

PRODUCTS OF STATIONARY SETS

静岡大・教育 大田 春外 (Haruto Ohta)

以下の結果は、下今大の家本宣幸氏と横濱国立大の玉野研一氏との共同研究によるものです。

ω_1 を可算順序数全体の集合とし、 ω_1 の部分集合はつねに ω_1 上の順序位相に関する相対位相を持つものとする。 $A \subseteq \omega_1$ が stationary であることを、 $A \in S(\omega_1)$ によることを表す。さて、 $A, B \in S(\omega_1)$ であるとき、 それらの直積 $A \times B$ はどの様な位相的性質を持つか。この問題について、 我々は次の定理を得た。

定理 1. $A, B \in S(\omega_1)$ に対して、 次の同値：

- (1) $A \cap B \in S(\omega_1)$,
- (2) $A \times B$ は shrinking 性を持つ,
- (3) $A \times B$ は 可算パラコンパクト,
- (4) $A \times B$ は 正規,

(5) $A \times B$ は ω_1 -コンパクト。

ここで、一般に、空間 X が shrinking 性をもつとは、 X の任意の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対し、開細分 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ で各 $\alpha \in A$ に対し、 $\text{cl}_X V_\alpha \subseteq U_\alpha$ であるものが存在することと言う。また、 ω_1 -コンパクト空間は、その任意の非可算部分集合が集積点を持つ様な空間である。

$A, B \subseteq S(\omega_1)$ を互いに素である様にとると、 $A \times B$ は定理 1 から正規では無い。これは、多分、最小の非可算濃度を持ち才で可算公理を満たす正規空間の積がやはり正規ではないことを示す最も簡単な例である（このより反例は、Todorčević [2] によって最初に与えられた）。

一方、もし $A \subseteq \omega_1$ が stationary でなければ、 A は ω_1 の、互いに素な有限個の開区間の和に含まれる。この事実から、次の系を得る。

系。任意の $A \subseteq \omega_1$ をとる、 A^2 は shrinking 性を持つ。従って、特に、 A^2 は正規、可算ハラコンパクトである。

定理 1 の (1) \rightarrow (2) の證明は、pressing down lemma と次の補題に支えられる。

補題. X を ω_1 可算公理を満たすパラコンパクト空間とする. このとき, 任意の $A \in S(\omega_1)$ に対して, $X \times A$ は Shrinking 性を持つ.

定理1は, 上の補題に於いて, X のパラコンパクト性を Shrinking 性に弱めることはないことを示している. これらのことから次の問題が起る: 任意の $A \in S(\omega_1)$ との積 $X \times A$ が Shrinking 性を持つ様か? オリ一般に, 任意の $A \in S(\omega_1)$ との積 $X \times A$ が正規とする空間 X は, どの様な空間か? これらの問題は未解決である.

(4), (5) \rightarrow (1) の証明を述べる. $A \cap B \notin S(\omega_1)$ であると仮定して, $A \times B$ が正規でも, ω_1 -コンパクトでもないことを示す. $A \cap B \cap C = \emptyset$ である, ω_1 の非有界開集合 C が存在する. $(A \cap C) \times (B \cap C)$ が正規でも, ω_1 -コンパクトでもないことを示せば十分だから, A, B の代りに, $A \cap C$ と $B \cap C$ を考へることは許されない, 初めから, $A \cap B = \emptyset$ であると仮定してもよい. このとき, 写像 $f: B \rightarrow A$ を

$$f(\beta) = \min \{ \alpha \in A : \alpha > \beta \} ; \quad \beta \in B$$

$$F = \{ f[B] \}$$

$$F_\alpha = \{ \alpha \} \times f^{-1}(\alpha)$$

とおくと、 F_α は $A \times B$ の用集合で、族 $\{F_\alpha : \alpha \in f[B]\}$ は discrete。ゆえに、 $A \times B$ は ω_1 -コンパクトである。更に、 $f[B]$ は、 $f^{-1}[A_1] \cup f^{-1}[A_2]$ の形で stationary である様な互いに素の集合 $A_1, A_2 \subset f[B]$ である。

$$\{\min f^{-1}(\alpha) : \alpha \in f[B]\} \in S(\omega_1)$$

であるから直ちに分る。そこで、

$$F_i = \bigcup \{F_\alpha : \alpha \in A_i\}, i = 1, 2$$

とおく。このとき、 F_1 と F_2 は $A \times B$ の互いに素の用集合である。ところが、pressing down lemma を適用すれば、これらは、 $A \times B$ の互いに素の用集合を分離することができる。ゆえに $A \times B$ は正規である。

一般に、正則濃度 κ の階数 Σ 、同じ記号 κ で表わす。 κ 關於して stationary である集合 A, B について、定理 1 と同じ結果は期待できない。しかし、次の定理は成立する。

定理 2. $\kappa \in$ 正則濃度とするとき、 $A, B \in S(\kappa)$ かつて、次は同値；

$$(1) \quad A \cap B \in S(\kappa),$$

$$(2) \quad A \times B \text{ は } \kappa\text{-コンパクト}.$$

特に、 κ が小さく最大の濃度 κ^+ が存在するとき、次の(3)

も (1) と同値である。

(3) $A \times B$ の単調増大構成被覆 $\{\cup\alpha; \alpha \in \kappa^+\}$ は
Shrink でよい。

系 (van Douwen - Lutzer [1]). κ を正則濃度,
 $A, B \in S(\kappa)$ 且互いに素とする。このとき, A と B は位相同
型でない。

証明. もし $A \approx B$ ならば, $A \times A \approx A \times B$. $\varepsilon = 30^\circ$
定理 2 より, $A \times A$ は κ -コンパクトであるが, $A \times B$ は
そうではない。

参考文献

- [1] E. K. van Douwen and D. J. Lutzer, On the classification of stationary sets, Michigan Math. J., 26 (1979), 47-64.
- [2] S. Todorcevic, On the Lindelöf property of Aronszajn trees, Proc. 6th. Prague Top. Symp. (1986), 577-588.