数理解析研究所講究録
729 巻 1990 年 162-168

モノドロミー群について

熊本大学 理学部 鶴丸和宏 (Kazuhiro Tsurumaru)

超幾何微分方程式系

$$(1)\quad \begin{cases} (t-B)\dfrac{dX}{dt}=AX & A\in M_d(\mathbb{C}) \\ B=diag(\overbrace{\lambda_1,\ldots,\lambda_1}^{m_1},\overbrace{\lambda_2,\ldots,\lambda_2}^{m_2},\ldots,\overbrace{\lambda_r,\ldots,\lambda_r}^{m_r}), \\ A=(a_{ij})\sim diag(\overbrace{\rho_1,\ldots,\rho_1}^{n_1},\overbrace{\rho_2,\ldots,\rho_2}^{n_2},\ldots,\overbrace{\rho_q,\ldots,\rho_q}^{n_q}) \end{cases}$$

の有限な確定特異点の位置の集合 B と A の固有値の集合とに、$L(B)=m_1\cdot m_2\cdots m_r$, $L(A)=n_1\cdot n_2\cdots n_q$ なるラベルを付ける。

(1)のアクセサリー・パラメータの数は

$$N=d^2-d+2-\sum_{j=1}^{r}m_j^2-\sum_{k=1}^{q}n_k^2$$

であり、$N\leqq 0$ であればモノドロミー群は computable であることが知られている[1]。代表的な例は $L(B)=1\cdot 1\cdots 1$, $L(A)=(d-1)\cdot 1$ なる Jordan-Pochhammer 方程式と、それと対をなすラベル $L(B)=(d-1)\cdot 1$, $L(A)=1\cdot 1\cdots 1$ の Generalized Hypergeometric Equation である。

これ以外で、explicit にモノドロミー群が示されている例は $d=4$, $L(B)=2\cdot 1\cdot 1$, $L(A)=2\cdot 2$ ([2])だけのようなので、ここに $d\leqq 5$ で、次のラベルに対応するモノドロミー群を示す。

$$\begin{cases} d=4, & L(B)=2\cdot 2, & L(A)=2\cdot 1\cdot 1, \\ d=5, & L(B)=3\cdot 2, & L(A)=2\cdot 2\cdot 1, \\ d=5, & L(B)=2\cdot 2\cdot 1, & L(A)=3\cdot 2, \end{cases}$$

generic の場合のみであるが、non-generic の時の計算は [3] を参照。
以下、

$$\begin{cases} e_j=\exp(2\pi i\, a_{jj}) & (j=1,2,\ldots,d) \\ f_k=\exp(2\pi i\, \rho_k) & (k=1,2,\ldots,q) \end{cases}$$

とし、次の記法を導入する：

$$\begin{cases} \varphi(i)=e_i-f_1, \qquad \psi(i)=e_i-f_2, \\ \varphi(p_1\cdot p_2\cdots p_r)=\varphi(p_1)\cdot\varphi(p_2)\cdots\varphi(p_r), \\ \psi(p_1\cdot p_2\cdots p_r)=\psi(p_1)\cdot\psi(p_2)\cdots\psi(p_r), \end{cases}$$

$\underline{d=4,\ \ L(B)=2\cdot 2,\ \ L(A)=2\cdot 1\cdot 1}$

$$M_1=\begin{pmatrix} e_1 & 0 & (e_1-f_1)(e_3-f_1) & (e_1-f_1)(e_4-f_1) \\ 0 & e_2 & (e_2-f_1)(e_3-f_1) & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & e_3 & 0 \\ \beta_3 & \beta_4 & 0 & e_4 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{(e_2 - f_1)(e_4 - f_1)(f_1 f_3 + f_1 f_2 - e_1 e_4 - e_2 e_3)}{(f_1 f_3 + f_1 f_2 - e_1 e_3 - e_2 e_4)}$$

$$\beta_1 = \frac{f_1 f_3 + f_1 f_2 - e_1 e_4 - e_2 e_3}{f_1 (e_1 - e_2)(e_3 - e_4)}$$

$$\beta_2 = \frac{e_1 e_3 + e_2 e_4 - f_1 f_3 - f_1 f_2}{f_1 (e_1 - e_2)(e_3 - e_4)}$$

$$\beta_3 = \frac{e_1 e_3 + e_2 e_4 - f_1 f_3 - f_1 f_2}{f_1 (e_1 - e_2)(e_3 - e_4)}$$

$$\beta_4 = \frac{f_1 f_3 + f_1 f_2 - e_1 e_3 - e_2 e_4}{f_1 (e_1 - e_2)(e_3 - e_4)}$$

d = 5, $L(B) = 3 \cdot 2$, $L(A) = 2 \cdot 2 \cdot 1$

$$M_1 = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 & c_{14} & c_{15} \\ 0 & e_2 & 0 & c_{24} & c_{25} \\ 0 & 0 & e_3 & c_{34} & c_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & e_4 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & 0 & e_5 \end{pmatrix},$$

$$c_{14}=c_{15}=c_{24}=c_{34}=1$$

$$c_{25}=\frac{(e_1e_5-f_1f_2)\ (e_2e_4-f_1f_2)}{(e_1e_4-f_1f_2)\ (e_2e_5-f_1f_2)}$$

$$c_{35}=\frac{f_1^2f_2(e_2-e_3)(e_4-e_5)}{\psi(3)(e_1e_4-f_1f_2)}$$

$$\times\ \frac{(e_2e_3e_5-e_1e_5f_2+e_1f_1f_2-e_2f_1f_2-e_3f_1f_2+f_1f_2^2)}{(e_2e_5-f_1f_2)(e_3e_5-f_1f_2)}$$

