数理解析研究所講究録
732巻 1990年 8-18

# $\kappa$-metrizable space の stratification による一般化

横浜国大・工　玉野　研一　(Ken-ichi Tamano)

非可算個を含めた任意個の積に保存される位相的性質は，少ない．Hausdorff，正則，完全正則などの低い段階の分離公理や，compact性が保存されることはよく知られている．

Ščepin は，距離空間や局所compact位相群が $\kappa$-metrizable という性質を持っていて，その性質は任意個の積に保存されることを示した．Compact $\kappa$-metrizable空間が inverse limit を用いてきれいに特徴づけられるなど，$\kappa$-metrizable 空間は非常に興味深い空間ではあるが，Ščepin の論文は読みにくいし，また，読んでも表面的な理解しかできない．そこで，ここでは，私たちにとってなじみ深い stratification を用いて，$\kappa$-metrizable空間のもっている性質を抽出し，その性質がやはり任意個の積に保存されることを示すことを試みる．位相空間 X と，X の部分集合の族 $\mathcal{G}, \mathcal{C}$ に対して対応 $G: \mathcal{G} \times N \to \mathcal{C}$ で，

$U = \bigcup_{n \in N} G(U, n) = \bigcup_{n \in N} \mathrm{cl}\, G(U, n)$ をみたすものを一般的な stratification と考えることにする．

Stratification という概念は，Ceder の定義した $M_3$ 空間

の，異なった角度からの表現として Borges が導入したものだった．Stratification の導入は，2つの効用をもたらした．1つは，その新しい手法の導入により，今まで解決できなかった問題，例えば$M_3$空間の閉連続像の問題，が解決できたことである．そして，もう1つは，stratifiable空間をさらに一般化して semi-stratifiable空間を考えることによって，広範囲な応用を持つ，位相空間論にとって基本的な空間が得られたことである．

$\kappa$-metrizable空間を stratification を用いて解析し，さらに semi-stratification による一般化を考えようという本稿のささやかな試みは，まだ単に出発点の域を越えていないが、発展のさせかたによっては stratifiable空間の場合のように有効かもしれない．

位相空間は，すべて完全正則，Hausdorff空間とする．位相空間Xに対して，P（X）＝Xの部分集合全体の族，F（X）＝Xの閉集合全体の族，O（X）＝Xの開集合全体の族，R（X）＝Xの regular closed set 全体の族，RO（X）＝Xの regular open set 全体の族とする．Xの部分集合Aが regular closed (resp. regular open) とは，性質 A = cl int A (resp. A = int cl A) をみたすことである．自然数全体の集合をNとする．

## 1. $\kappa$-metrizable空間

ここでは，$\kappa$-metrizable空間の紹介をする．

位相空間Xと，$A \subset F(X)$に対して，

写像 $\rho: X \times A \longrightarrow I = [0, 1]$ は，性質

（1）$x \in F$ と $\rho(x, F) = 0$ は同値

（2）Fを固定したとき，$\rho(\cdot, F)$はXからIへの連続写像

をみたすとき，continuous annihilator for A という．

空間Xは，continuous annihilator

$\rho: X \times RO(X) \longrightarrow I$ for $RO(X)$で，性質

（3）(monotone) $F \subset F'$ のとき，

$$\rho(x, F) \geq \rho(x, F')$$

（4）(linearly additive) CをRO(X)の部分族で包含関係について全順序集合となっているものとすると，

$$\rho(x, \mathrm{cl} \bigcup C) = \inf_{F \in C} \rho(x, F)$$

をみたすものが存在するとき，$\kappa$-metrizable空間という．このとき，$\rho$を$\kappa$-metric とよぶ．

Stratifiable空間も，monotone continuous annihilator for F（X）をもつ空間として，annihilatorを用いて特徴づけられる．その意味では，$\kappa$-metrizable空間とstratifiable空間は親戚である．

$\kappa$-metrizable空間の性質をまとめておこう．定理4（1）以外はすべてŠčepinによる．

空間Xは，任意のregular closed set Fがゼロ集合である，すなわち，X上のある実数値連続関数fが存在して$F = f^{-1}(0)$と表されるとき，perfectly $\kappa$-normal（$= Oz$）であるという．

定理1（位置関係）．

距離空間や局所compact位相群は，$\kappa$-metrizableである．$\kappa$-metrizable空間は，perfectly $\kappa$-normalである．

定理2（位相的操作に対する保存性）．

（1）$\kappa$-metrizable空間の任意個の積は，$\kappa$-metrizableである．

（2）$\kappa$-metrizable空間のopen perfect連続写像による

像は $\kappa$-metrizable である.

Lašnev空間でさえ, 任意個の積が perfectly $\kappa$-normal とは限らないことを考えると定理2(1)は驚くべき結果である.

定理3(特徴づけ).

Xが compact空間のとき, Xが $\kappa$-metrizable であるための必要十分条件は, Xが, open map を projection とする $\sigma$-spectrum の極限と同相であることである. ここで, $\sigma$-spectrum とは, index set としての directed set が $\sigma$-complete で, 各 factor が可算base をもつ空間である inverse system のことである.

定理4(open tightness, cellularity).

(1) (Tkačenko) $\kappa$-metrizable空間の open tightness は高々可算である.

(2) Countably compact $\kappa$-metrizable空間は countable chain condition をみたす.

定理5(Klebanov 性).

