpha(\beta,\nu)\in\mathcal{S}'\}$$

とすれば、Δ_0-Separation により、$\mathcal{S}'^0,\mathcal{S}'^1\in L_{\lambda_2}[A\cap\alpha]$である。ここで、$\Sigma_1$-Recursion により、$f:\xi\to\alpha$を

$$f(\zeta)=min\{\beta\in\mathcal{S}'^0|\ \forall\eta<\zeta\forall\nu<\alpha((f(\eta),\nu)\in\mathcal{S}'\to\nu<\beta)\}$$

とする。ここで、ξは、$\alpha=\alpha(\xi)$となる$\xi\le\alpha$である。明らかに、$f\in L_{\lambda_2}[A\cap\alpha]$となる。

Claim.1.$f=\langle\alpha(\zeta)|\ \zeta<\xi\rangle$.

証明. これは、$L_{\lambda_2}[A\cap\alpha]$の中の議論ではないことに注意しておく。まず、明らかに

(1) $\quad\mathcal{S}'^0\subseteq\bar{\mathcal{S}}^0\cap\alpha$

である。次に

(2) $\quad\beta\in\mathcal{S}^0\cap\alpha\ \to\ \beta\in\mathcal{S}'^0\quad$ i.e., $\mathcal{S}^0\cap\alpha\subseteq\mathcal{S}'^0$.

である。まず、これを示すために、$\beta\in\mathcal{S}^0\cap\alpha$とすると、$\beta=\alpha(\zeta),\zeta<\xi$とできる。また、$\mathcal{S}^0\subseteq\bar{\mathcal{S}}^0$なので、$(\beta,\nu)\in\bar{\mathcal{S}}$となる$\nu$がある。すると、$\nu\in\mathcal{S}_\beta=\mathcal{S}_{\alpha(\zeta)}$だから、$\alpha(\xi)$の定義により、$\nu<\alpha(\xi)=\alpha$となる。従って、

$$(\beta,\nu)\in\bar{\mathcal{S}}\cap(\alpha\times\alpha)=\mathcal{S}'$$

となるので、$\beta\in\mathcal{S}'^0$である。これで (2) がいえた。そこで claim を示すために、$\zeta<\xi$を任意にとり、

$$\eta<\zeta\ \to\ f(\eta)=\alpha(\eta)$$

と仮定する。まず、$\beta=\alpha(\zeta)$とすると、$\alpha(\zeta)<\alpha(\xi)=\alpha$なので、(2) により、$\beta\in\mathcal{S}'^0$である。さらに、$\eta<\zeta,\nu<\alpha$に対し、$(f(\eta),\nu)\in\mathcal{S}'$とする。すると、帰納法の仮定により、$(\alpha(\eta),\nu)\in\mathcal{S}'\subseteq\bar{\mathcal{S}}$だから、$\nu<\alpha(\zeta)=\beta$である。従って、$f(\zeta)$が定義され、$f(\zeta)\le\beta<\alpha$であることはわかる。そこで、$\beta\le f(\zeta)$をいうため、$\eta<\zeta,\nu\in\mathcal{S}_{\alpha(\eta)}$とする。従って、$\alpha(\zeta)$の定義から、$\nu<\alpha(\zeta)<\alpha$である。従って、帰納法の仮定により、

$$(f(\eta),\nu)=(\alpha(\eta),\nu)\in\bar{\mathcal{S}}\cap(\alpha\times\alpha)=\mathcal{S}'$$

となるので、$f(\zeta)$の定義により、$\nu<f(\zeta)$. また、$f(\zeta)\in\mathcal{S}'^0\subseteq\bar{\mathcal{S}}^0$なので、これで、$\beta=\alpha(\zeta)\le f(\zeta)$. 従って、$f(\zeta)=\beta=\alpha(\zeta)$となるので、claim は証明された。

この claim により、

$$\mathcal{S}^0\cap\alpha=\{\alpha(\zeta)|\ \zeta<\xi\}=range(f)$$

となるので、$f\in L_{\lambda_2}[A\cap\alpha]$により、

$$\mathcal{S}^0\cap\alpha\in L_{\lambda_2}[A\cap\alpha]$$

がわかる。さらに、

Claim.2.$sup(S^0 \cap \alpha) = \alpha$.

