数理解析研究所講究録
731巻 1990年 1-12

Cut-free systems for some tense logics

鹿島　亮　(Ryo Kashima)
東京工業大学　理学部　情報科学科

はじめに

Gentzen は，古典論理に対してＬＫと呼ばれる形式的体系を与え，ＬＫにおいては cut と呼ばれる推論規則は不要である，という有名なＬＫの基本定理（cut-elimination theorem）を証明した．このＬＫは非常に整然としたきれいな体系であり，しかも cut-free である（cut-elimination theorem が成り立つ）ことから，これは，無矛盾性の証明や決定手続きなど，古典論理についての多くの有益な情報を我々に与えてくれている．

このように，ＬＫが古典論理に対する非常に良い形式化であるので，非古典論理について研究する際にも，それがＬＫ風に形式化，特に cut-free に形式化できないかという問題がひとつの研究課題になってくる．本稿ではそうした研究のひとつとして，４つの時制命題論理 Kt，Kt4，Kt4.3，KtL に対して，ＬＫを拡張した cut-free な体系を与えた．

ところで，これらの時制論理に対して cut-free な体系を与えようとしても，ＬＫを普通に拡張する，すなわち，様相記号に関する

新しい推論規則をＬＫにつけ加える，だけではうまくいかない．そこで，ＬＫが sequent を扱っているのに対して，本稿では sequent が tree状につながったものを扱う体系を与えた．このように拡張された体系は，もとのＬＫと比べると少々複雑に見えるが，cut-free であることや subformula-property などＬＫが持っていた特徴的な性質は保存されているので，これらは時制論理に対するかなり良い形式化であると考えられる．

定義１

formula は次の1)2)で定義される．

1）命題変数：p_0，p_1，… は formula である．

2）a，b が formula ならば，$\wedge ab$，$\vee ab$，$\rightarrow ab$，$\neg a$，$\boxed{P}a$，$\boxed{F}a$，Ⓟa，Ⓕa はすべて formula である．

$\boxed{P}a$，$\boxed{F}a$，Ⓟa，Ⓕa はそれぞれ，“aは過去のいつでも真であった”，“aは未来のいつでも真である”，“aは過去のある時点で真であった”，“aは未来のある時点で真である”を表現する論理式である．

以後，a，b，c などは，formula を表わすものとする．また，読みやすさのために，$\wedge ab$，$\vee ab$，$\rightarrow ab$ のことをそれぞれ，$a\wedge b$，$a\vee b$，$a\rightarrow b$ と書く．括弧も適当に使用する．

定義２

1）空でない集合Ｗ，Ｗ上の二項関係Ｒ，自然数にＷの部分集合

を割り当てる関数P，の３つ組　[W, R, P]　を（時制命題論理の Kripke）model という.

2)　model M = [W, R, P]，Wの要素 w，formula a に対して述語　$M, w \models a$　を，次のようにaの構成に関して帰納的に定義する.

命題変数 p_i に対しては，　$M, w \models p_i \Leftrightarrow w \in P(i)$,

$M, w \models a \wedge b \Leftrightarrow M, w \models a$ and $M, w \models b$,　$M, w \models a \vee b \Leftrightarrow$ $M, w \models a$ or $M, w \models b$,　$M, w \models a \rightarrow b \Leftrightarrow$ $M, w \not\models a$ or $M, w \models b$,　$M, w \models \neg a \Leftrightarrow M, w \not\models a$,

$M, w \models \boxed{P}\, a \Leftrightarrow \forall x \in W$ (if xRw then $M, x \models a$),

$M, w \models \boxed{F}\, a \Leftrightarrow \forall x \in W$ (if wRx then $M, x \models a$),

$M, w \models ⓟ\, a \Leftrightarrow \exists x \in W$ (xRw and $M, x \models a$),

$M, w \models ⓕ\, a \Leftrightarrow \exists x \in W$ (wRx and $M, x \models a$).

（ただし，　$M, w \not\models a$　は　not($M, w \models a$)　のこと．）

3)　model M = [W, R, P]，formula a が，Wの任意の要素 w に対して　$M, w \models a$　のとき，　$M \models a$　と書く.

model M = [W, R, P] の，Wを時点の集合，Rを時間の前後関係，P(i)を p_i が真になる時点の集合と見たとき，　$M, w \models a$ は“model M の時点 w においてaは真である”と解釈できる.