Compact $\kappa$-metrizable空間Xは，Klebanov空間である．すなわち，Xのゼロ集合からなる任意の族Zにたいして，$\mathrm{cl}\bigcup Z$ はXのゼロ集合となる．

## 2. u空間，semi-u空間

ここでは，upper limitを用いて，新たにu空間，semi-u空間を導入する．$\kappa$-metrizable空間はupper limitを用いて，capacityをもつ空間として特徴づけられるいうŠčepinの定理にアイデアを得ている．

Xを位相空間とする．任意の集合$\Lambda$，$\Lambda$上の任意のfilter $\mathcal{F}$，$\{U(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \subset P(X)$ に対して，

$$\overline{\lim}_{\mathcal{F}} U(\lambda) = \bigcap_{E \in \mathcal{F}} \mathrm{cl} \bigcup_{\lambda \in E} U(\lambda)$$ と定義する．

空間Xは，次の性質をみたす対応

$G : RO(X) \times N \longrightarrow P(X)$ をもつとき，u空間（semi-u空間）であるという．

（a） $G(U, n)$ はXの開集合（閉集合），

（b） $U = \bigcup_{n \in N} G(U, n) = \bigcup_{n \in N} \mathrm{cl}\, G(U, n)$

（c） 各nについて、任意の集合$\Lambda$上の任意のfilter $\mathcal{F}$とRO（X）の任意の部分族｛U（$\lambda$）：$\lambda \in \Lambda$｝に対して，

$$\overline{\lim}_{\mathcal{F}}\, G(U(\lambda), n) \subset \operatorname{int} \overline{\lim}_{\mathcal{F}}\, U(\lambda).$$

空間Xは，性質（b）と，性質

（d） $U \subset V$ ならば $G(U, n) \subset G(V, n)$

をみたす対応 $G: RO(X) \times N \longrightarrow O(X)$ をもつとき，$\kappa$-stratifiable空間であるという．

Dimovは，$\kappa$-stratifiable空間がperfectly $\kappa$-normalであることを示した．

定理1’（位置関係）．

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{developable} \arrow[d] \\
\kappa\text{-metrizable} \arrow[r] & \text{u-space} \arrow[r] \arrow[d] & \text{semi-u-space} \arrow[d] \\
 & \kappa\text{-stratifiable} \arrow[d] & \text{regular closed} \\
 & \text{perfectly } \kappa\text{-normal} & \text{set が } G_\delta
\end{tikzcd}$$

定理1”.

（1） Developable だが, u-space ではない空間が存在する（Heath の例）.

（2） Lašnev空間, あるいはCW複体に対して, $\kappa$-metrizable であることは, metrizable であるための必要十分条件である.

定理2’（位相的操作に対する保存性）.

（1） u空間（semi-u空間）の任意個の積は, u空間（semi-u空間）である.

（2） u空間（semi-u空間）の open perfect 連続写像による像はu空間（semi-u空間）である.

u空間（semi-u空間）の積についての保存性を証明するには, Ščepin による次の補題を用いる. Compact 性が積に関して保存されることを示すときに ultrafilter を用いたように, ここでも ultrafilter を使用する. Ultrafilter は, 積に関してうまくふるまうことが多い.

補題.

$X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ を位相空間の積とし, $B_n(X)$ を, support が高々n個である basic open set 全体の集合とする. このとき, 任意の集合$\Lambda$, $\Lambda$上の ultrafilter$\mathcal{F}$と $B_n(X)$ の部分族 $\{U(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ に対して, 次の条件を満たすAの有限部分集合A' と $\mathcal{F}$の要素E' が存在する.

(1) E'の任意の要素$\lambda$に対して $A' \subset \text{support } U(\lambda)$

(2) $\overline{\lim}_{\mathcal{F}} U(\lambda) = \bigcap_{\alpha \in A'} \pi_\alpha^{-1}(\overline{\lim}_{\mathcal{F}} \pi_\alpha(U(\lambda)))$.

定理3'.

Compact空間Xに対して, Xが $\kappa$-metrizable であることと, Xがu空間であることは同値である.

定理4' (open tightness, cellularity).

(1) semi-u空間の open tightness は高々可算である.

(2) Countably compact semi-u空間は countable chain condition をみたす.

定理5'.

Compact semi-u空間Xにおいて, Xのゼロ集合からなる任意の可算族Zにたいして, $\mathrm{cl} \bigcup Z$ はXのゼロ集合となる.

## 3. 問題

次の問題は未解決である.

問題1. u空間は $\kappa$-metrizable か?

問題2. Compact semi-u 空間は $\kappa$-metrizable か?

問題3. Compact semi-u 空間は Klebanov空間か?

問題4. u空間, semi-u 空間を upper limit を用いないで特徴づけよ.

## 4. 参考文献

$\kappa$-metrizable空間については, つぎの Ščepin の3論文を参照されたい. 誤った結果をあとの論文で訂正したりしているので, 3論文を比較しながら読む必要がある.

1. E. V. Ščepin, Topology of limit spaces of uncountable inverse spectra, Russian Math. Surveys 31 (1976), 155-191.

2. _____, On $\kappa$-metrizable spaces, Math.

USSR Izvestija 14 (1980), 407-440.

3. _____, Functors and uncountable powers of compacta, Russian Math. Surveys 36 (1981), 1-71.

本文に出てきた，他の generalized metric spaces については，次の論文が要領よくまとめてある．

4. G. Gruenhage, Generalized metric spaces, in K. Kunen, J. E. Vaughan eds., Handbook of Set-theoretic Topology, North-Holland, 1984.

お詫び：講演日の直前に$\kappa$-metrizable空間がu空間になることの証明がわからなくなり，講演のときに$\kappa$-metrizable空間がu空間であるかどうかは未解決であると発表しましたが，後日，解決致しました．お騒がせして申し訳ありませんでした．