証明.$sup\{\alpha(\zeta) |\ \zeta < \xi\} = \alpha(\xi)$ をいえば良い。そのために、ξが limit ordinal であることを示す。(M4) の証明の初めに書いたように、$\xi \neq 0$ であるから、ξが limit ordinal でなかったとすると、$\xi = \zeta + 1$ とできる。$\alpha(\zeta) < \omega_1$だから、(M0) により、$sup(S_{\alpha(\zeta)}) = max(S_{\alpha(\zeta)}) \in S_{\alpha(\zeta)}$であり、また、従って、

$$max(S_{\alpha(\zeta)}) < \alpha(\xi) = \alpha$$

である。さて、$\overline{\mathfrak{M}}$は (M4) をみたすので、$max(S_{\alpha(\zeta)}) < \alpha_\nu < \alpha$となるような$\nu \lhd \tau$がある。ところがこの場合、$\alpha(\xi) = \alpha(\zeta + 1) \leq \alpha_\nu < \alpha = \alpha(\xi)$ となるのでこれは矛盾である。従って、ξは limit ordinal でなければならない。

さて、$\beta = sup\{\alpha(\zeta) |\ \zeta < \xi\}$ とする。明らかに$\beta \leq \alpha(\xi)$ である。そこで、$\beta < \alpha(\xi)$ と仮定する。$\zeta < \xi, \nu \in S_{\alpha(\zeta)}$とする。すると、$\zeta + 1 < \xi$だから、

$$\nu < \alpha(\zeta + 1) \leq \beta$$

となる。故に、$\overline{\mathfrak{M}}$の (M4) により、$\beta \leq \bar{\alpha} < \alpha = \alpha(\xi)$ となる$\bar{\alpha} \in \bar{S}^0$をとれば、

$$\forall \zeta < \xi \forall \nu (\nu \in S_{\alpha(\zeta)} \to \nu < \bar{\alpha})$$

となるので、$\alpha(\xi) \leq \bar{\alpha} < \alpha(\xi)$ となって不合理。従って、$\beta = \alpha(\xi)$ でなければならず、これで claim は示された。

以上の準備のもとで、$X_n, \bar{\alpha}_n$ $(n < \omega)$ を次のように定める。まず、

$$X_0 = Y(\mu)$$

とする。すると、$Y(\mu) \cap \alpha \in \alpha$なので、claim.2. により、$Y(\mu) \cap \alpha \leq \beta \in S^0 \cap \alpha$となる$\beta$が存在するので、$X_0 = Y(\mu)$ だから

$$\bar{\alpha}_0 = min\{\beta \in S^0 \cap \alpha |\ X_0 \cap \alpha \leq \beta\}$$

とおく。すると、$\bar{\alpha}_0 < \alpha$なので、$Y(\bar{\alpha}_0)$ が定義されるから、

$$X_1 = Y(\bar{\alpha}_0)$$

とし、

$$\bar{\alpha}_1 = min\{\beta \in S^0 \cap \alpha |\ X_1 \cap \alpha \leq \beta\}$$

とする。以下、このようにして、$X_n, \bar{\alpha}_n$を定める。即ち、

$$X_{n+1} = Y(\bar{\alpha}_n), \quad \bar{\alpha}_{n+1} = min\{\beta \in S^0 \cap \alpha |\ X_{n+1} \cap \alpha \leq \beta\}$$

である。すると、列$\langle X_n |\ n < \omega \rangle$, $\langle \bar{\alpha}_n |\ n < \omega \rangle$ は共に$\Sigma_1^{L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]}$である。従って、

$$X = \bigcup \{X_n |\ n < \omega\}, \quad \bar{\alpha} = sup\{\bar{\alpha}_n |\ n < \omega\}$$

とすると、$X, \bar{\alpha} \in L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$である。また、$\mu \leq X_0 \cap \alpha \leq \bar{\alpha}_0 \leq X_1 \cap \alpha \leq \bar{\alpha}_1 \leq \cdots$ となるので、

$$\mu \leq \bar{\alpha}_0 \leq \bar{\alpha}_1 \leq \cdots\cdots \leq \bar{\alpha}$$

となり、従って、

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots\cdots \subseteq X$$

となる。ここで、各$n < \omega$に対して、$X_n \prec L_{\lambda_1}[A \cap \alpha]$だから、

$$X \prec L_{\lambda_1}[A \cap \alpha]$$

となる。また、$\bar{\alpha} = X \cap \alpha$も容易にわかる。さらに、$\langle \bar{\alpha}_n | n < \omega \rangle \in L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$なので、