定義３

1)　model M = [W, R, P] に関する条件　tr.，co.，re.，(transitive, connected, reflexive) を次のように定義する.

tr.:　$\forall x, y, z \in W$　(if(xRy　and　yRz)　then　xRz).

co.:　$\forall x,y \in W \quad (x=y \ \text{or} \ xRy \ \text{or} \ yRx).$

re.:　$\forall x \in W \quad xRx.$

2）時制命題論理　Kt, Kt4, Kt4.3, KtL　を次のような formula の集合として定義する.

$Kt \triangleq \{a \mid$ 任意の model M について $M \vDash a\}.$

$Kt4 \triangleq \{a \mid$ tr.を満たす任意の model M について $M \vDash a\}.$

$Kt4.3 \triangleq \{a \mid$ tr.,co.を同時に満たす任意の model M について $M \vDash a\}.$

$KtL \triangleq \{a \mid$ tr.,co.,re.を同時に満たす任意の model M について $M \vDash a\}.$

例えば,　$p_0 \to \boxed{P}$Ⓕ$p_0 \in Kt$,　$\boxed{P}p_0 \to \boxed{P}\boxed{P}p_0 \in Kt4$,
$(p_0 \wedge \boxed{P}p_0 \wedge \boxed{F}p_0) \to \boxed{P}\boxed{F}p_0 \in Kt4.3$,　$\boxed{P}p_0 \to p_0 \in KtL$　である.
また,　$Kt \subsetneq Kt4 \subsetneq Kt4.3 \subsetneq KtL$　である.

さて，本稿の目的はこれらの時制論理に対する cut-free な体系をつくることであるが，これらの体系を見やすいものにするために，記号“¬”を持たない，普通とは異なる論理式を扱うことにする.

定義4

inner-negation-formula（i-n-f と略する）は次の1)2)で定義される.

1）二種類の命題変数：p_0, p_1, …, n_0, n_1, …　は i-n-f である.

2）a, b が i-n-f ならば，$\wedge ab$, $\vee ab$, $\boxed{P}a$, $\boxed{F}a$,

Ⓟa, Ⓕa はすべて i-n-f である.

i-n-f の各命題変数 n_i は $\neg p_i$ を表現している.

以後, a, b, c などは, formula または i-n-f を表わすものとする. また, 読みやすさのために, $\wedge ab$, $\vee ab$ のことをそれぞれ, $a \wedge b$, $a \vee b$ と書く. 括弧も適当に使用する.

定義5

formula a に対して i-n-f a^* を, 次のようにaの長さに関して帰納的に定義する.

$p_i{}^* \triangleq p_i$, $(a \wedge b)^* \triangleq a^* \wedge b^*$, $(a \vee b)^* \triangleq a^* \vee b^*$, $(a \to b)^* \triangleq (\neg a)^* \vee b^*$, $(\boxed{P}\, a)^* \triangleq \boxed{P}(a^*)$, $(\boxed{F}\, a)^* \triangleq \boxed{F}(a^*)$, (Ⓟ$a)^* \triangleq$ Ⓟ(a^*), (Ⓕ$a)^* \triangleq$ Ⓕ(a^*), $(\neg p_i)^* \triangleq n_i$, $(\neg(a \wedge b))^* \triangleq (\neg a)^* \vee (\neg b)^*$, $(\neg(a \vee b))^* \triangleq (\neg a)^* \wedge (\neg b)^*$, $(\neg(a \to b))^* \triangleq a^* \wedge (\neg b)^*$, $(\neg\neg a)^* \triangleq a^*$, $(\neg \boxed{P}\, a)^* \triangleq$ Ⓟ$((\neg a)^*)$, $(\neg \boxed{F}\, a)^* \triangleq$ Ⓕ$((\neg a)^*)$, ($\neg$Ⓟ$a)^* \triangleq \boxed{P}((\neg a)^*)$, ($\neg$Ⓕ$a)^* \triangleq \boxed{F}((\neg a)^*)$.

定義6

i-n-f と, 2種類の開き括弧"P[","F["と, 閉じ括弧"]"から成る T-sequent という文字列を, 次の1)-4)で帰納的に定義する.