$$c_{41}=\frac{\varphi(1)\psi(1)(e_3e_4-f_1f_2)(e_2e_4-f_1f_2)(e_1e_5-f_1f_2)}{f_1^2f_2^2(e_1-e_3)(e_1-e_2)(e_4-e_5)}$$

$$c_{42}=\frac{-\varphi(2)\psi(2)(e_1e_4-f_1f_2)(e_2e_5-f_1f_2)(e_3e_4-f_1f_2)}{f_1^2f_2^2(e_1-e_2)(e_2-e_3)(e_4-e_5)}$$

$$c_{43}=\frac{-\varphi(3)\psi(33)(e_1e_4-f_1f_2)(e_1e_5-f_1f_2)(e_2e_4-f_1f_2)}{f_1^3f_2^2(e_1-e_3)(e_2-e_3)^2(e_4-e_5)^2}$$

$$\times\ \frac{(e_2e_5-f_1f_2)(e_3e_4-f_1f_2)(e_3e_5-f_1f_2)}{(e_2e_3e_5-e_1e_5f_2+e_1f_1f_2-e_2f_1f_2-e_3f_1f_2+f_1f_2^2)}$$

$$c_{51}=\frac{-\varphi(1)\psi(1)(e_1e_4-f_1f_2)(e_2e_5-f_1f_2)(e_3e_5-f_1f_2)}{f_1^2f_2^2(e_1-e_3)(e_1-e_2)(e_4-e_5)}$$

$$c_{52}=\frac{\varphi(2)\psi(2)(e_3e_5-f_1f_2)(e_1e_4-f_1f_2)(e_2e_5-f_1f_2)}{f_1^2f_2^2(e_1-e_2)(e_2-e_3)(e_4-e_5)}$$

$$c_{53}=\frac{-\varphi(3)\psi(3)(e_1e_4-f_1f_2)(e_2e_5-f_1f_2)(e_3e_5-f_1f_2)}{f_1^2f_2^2(e_1-e_2)(e_2-e_3)(e_4-e_5)}$$

$d=5$, $L(B)=2\cdot 2\cdot 1$, $L(A)=3\cdot 2$

$$M_1=\begin{pmatrix} e_1 & 0 & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ 0 & e_2 & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & e_3 & 0 & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & 0 & e_4 & c_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & e_5 \end{pmatrix},$$

$$c_{13}=\frac{\varphi(1)}{f_1}, \quad c_{14}=\frac{\varphi(1)}{f_1}, \quad c_{15}=\frac{\varphi(1)}{f_1}, \quad c_{23}=\frac{\varphi(2)}{f_1}$$

$$c_{24}=\frac{\varphi(2)(e_1e_4-f_1f_2)(e_2e_3-f_1f_2)}{f_1(e_1e_3-f_1f_2)(e_2e_4-f_1f_2)}$$

$$c_{25}=\frac{\varphi(2)(e_2e_3-f_1f_2)}{f_1(e_1e_3-f_1f_2)}$$

$$c_{31}=\frac{\varphi(3)(e_1e_4-f_1f_2)(e_2e_3-f_1f_2)}{(e_1-e_2)(e_3-e_4)}$$

$$c_{32}=\frac{-\varphi(3)(e_1e_3-f_1f_2)(e_2e_4-f_1f_2)}{(e_1-e_2)(e_3-e_4)}$$

$$c_{35}=\frac{e_4\varphi(3)(e_2e_3-f_1f_2)}{f_1^2f_2(e_3-e_4)}$$

$$c_{41}=\frac{-\varphi(4)(e_1e_3-f_1f_2)(e_2e_4-f_1f_2)}{(e_1-e_2)(e_3-e_4)}$$

$$c_{42}=\frac{\varphi(4)(e_1e_3-f_1f_2)(e_2e_4-f_1f_2)}{(e_1-e_2)(e_3-e_4)}$$

$$c_{45}=\frac{-e_3\varphi(4)(e_2e_4-f_1f_2)}{f_1^2f_2(e_3-e_4)}$$

$$c_{51}=\frac{-e_2e_5(e_1e_4-f_1f_2)(e_1e_3-f_1f_2)}{f_1^2f_2^2(e_1-e_2)}$$

$$c_{52}=\frac{e_1e_5(e_1e_3-f_1f_2)(e_1e_3-f_1f_2)}{f_1^2f_2^2(e_1-e_2)}$$

$$c_{53}=\frac{-e_5(e_1e_3-f_1f_2)}{f_1f_2}$$

$$c_{54}=\frac{-e_5(e_1e_4-f_1f_2)}{f_1f_2}$$

ただ、がむしゃらに計算したのみですが、数式処理の実験例にでもなればと思い、結果のみを書き下しました[4]。

参考文献

[1] K. Okubo: On the group of Fuchsian equations, Seminor Report of Tokyo Metropolitan University, 1987

[2] T. Sasai: On a monodromy group and irreducibility conditions of a fourth order differential system of Okubo type, J.Reine Angew. Math. 299/300 (1978)

[3] M. Kohno: A note on the calculation of monodromy groups of hyper-geometric system, 数理解析研究所講究録“群と微分方程式の数式処理システムの研究” 663 (1988) 83-104

[4] 鶴丸和宏： 微分方程式の群についての研究，熊本大学修士論文，1990