$L_{\lambda_2}[A\cap\alpha] \models$ "$\alpha > \omega \wedge \alpha$は regular"により、$\bar{\alpha} < \alpha$である。また、

$$\alpha, A\cap\alpha, \tau, D_\tau, p_\tau \in X$$

は明らかなので、後は、$X\cap\alpha = \bar{\alpha} \in S^0$であれば、$X$が求めるものであることがわかる。このことの証明は (M3) におけるものと全く同様にしてできる。各 n に対し、$\bar{\alpha}_n \in S^0$に注意すれば良い。これで、求める Xがわかった。後は$\overline{\mathfrak{M}}$の (M4) の証明と同様にすれば良い。即ち、

$$\pi^{-1} : X \cong L_\beta[A\cap\bar{\alpha}]$$

としたとき、$\nu = \pi^{-1}(\tau)$ とすれば、$\bar{\alpha} = \alpha_\nu, \nu \lhd \tau$となるが、$\bar{\alpha}\in S^0$なので、$\nu\in S^1$となり、それで、$\nu \prec \tau$がわかる。

これで、$\mathfrak{M}$ が morass であることがわかった。

次に (b) の場合を考える。まず、次のことがいえる。

5.6. 補題.$sup(S_\alpha) = \omega_1$となる$\alpha < \omega_1$は一つしかない。

証明.α, α'がこのようなものであったとする。まず、$\overline{\mathfrak{M}}$が (M0) をみたすので、

$$sup(S_\alpha) \in S_\alpha, \quad sup(S_{\alpha'}) \in S_{\alpha'}$$

である。すなわち、$(\alpha, \omega_1), (\alpha', \omega_1) \in \bar{S}$であるが、補題 3.3. により、$\alpha = \alpha'$となる。

そこで、(b) の場合は、そのような唯一のαを$\tilde{\alpha}$とし、定義 5.2. の$\alpha(\xi)$ を

$$\alpha(\xi) = min\{\alpha\in\bar{S}^0 |\ \alpha > \tilde{\alpha} \wedge \forall\zeta < \xi\forall\nu(\nu\in S_{\alpha(\zeta)} \to \nu < \alpha)\}$$

と定義し直して、後は同様にやれば良い。尚、$\alpha(0)$ が$\tilde{\alpha}$の$\bar{S}^0$中での直後元であることに注意しておく。これで、(b) の場合には、定義し直した $\mathfrak{M}$ が morass になることがわかる。以上で、定理 3.1. の証明が終った。

最後に、(κ,1)-morass の存在証明についての注意をしておく。まず、$V = L[A]$ & $A \subseteq \kappa$ とし、$\kappa \geq \omega_1$を regular cardinal とする。(κ,1)-morass は、(ω_1,1)-morass(定義 2.1) の ω_1,ω_2 をそれぞれ、κ,κ^+ に変えれば良いだけなので、ここで改めて定義はしない。κの性質により、二つの場合に分ける。

まず、κが succesor cardinal のときを考える。μを cardinal とし、$\kappa = \mu^+$とする。まず、定義 3.2. で

$$\begin{aligned}\bar{S} = \{(\alpha,\nu)|\ &\mu < \alpha \leq \mu^+ \wedge \alpha < \nu < \mu^{++}\\ &\wedge\forall\beta<\nu\exists\gamma<\nu(\beta<\gamma\wedge L_\gamma[A\cap\alpha]\text{は admissible})\\ &\wedge L_\nu[A\cap\alpha] \models \text{“}\forall\beta<\alpha\exists f(f:\mu\to\beta\text{ onto})\\ &\qquad\wedge\alpha\text{は regular}\wedge\alpha\text{は最大の cardinal”}\}\end{aligned}$$

とし、以下、

3.5. 補題.$\nu\in S_\alpha$ならば、$\nu \leq (\mu^{++})^{L[A\cap\alpha]}$

3.6. 補題.$\nu\in S_\alpha$ならば、$\nu \neq (\mu^{+})^{L[A\cap\alpha]}$

3.7. 系.$\nu\in S_\alpha$, $\nu \neq (\mu^{++})^{L[A\cap\alpha]}$ならば、$L[A\cap\alpha] \models \neg(\nu$は cardinal).