1) 空列は T-sequent である.

2) a が i-n-f で Γ が T-sequent ならば, aΓ は T-sequent である.

3) Γ と Δ がともに T-sequent ならば, P[Γ] Δ は T-sequent である.

4) Γ と Δ がともに T-sequent ならば, F[Γ] Δ は T-sequent である.

例えば, a , b , c , d , e が i-n-f のとき

a b P[c F[P[ ]] d] P[e]

は T-sequent である. ただし, 読みやすさのためにこれを

a , b , P[c , F[P[]], d], P[e]

と書くことにする.

以後 Γ や Δ などは T-sequent を表わすものとする.

一般に, Γ と Δ が T-sequent ならば Γ , Δ も T-sequent である.

定義 7

T-sequent X に対してその意味を表わす i-n-f m(X) を次の 1)-4)で帰納的に定義する. ただし, a は i-n-f であり, Γ と Δ は T-sequent である.

1) $m() \triangleq p_0 \wedge n_0$.

2) $m(a, \Gamma) \triangleq a \vee m(\Gamma)$.

3) $m(P[\Gamma], \Delta) \triangleq \boxed{P}\, m(\Gamma) \vee m(\Delta)$.

4) $m(F[\Gamma], \Delta) \triangleq \boxed{F}\, m(\Gamma) \vee m(\Delta)$.

例えば Γ = a , b , P[c , F[P[]], d], P[e] のとき,

$m(\Gamma) = a \vee b \vee \boxed{P}(c \vee \boxed{F}(\boxed{P}\perp \vee \perp) \vee d \vee \perp) \vee \boxed{P}(e \vee \perp) \vee$

$\perp$ である．（ただし $\perp \triangleq p_0 \wedge n_0$）

定義8

T-sequent を推論する体系 S-Kt（Sequential system for Kt）を，次の公理と推論規則によって定義する．ただし，a と b は任意の i-n-f であり，Γ と Δ と Π と Σ は任意の T-sequent である．

公理：　p_i, n_i　（i は任意の自然数）

推論規則：　以下の（exchange）～（Ⓕ）．

$$\frac{\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma}{\Gamma, \Pi, \Delta, \Sigma}\ (\text{exchange})$$

$$\frac{\Gamma}{\Delta, \Gamma}\ (\text{weakening})$$

$$\frac{a, a, \Gamma}{a, \Gamma}\ (\text{contraction})$$

$$\frac{P[\Gamma], \Delta}{\Gamma, F[\Delta]}\ (\text{turn}) \qquad \frac{F[\Gamma], \Delta}{\Gamma, P[\Delta]}\ (\text{turn})$$

$$\frac{a, \Gamma \qquad b, \Gamma}{a \wedge b, \Gamma}\ (\wedge)$$

$$\frac{a, \Gamma}{a \vee b, \Gamma}\ (\vee) \qquad \frac{a, \Gamma}{b \vee a, \Gamma}\ (\vee)$$

$$\frac{P[a], \Gamma}{\boxed{P}\, a, \Gamma}\ (\boxed{P}) \qquad \frac{F[a], \Gamma}{\boxed{F}\, a, \Gamma}\ (\boxed{F})$$

$$\frac{P[a, \Gamma], \Delta}{Ⓟ\, a, P[\Gamma], \Delta}\ (Ⓟ) \qquad \frac{F[a, \Gamma], \Delta}{Ⓕ\, a, F[\Gamma], \Delta}\ (Ⓕ)$$

S-K tの推論図の例:

