

線形常微分方程式の標準形

熊本大自然科学 原岡喜重

(Yoshihige Haraoka)

定数係数の 1 階線形常微分方程式系

$$y' = Ay, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A \in \text{gl}(n, \mathbb{C})$$

は、よく知られている様に基本解行列

$$Y(x) = \exp(xA)$$

をもつ。これは次の様に解釈できる。即ち、解 $Y(x)$ は、Lie 群 $GL(n, \mathbb{C})$ の 1 パラメータ - 部分群 $G = \{ \exp(xA) \mid x \in \mathbb{C} \}$ の中で (コンパクト) 流れ、方程式の係数 A は G の Lie 環の元になる。逆にいうと、係数 A の属する Lie 環を任意にとると、解はそれの Lie 群の中で流れる。 A の属する Lie 環を小さくするほど解についての詳しいことが分り、とくに A で生成される Lie 環の元とするとその Lie 群が解の軌跡になる。今の場合解の軌跡が Lie 群 G に埋め尽くしてゐるが、これは解 $Y(x)$ が初等関

数であることと実は深く関っている。

係数が x に依存する方程式ではこのように簡単ではないが、例えは渋谷[4] §3.1 では、モノドロミー群を用いて上と同様の立場から微分方程式を考えている。それによると、解がある Lie 群 G の中を流れるとき、その方程式は、各点 x で G の Lie 環 \mathfrak{g} に含まれるような係数をもつ方程式に変換することができる。変換された方程式を標準形と呼ぶ。

以上の様な話を微分代数のこぼれを用いてとらえ、線形常微分方程式の標準形と Lie 環との関係で定義することを目指す。

§1. Picard-Vessiot 理論

この節では Picard-Vessiot 理論 (線形常微分方程式の微分 Galois 理論) について、後で用いる最小限のことを用意しておく。

以下標数 0 の常微分体 \mathcal{K} を考え、微分を δ で表す。

微分体 K に対し、その定数体を C_K で表す。即ち

$$C_K = \{ a \in K \mid \delta a = 0 \}.$$

微分体 \mathcal{K} の元 a 及び微分不定元 y に対し、

$$\delta a = a', \quad \delta^2 a = a'', \quad \dots, \quad \delta^m a = a^{(m)},$$

$$\delta y = y', \quad \delta^2 y = y'', \quad \dots, \quad \delta^m y = y^{(m)}$$

の様に記す。

微分体 K を 1 つ 固定し、 K -係数の線形常微分方程式

$$(E) \quad l(y) := y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad a_i \in K$$

を考へる。このとき K の微分拡大体 η の元 η_i ($1 \leq i \leq n$) であ

り、 n 次互み Δ 可成 η が存在する:

$$l(\eta_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\det \eta \neq 0.$$

但し

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 & \dots & \eta_n \\ \eta_1' & \dots & \eta_n' \\ \vdots & & \vdots \\ \eta_1^{(n-1)} & \dots & \eta_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

(η_1, \dots, η_n) は (E) の基本解系と云い、 η を基本解行列と云う。

(E) はシステムの形に書くこともできる。即ち、 $Y = (y_{ij})$ を微分不定元 y_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) からなる $n \times n$ 行列とすると、

(E) に対し

$$(E') \quad Y' = AY, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & & -a_1 \end{pmatrix} \in \text{gl}(n, K)$$

と定めると、 (E) の基本解行列 η が (E') の非退化な解 Y である。

さて、 K に $(\eta_1, \dots, \eta_n) \in E$ を添加して得られる微分拡大体 L とする。

$$L = K\langle \eta_1, \dots, \eta_n \rangle = K(\eta)$$

であるが、 $C_L = C_K$ が成り立つとき $L/K \in (E)$ の Picard-Vessiot 拡大という。 L の微分体として、自己同型 (微分と可換な自己同型) で K の元を動かすもの全体の群を L 、これを (E) の K 上の Picard-Vessiot 群といい、 $\text{Gal}(L/K)$ で表す。即ち

$$\text{Gal}(L/K) = \{ \sigma : L \rightarrow L, \text{自己同型} \mid \sigma(a) = a \text{ for } \forall a \in K \}.$$

基本解系 (η_1, \dots, η_n) と一つ定める毎に、 $\text{Gal}(L/K)$ の $GL(n, C_K)$ の中への表現が得られる。これは実際、基本解行列 η を用いて

$$\begin{array}{ccc} c : \text{Gal}(L/K) & \longrightarrow & GL(n, C_K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sigma & \longmapsto & \eta^{-1} \sigma(\eta) \end{array}$$

で与えられる。 $c(\text{Gal}(L/K))$ は、 $\text{Gal}(L/K)$ と同型な、 $GL(n, C_K)$ の代数部分群 G となる。これを (E) の K 上の η についての Picard-Vessiot 群と呼ぶ。従って $\text{Gal}(L/K)$ 自身が C_K 上の代数群としての構造をもつ。

Picard-Vessiot 理論とは、 $\text{Gal}(L/K)$ の代数部分群と L/K の微分中間体の間に Galois 対応が成ることを述べたものである。これは

により、方程式 (E) の解の超越性を、代数群 $\text{Gal}(Y/K)$ で測ることができるといえる。しかし方程式 (E) から $\text{Gal}(Y/K)$ を計算する一般的な手法はなく、個々の方程式に対して、モノドロミー群を通して計算する方法、微分代数的な計算で求める方法、 $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ の代数部分群の分類を用いる方法等が用いられている。

§2. 例.

