

## 三次元境界層の安定性に対する圧力勾配の影響

航技研 伊藤信毅 (Nobutake Itoh)

後退翼上の三次元境界層は横流れ速度を持つために二次元境界層に比べて低いレイノルズ数で不安定になりやすい。横流れ速度は翼の後退角  $\gamma$ 、翼弦方向（前縁に垂直方向）の圧力勾配  $p_x$ 、翼前縁に沿う方向の圧力勾配  $p_y$  に依存してその大きさを変える。前縁が流れに対して後退角を持つように置かれたくさびの上の流れに、さらに前縁に沿う方向の圧力勾配を加えたときにできる三次元境界層は上記の三要素の影響を全て含む。この流れを記述する境界層方程式の厳密解に対してオル・ゾンマーフェルト方程式に基づく安定計算を行ない、臨界レイノルズ数  $R_c$  の圧力勾配に対する変化を調べる。順圧力勾配  $p_x < 0$  の領域では、 $p_y$  を適当に選ぶことによって横流れ速度を抑えることができ、 $R_c$  の高い流れ、すなわち安定性の強い流れが得られる。

## 1. はじめに

三次元境界層の不安定と遷移機構を解明する研究は工学的応用の面で極めて重要なものであるにも拘わらず、二次元境界層の場合に比べて著しく遅れている。航空機の翼の大部分

は後退角を持つし、最近では前進翼の開発も考えられている。これらの翼上に発達する境界層は、外側のポテンシャル流に垂直な方向の速度成分、すなわち横流れ成分を持つ点で二次元境界層とは異なり、それよりずっと低いレイノルズ数で層流の不安定と乱流への遷移が起る。翼の抵抗を減らして航空機の燃費向上を狙う技術に、境界層を制御して、できるだけ層流のままに維持しようとする方法があるが、効率のよい制御法を開発するためには二次元境界層の遷移に関する研究成果だけでは不足である。三次元流に特有な不安定性や遷移過程の詳細に関する基礎研究をもっと推進させる必要がある。

後退翼上の境界層が後退角のない場合より低いレイノルズ数で不安定になり、その結果としてほゞポテンシャル流の方向に軸を持つ定常な渦列が形成されることは実験によって見出された(Gray 1952, Anscombe & Illingworth 1952)。この不安定は速度分布に変曲点が存在するために生じる非粘性型のもので、二次元境界層のトルミン・シュリヒティング型不安定とは起源を異にすることがStuart(Gregory, Stuart & Walker 1955)によって理論的に示されている。三次元境界層に対するオル・ゾンマーフェルト方程式を用いた系統的な安定計算はMack(1984), Dallmann & Bieler(1987)などによって行なわれ、翼の後退角と圧力勾配の影響がある程度明ら

かにされている。また壁面や流線の曲率が与える効果については Malik, Wilkinson & Orszag (1981) や Malik & Poll (1984) によって調べられ、これらが安定化の方向に作用することが示されている。なお、静止流体中に置かれた回転円盤上の流れも横流れを持つ代表的な三次元境界層であり、多くの安定解析が行なわれている (Cebeci & Stewartson 1980, Kobayashi, Kohama & Takamadate 1980, Itoh 1985 ほか)。

横流れ速度に起因する不安定は主として翼の後退角  $\gamma$ 、前縁に垂直な方向の圧力勾配  $p_x$ 、及び前縁に沿う方向の圧力勾配  $p_y$  の三つに影響されると考えられる。Mack (1984) や Dallmann & Bieler (1987) の研究は  $\gamma$  と  $p_x$  の影響を調べたものであり、 $p_y$  の安定性に与える影響については、筆者の知る限り、まだ理論的研究が行なわれていない。半無限平板が前縁に沿う方向に一定の圧力勾配を受けたときの流れを考えると、外側の非粘性流は放物形の流線を持ち、前縁に後退角がない場合でも境界層内に横流れ成分を生じる (例えば、Rosenhead 1963, Chap. 8 参照)。これに対して、 $p_x$  の方は後退角が存在するときに、それとの協力で始めて横流れを発生させることができる。即ち、横流れ速度は相互に独立な二つの要因から誘起されるので、一般的な三次元境界層の安定性を論じるには、両者の効果を含めた解析が必要である。

本論文では以上の論旨に沿って、後退角と二方向の圧力勾配の全てをもつ流れを設定し、それについての詳しい安定計算とそれぞれの効果に対する定性的及び定量的評価を与える。安定性の指標としてはオル・ゾンマーフェルト方程式の固有値を用いる。この方程式は平行流近似のもとで成立するので、レイノルズ数が低い所では有効性に疑問が残るけれども、安定性に関する研究の第一段階としては、すでに十分性質の知られているこの方程式の解を求め、既存の理論的及び実験的成果と比較するのが最良の策と考えられる。