$$\begin{array}{ll}
\underline{p_0, n_0} & (w) \\
\underline{P[\,], p_0, n_0} & (turn) \\
\underline{F[p_0, n_0]} & (\textcircled{F}) \\
\underline{\textcircled{F}\, p_0, F[n_0]} & (e) \\
\underline{F[n_0], \textcircled{F}\, p_0} & (turn) \\
\underline{n_0, P[\textcircled{F}\, p_0]} & (e) \\
\underline{P[\textcircled{F}\, p_0], n_0} & (\boxed{P}) \\
\underline{\boxed{P}\, \textcircled{F}\, p_0, n_0} & (\vee) \\
\underline{n_0 \vee \boxed{P}\, \textcircled{F}\, p_0, n_0} & (e) \\
\underline{n_0, n_0 \vee \boxed{P}\, \textcircled{F}\, p_0} & (\vee) \\
\underline{n_0 \vee \boxed{P}\, \textcircled{F}\, p_0, n_0 \vee \boxed{P}\, \textcircled{F}\, p_0} & (c) \\
n_0 \vee \boxed{P}\, \textcircled{F}\, p_0 & (n_0 \vee \boxed{P}\, \textcircled{F}\, p_0 = (p_0 \to \boxed{P}\, \textcircled{F}\, p_0)^*)
\end{array}$$

ただし, (e),(w),(c)は それぞれ, (exchange), (weakening), (contraction)

定理 (S-K tの完全性定理)

Γ はS-K tで推論できる iff $m(\Gamma) \in Kt^*$.

ただし, $Kt^* \triangleq \{a^* \mid a \in Kt\}$.

証明

参考文献[3].

定義 9

S-K t4 は S-K t に次の2つの推論規則を加えた体系である.

$$\frac{P[\textcircled{P}\, a, \Gamma], \Delta}{\textcircled{P}\, a, P[\Gamma], \Delta}\,(\textcircled{P}_{tr}) \qquad \frac{F[\textcircled{F}\, a, \Gamma], \Delta}{\textcircled{F}\, a, F[\Gamma], \Delta}\,(\textcircled{F}_{tr})$$

S-K t4 の推論図の例:

$$\begin{array}{ll}
\underline{\underline{p_0, n_0}} & (e),(w),(turn) \\
\underline{P[n_0, p_0]} & (\textcircled{P}) \\
\underline{\underline{\textcircled{P}\, n_0, P[p_0]}} & (e),(\boxed{P}) \\
\underline{\underline{\boxed{P}\, p_0, \textcircled{P}\, n_0}} & (e),(w),(turn)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
P[\textcircled{P}\,n_0, \boxed{P}\,p_0] & (\textcircled{P}_{tr}) \\ \hline
\textcircled{P}\,n_0, P[\boxed{P}\,p_0] & (e),(\boxed{P}) \\ \hline\hline
\boxed{P}\,\boxed{P}\,p_0, \textcircled{P}\,n_0 & (\vee),(e),(c)\text{を適当に行なう} \\ \hline\hline
\textcircled{P}\,n_0 \vee \boxed{P}\,\boxed{P}\,p_0 & (\textcircled{P}\,n_0 \vee \boxed{P}\,\boxed{P}\,p_0 = (\boxed{P}\,p_0 \to \boxed{P}\,\boxed{P}\,p_0)^*)
\end{array}$$

定理（S-Kt4の完全性定理）

Γ はS-Kt4で推論できる iff $m(\Gamma) \in Kt4^*$.

ただし, $Kt4^* \triangleq \{a^* \mid a \in Kt4\}$.

証明

参考文献[3].

定義10

S-Kt4.3 は S-Kt4 に次の推論規則を加えた体系である.

$$\frac{\Gamma \qquad \Delta \qquad \Pi}{\Sigma}\ (\mathrm{cross})$$

ただし,

$\Gamma = \overline{d}, \overline{\sigma}[\ \overline{a}, \Omega$,

$\Delta = \overline{\textcircled{P}\,e}, \overline{e}, \overline{\sigma}[\ \overline{\textcircled{F}\,c}, \overline{c}, \Omega$,

$\Pi = \overline{\textcircled{F}\,f}, \overline{f}, \overline{\sigma}[\ \overline{\textcircled{P}\,b}, \overline{b}, \Omega$,

$\Sigma = \overline{a}, \overline{\textcircled{P}\,b}, \overline{\textcircled{F}\,c}, \overline{\sigma}[\ \overline{d}, \overline{\textcircled{P}\,e}, \overline{\textcircled{F}\,f}, \Omega$,

$\overline{a}$ などは $a_1, a_2, \cdots, a_n$ という i-n-f の有限列または空列,

$\overline{a} = a_1, a_2, \cdots, a_n$ のとき $\overline{\textcircled{P}\,a} = \textcircled{P}\,a_1, \textcircled{P}\,a_2, \cdots, \textcircled{P}\,a_n$,

$\overline{\sigma}[$ は " P[" と " F[" から成る有限列または空列,

Ω は i-n-f と " P[" と " F[" と "] " から成る有限列または空列 （Ω の中では開き括弧と閉じ括弧がつりあわない

こともあるので Ω は必ずしも T-sequent ではない).