ここでは、はじめに述べた様な微分方程式の標準形、概念を示唆する例をいくつか挙げる。この節では $(K, \delta) = (\mathbb{C}(x), d/dx)$ とする。このとき $C_K = \mathbb{C}$ 。

例 1.

$$(E_1) \quad y'' + \frac{1}{x} y' = 0.$$

システムの形に書けば

$$(E_1) \quad Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{x} \end{pmatrix} Y.$$

これは基本解系 $(1, \log x)$ をもち、基本解行列は

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & \log x \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

となる。(E₁) の K 上の γ についての Picard-Vessiot 群は

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

G_1 は G_a と同型で、従って連結。よって h_{ie} は

$$h_{11} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & h_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

今、

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

により方程式を変換する。即ち $Y = uZ$ とし Z についての
方程式を求めると、

$$(E_1^*) \quad Z' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Z$$

であり、係数は各点 x で h_{11} の値と等しい。

例 2

$$(E_2) \quad x(1-x)y'' + \left(\frac{1}{2} - x\right)y' + \frac{v^2}{4}y = 0, \quad v \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}.$$

これは Gauss の超幾何微分方程式で、パラメータ $(\alpha, \beta, \gamma) = \left(-\frac{v}{2}, \frac{v}{2}, \frac{v}{2}\right)$ の場合である。基本解系

$$(y_1, y_2) = \left((\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^v, (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^v \right)$$

をもつ。今、 $P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ のある点での分枝を適当に選んで
 $y_1, y_2 = 1$ が成り立つようにしてよい。基本解行列 γ につ
いての Picard-Vessiot 群は

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix} \mid c_{11}c_{22} = c_{12}c_{21} = 1 \right\}$$

G_2 は連結 \mathbb{R} 上の 単位元 の 連結成分 1 片

$$G_2^0 = \left\{ \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} \mid c_{11}c_{22} = 1 \right\}$$

\mathcal{L} の Lie 環 1 片

$$\mathcal{L}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ 0 & l_{22} \end{pmatrix} \mid l_{11} + l_{22} = 0 \right\}$$

変換

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & -a \end{pmatrix}, \quad a = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}$$

を 行 う と, (E_2) は

$$(E_2^*) \quad z' = \begin{pmatrix} a & \\ & -a \end{pmatrix} z$$

この 方 法, 係 数 係 数 対 各 点 x で \mathcal{L}_2 の 1 直 線 を と る。

例 3

$$(E_3) \quad y'' - \frac{1}{x} y' + \left(1 + \frac{3}{4x^2}\right) y = 0$$

これは $x=0$ を 確 定 特 異 点, $x=\infty$ を 不 確 定 特 異 点 に 属 する。以下

上の 例 と 同 様 の 記 号 を 流 用 し, 結 果 等 式 を 書 く。

$$(y_1, y_2) = (\sqrt{x} \cos x, \sqrt{x} \sin x)$$

$$G_3 = SO(2)$$

$$\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{so}(2) = \left\{ A \in \mathfrak{gl}(2) \mid A + {}^t A = 0 \right\}$$

$$u = \begin{pmatrix} \sqrt{x} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \sqrt{x} \end{pmatrix}$$

$$(E_3^*) \quad z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z.$$

§3. G -原始拡大

体 C 上定義された連結な代数群 G を考えよ。 C/K を微分拡大とし、 $C_L = C_K = C$ とする。 G の K -値点の全体を G_K で表す。

例として $G = GL(n)$ のときは

$$GL(n)_K = GL(n; K)$$

である。今 L 上に微分 δ が定義されているが、代数群 G に対して canonical に δ の logarithmic derivative

$$l\delta : G_L \rightarrow \text{Lie}(G)$$

が定義される。 G が $GL(n)$ の代数部分群の場合には、 $l\delta$ は

$$l\delta(\alpha) = \alpha' \alpha^{-1}, \quad \alpha \in G_L$$

で与えられる。

$\alpha \in G_L$ が K 上の G -原始元 (G -primitive) とおけるとは、

$$D\delta(\alpha) \in \text{Lie}(G_K) = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} K$$