のように変える。しかし、証明は同じである。さらに、補題 3.9., 定義 3.10. では、“$\nu \neq \omega_2^{L[A\cap\alpha]}$”を、“$\nu \neq (\mu^{++})^{L[A\cap\alpha]}$”に変え、定義 3.15. も同じように、“$\omega_2^{L[A\cap\alpha]}$”を “$(\mu^{++})^{L[A\cap\alpha]}$”にする。即ち、

$$\begin{aligned}\nu \lhd \tau \text{ iff } \nu \neq (\mu^{++})^{L[A\cap\alpha_\nu]} \ \&\ \tau \neq (\mu^{++})^{L[A\cap\alpha_\tau]} \ \&\ \alpha_\nu < \alpha_\tau \\ \&\ \exists\sigma(\sigma : D_\nu \to D_\tau \ \&\ \sigma \text{は (i)-(viii) の条件をみたす})\end{aligned}$$

である。尚、(i)-(viii) の条件はそのままである。
　次に、κが limit cardinal のときを考える。まず、定義 3.2. で

$$\begin{aligned}\bar{S} = \{(\alpha,\nu) |\ & \alpha \leq \kappa \wedge \alpha < \nu < \kappa^+ \\ & \wedge \forall\beta < \nu \exists\gamma < \nu(\beta < \gamma \wedge L_\gamma[A\cap\alpha] \text{は admissible}) \\ & \wedge L_\nu[A\cap\alpha] \models \text{“}\alpha\text{は regular} \wedge \alpha\text{は最大の cardinal”}\}\end{aligned}$$

とする。次に、

3.5. 補題.$\nu \in S_\alpha$ならば、$\nu \leq (|\alpha|^+)^{L[A\cap\alpha]}$
　(証明は、もし、$(|\alpha|^+)^{L[A\cap\alpha]} < \nu$であれば、

$$L_\nu[A\cap\alpha] \models \text{“}(|\alpha|^+)^{L[A\cap\alpha]}\text{は cardinal で } > \alpha\text{”}$$

となって、$L_\nu[A\cap\alpha] \models$ αは最大の cardinal に反するからである。)

とする。補題 3.6. は不要であり、

3.7. 系.$\nu \in S_\alpha$, $\nu \neq (|\alpha|^+)^{L[A\cap\alpha]}$ならば、$L[A\cap\alpha] \models \neg(\nu\text{は cardinal})$

とする。さらに、先ほどと同じように、補題 3.9., 定義 3.10., 定義 3.15. で、“$\omega_2^{L[A\cap\alpha]}$”を、“$(|\alpha|^+)^{L[A\cap\alpha]}$”に変える。
　このように変更すれば、後は全く同様にして、(κ,1)-morass の存在証明ができる。以上のことから、

5.7. 定理.

$$V = L[A] \ \&\ A \subseteq \kappa \ \&\ \kappa \geq \omega_1 \ \&\ \kappa\text{は regular ならば } (\kappa, 1)\text{-morassが存在する}$$

注意: 上の定理 5.7. については、κが successor cardinal のときでも、κが limit cardinal の場合の証明がそのままあてはまる。この論文で、κが successor cardinal と limit cardinal の二つの場合に分けたのは、$V = L$ ∧ κが successor cardinal のときには、

$$(\alpha,\nu), (\alpha',\nu') \in \bar{S} \ \Rightarrow\ \nu < \alpha'$$

が成り立つので、$S = \bar{S}$となり、5 の議論は不要となる。ただし、$\bar{S}$は$\kappa = \mu^+$のときの$\bar{S}$である。しかし、$V = L$でも、κが limit cardinal のときには、5 の議論が必要となる。例えば、$\mu < \kappa$を regular cardinal とすると、

$$(\mu, \mu^+), (\mu^+, \mu^{++}) \in \bar{S}$$

となってしまう。ただし、$\bar{S}$はκが limit cardinal のときの$\bar{S}$である。

参考文献

[1]. J.Barwise, "Admissible Sets and Structures," Springer, Berlin, 1975.

[2]. K.J.Devlin, "Aspects of Constructibility," Lecture Notes in Math.354., Springer, Berlin, 1973.

[3]. K.J.Devlin, "Constructibility," Springer, Berlin, 1984.

[4]. R.B.Jensen, *The fine structure of the constructible hierarchy*, Annals of Math.Logic 4 (1972), 229–308.

[5]. 篠田寿一, $V = L \Rightarrow \square_\kappa$, Handwritten Note.

[6]. L.Stanley, *A short course on gap-one morasses with a review of the fine structure of L*, Proc. Cambridge Summer School in Set Theory(1978), A.R.D.Mathias,ed.,"Surveys in Set Theory," London Math.Society Lecture Notes 87, 197-243, Cambridge Univ.Press, Cambridge, 1983.

[7]. G.Takeuti and W.Zaring, "Introduction to Axiomatic Set Theory, 2nd.ed.," GTM.1, Springer, Berlin, 1982.

[8]. 田中尚夫, "公理的集合論," 培風館, 東京, 1982.