S-Kt4.3の推論図の例:

$$
\dfrac{
\dfrac{p_0, n_0}{P[F[n_0, p_0]]} \quad
\dfrac{p_0, n_0}{P[F[\textcircled{F} n_0, n_0, p_0]]} \quad
\dfrac{p_0, n_0}{P[F[\textcircled{P} n_0, n_0, p_0]]}
}{
\dfrac{
\dfrac{\textcircled{P} n_0, \textcircled{F} n_0, n_0, P[F[p_0]]}{n_0, \textcircled{P} n_0, \textcircled{F} n_0, \boxed{P}\,\boxed{F}\, p_0}
}{n_0 \vee \textcircled{P} n_0 \vee \textcircled{F} n_0 \vee \boxed{P}\,\boxed{F}\, p_0}
}\ (\mathrm{cross})
$$

$(n_0 \vee \textcircled{P} n_0 \vee \textcircled{F} n_0 \vee \boxed{P}\,\boxed{F}\, p_0 \;=\; ((p_0 \wedge \boxed{P}\, p_0 \wedge \boxed{F}\, p_0) \rightarrow \boxed{P}\,\boxed{F}\, p_0)^*)$

定理(S-Kt4.3の完全性定理)

Γ はS-Kt4.3で推論できる iff $m(\Gamma) \in Kt4.3^*$.

ただし, $Kt4.3^* \triangleq \{a^* \mid a \in Kt4.3\}$.

証明

参考文献[3].

定義11

S-KtL は S-Kt4.3 に次の2つの推論規則を加えた体系である.

$$
\dfrac{a, \Gamma}{\textcircled{P} a, \Gamma}\ (\textcircled{P}_{re}) \qquad\qquad \dfrac{a, \Gamma}{\textcircled{F} a, \Gamma}\ (\textcircled{F}_{re})
$$

(S-KtL においては(cross)を次の簡単な形の規則に変えてよい:

$$
\dfrac{\overline{\textcircled{P} c}, \overline{\sigma[}\ \overline{\textcircled{F} b}, \Omega \qquad \overline{\textcircled{F} d}, \overline{\sigma[}\ \overline{\textcircled{P} a}, \Omega}{\overline{\textcircled{P} a}, \overline{\textcircled{F} b}, \overline{\sigma[}\ \overline{\textcircled{P} c}, \overline{\textcircled{F} d}, \Omega}\ (\mathrm{cross}_{re})
$$

)

S-KtL の推論図の例:

$$
\dfrac{p_0, n_0}{\quad}\ (e)
$$

$$\dfrac{\dfrac{n_0, p_0}{\text{Ⓟ}\, n_0, p_0}\ (\text{Ⓟ}_{re})}{\text{Ⓟ}\, n_0 \vee p_0} \qquad (\text{Ⓟ}\, n_0 \vee p_0 = (\boxed{P}\, p_0 \rightarrow p_0)^*)$$

定理（S-KtLの完全性定理）

Γ はS-KtLで推論できる iff m(Γ)∈ KtL*.

ただし，KtL* ≜ {a*| a ∈ KtL}.

証明

参考文献[3].

定理（cut-elimination theorem）

S-Kt，S-Kt4，S-Kt4.3，S-KtL において次の推論規則 (cut) は admissible である.

$$\frac{\Gamma, a^* \qquad (\neg a)^*, \Gamma}{\Gamma}\ (\text{cut})$$

ただし a は任意の formula

証明

完全性定理より明らか.

参考文献

[1] D.M.Gabbay, Investigations in Modal and Tense Logics with Applications to Problems in Philosophy and Linguistics, D.Reidel, 1976.

[2] M.Sato, A study of Kripke-type models for some modal

logics by Gentzen's sequential method, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Vol.13(1977), pp.381-468.

[3] 鹿島亮, Cut-free systems for some tense logics, 東京工業大学修士論文, 1990.