が成り立つことである。ここで \mathfrak{g} は G の Lie 環を表す。

定義 G : \mathbb{C} 上の連結代数群, K : 常微分体, $C_K = \mathbb{C}$ とする。

微分体の拡大 L/K が G -原始拡大 とおけるとは、 K 上の G -原始元 α が存在して $L = K(\alpha)$ とおけると。

代数群 G に対し、 \mathfrak{g} の単位元の連結成分を G^0 と表す。

定理 K : 標数 0 の常微分体, L/K : Picard-Vessiot 拡大, $G = \text{Gal}(L/K)$ とする。このとき次を満たす K の有限次代数拡大 K^0 が存在する:

- (i) K^0 は L/K^0 で代数的閉,
- (ii) $C_{L/K^0} = C_K$ ならば、 L/K^0 は G^0 -原始拡大。

この定理が先に述べた線形常微分方程式の標準形の存在を保証する。その様子を説明しよう。方程式 (E) 或はシステム

$$(E') \quad Y' = AY, \quad A \in \text{ogl}(n, K)$$

を考へ、その基本解行列 $\eta \in E, \eta < 0$.

$$L = K(\eta)$$

が Picard-Vessiot 拡大であることが示される。(E') より $\eta' = A\eta$. 今、簡単のため、定理の K^0 として K 自身がとれた場合を考へよう。すると K 上の G -原始元 $\alpha \in G_L$ が存在して

$$L = K(\eta) = K(\alpha).$$

定義及び logarithmic derivative の定め方から

$$\mathcal{L}\delta(\alpha) = \alpha' \alpha^{-1} \in \text{Lie}(G_K).$$

従って $\mathcal{L}\delta(\alpha) = B$ とおけば、 α は

$$(E^*) \quad z' = Bz, \quad B \in \text{Lie}(G_K) \subset \text{gl}(n, K)$$

の解である。即ち α は求める標準形となる。(E*) も K 上の方程式となることに注意しておく。 η と α は

$$\eta = u\alpha, \quad u \in G_K$$

との関係で結びかへて、従って (E') の Picard-Vessiot 群と (E*) の Picard-Vessiot 群は同一型になることが分かる。言いかえれば、 K -valued 行列形変換

$$Y = uZ$$

により, 方程式 (E') が標準形 (E*) に変換された。このことを簡単に 変換 と呼ぶことにする。

定理の証明及び詳しい説明は省略するが、変換 u のとり方についてだけ述べよう。 $\eta = (\eta_{ij})$ とおくと、

$$\rho := \left\{ \varphi \in K[Y_{ij}]_{i,j} \mid \varphi(\eta) = 0 \right\}$$

とおくと、 ρ は多項式環 $K[Y_{ij}]$ の素ideal となる。この locus を W とおけば、 W は K 上の代数多様体となる。よって K の有限次代数拡大 K' を適当にとると、

$$u \in W_{K'}$$

なる u が存在する。 u (2行2列の形に表したものを) が求める変換である。

ここで §2 で挙げた例を振り返り、みる。

例1 では $K^0 = K$ とおくと、 K -valued な変換 $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{x} \end{pmatrix}$ により標準形 (E*) が得られた。このとき G_1 -原始元は

$$\alpha = u^T \eta = \begin{pmatrix} 1 & \log x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 2 での η の素ideal 是

$$\mathfrak{p} = (Y_1 Y_2 - 1, Y_1' - \frac{v^2}{4x(x-1)} Y_1^2, Y_2' - \frac{v^2}{4x(x-1)} Y_2^2)$$

と成るが $W_K = \emptyset$. ξ_2 を $K^0 = K(\sqrt{x(x-1)})$ とおいて

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & -a \end{pmatrix} \in W_{K^0}, \quad a = \frac{v}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}$$

を得る。一方 $K^0 \subset K(\eta) = L$ であるから $L/K^0 = L$. η は L/K^0 的 G_2^0 -原始拡大であり、 G_2^0 -原始元は

$$\alpha = u^{-1} \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}.$$

例 3 での η の素ideal 是

$$\mathfrak{p} = (Y_1^2 + Y_2^2 - x, Y_1' - \frac{1}{2x} Y_1 + Y_2, Y_2' - \frac{1}{2x} Y_2 - Y_1)$$

と成るが $W_K = \emptyset$. ξ_2 を $K^0 = K(\sqrt{x})$ とおくと K^0 -valued 変換

$$u = \begin{pmatrix} \sqrt{x} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \sqrt{x} \end{pmatrix} \in W_{K^0}$$

を得る。2 η とおいて L^{K^0}/K^0 的 G_3 -原始拡大であり、 G_3 -原始元は

$$\alpha = u^{-1} \eta = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

と成る。

参考文献

1. Y. Haraoka, G -primitive extensions for linear ordinary differential equations, *Kumamoto J. Math.*, 3 (1990).
2. E.R. Kolchin, *Differential Algebra and Algebraic Groups*, Academic Press, 1973.
3. M.F. Singer, Algebraic relations among solutions of linear differential equations: Fano's theorem, *Amer. J. Math.*, 110 (1988).
4. 渋谷泰隆, 複素領域における線形常微分方程式, 紀, 国屋,