## 2. 基本流

非圧縮流体中に置かれた後退翼の表面に沿って形成される三次元境界層の速度分布は一般に翼前縁の後退角、前縁に垂直な翼弦方向の圧力勾配および前縁に沿う方向の圧力勾配によって強く支配される。ここではそれら三要素の影響を含むなるべく単純なモデルで、しかも境界層方程式を厳密に満たす流れを導く。そのためには、半無限のくさび状物体が一様流に対して偏揺角をもつように置かれ、前縁に沿う方向にも圧力勾配を課せられている場合を想定するとよい。即ち座標系として、物体表面に沿って前縁に垂直な方向に  $x$ 、前縁に沿って  $y$ 、物体表面に垂直に  $z$  の直角座標を取り、時間を

t とする。各方向の速度成分を  $u$ 、 $v$ 、 $w$ 、圧力を  $p$ 、密度を  $\rho$ 、動粘性係数を  $\nu$  とするとき、物体まわりの非粘性流が

$$U_0 = A(x/L)^m, \quad V_0 = A\{\gamma_0 - \kappa_0(x/L)^{1-m}\}, \quad (2.1)$$

で表される場合を考える。ここで、 $L$  は  $x$  方向の代表長さ、 $A$ 、 $\gamma_0$ 、 $m$ 、 $\kappa_0$  は定数である。 $x$  方向と  $y$  方向の圧力勾配は

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -m\left(\frac{x}{L}\right)^{-1} \frac{\rho U_0^2}{L}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = (1-m)\kappa_0 \left(\frac{x}{L}\right)^{-2m} \frac{\rho U_0^2}{L}, \quad (2.2)$$

で与えられ、両式とも  $p_{xy} = 0$  を満たす。これから  $m$  と  $\kappa_0$  はそれぞれ  $x$  方向と  $y$  方向の圧力勾配を代表するパラメータと考えられる。一方物体形状との対応からみると、 $m$  はくさびの頂角に、 $\gamma_0$  は前縁の後退角にそれぞれ関係している。

外部流が (2.1) で表されるとき、三次元境界層方程式

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= U_0 \frac{dU_0}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= U_0 \frac{dV_0}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

は、 $y$  に依存しないつぎの相似解をもつ。

$$\begin{aligned} u &= U_0 F'(\zeta), \quad v = U_0 \left\{ \gamma_0 \left(\frac{x}{L}\right)^{-m} G(\zeta) - \kappa_0 \left(\frac{x}{L}\right)^{1-2m} H(\zeta) \right\}, \\ w &= -\frac{U_0}{2} \left(\frac{\nu}{U_0 x}\right)^{1/2} \{ (1+m)F(\zeta) - (1-m)\zeta F'(\zeta) \}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

ここで、相似変数は  $\zeta = z(U_0/\nu x)^{1/2}$  で定義され、' は  $\zeta$

に関する微分を表す。また、関数  $F$ 、 $G$ 、 $H$  はつぎの常微分方程式と境界条件を満たす解である。

$$\begin{aligned} F''' + \frac{1+m}{2} FF'' + m(1 - F'^2) &= 0, & G'' + \frac{1+m}{2} FG' &= 0, \\ H'' + \frac{1+m}{2} FH' + (1-m)(1 - F'H) &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$F(0) = F'(0) = G(0) = H(0) = 0, \quad F'(\infty), G(\infty), H(\infty) \rightarrow 1.$$

この中で  $F$  に関する方程式は Falkner & Skan (1930) によって解かれたものであり、 $G$  と  $H$  に関する方程式は線形であるから、(2.5)の数值解を得ることは容易である。

いま、(2.4)に与えられている速度分布から、外部非粘性流に沿う方向の速度成分  $u^*$  とそれに垂直な方向の横流れ速度成分  $v^*$  を計算するとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} u^* &= \sqrt{1+(\gamma-\kappa)^2} U_0 \left[ F' + \frac{\gamma-\kappa}{1+(\gamma-\kappa)^2} \left\{ \gamma m \frac{G-F'}{m} - \kappa(H-F') \right\} \right], \\ v^* &= \frac{U_0}{\sqrt{1+(\gamma-\kappa)^2}} \left\{ \gamma m \frac{G-F'}{m} - \kappa(H-F') \right\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここで、 $\gamma = \gamma_0 (x/L)^{-m}$ 、 $\kappa = \kappa_0 (x/L)^{1-2m}$ 、 $X = x/L$  である。

$u^*$  は通常の境界層型速度分布であるが、 $v^*$  は壁面上と境界層の外側で速度が0になることからその途中に変曲点を含み、流れを不安定にする効果をもっている。(2.5)から判るように関数  $F$ 、 $G$ 、 $H$  は  $x$  方向の圧力勾配を表すパラメータ  $m$  に依存する。そこで  $m$  を 0 に近づけた極限を考えてみると、

流れは外部流が放物型流線を持つときの平板上に形成される境界層に帰着する (Rosenhead 1963, Chap. 8)。このとき  $F$  は平板に沿う圧力勾配のない二次元境界層に対する Blasius 関数  $F_B(\zeta)$  に、 $G$  は  $F_B'(\zeta)$  に、 $H$  は Sowerby (1954) によって得られた関数  $H_B(\zeta)$  にそれぞれ一致する。したがって  $|m|$  の十分小さい値に対しては

$$\begin{aligned} F &= F_B(\zeta) + mf(\zeta) + O(m^2), & G &= F_B'(\zeta) + mg(\zeta) + O(m^2), \\ H &= H_B(\zeta) + mh(\zeta) + O(m^2), \end{aligned} \quad (2.7)$$

のような展開が可能であり、このとき  $v^*$  は

$$v^* \sim \gamma m \{g - f' + O(m)\} - \kappa \{H_B - F_B' + O(m)\} \quad (2.8)$$

の形に書ける。以上の解析から、境界層の横流れ速度は  $p_x$  と  $p_y$  に起因する二種類の成分から成立っていることが判る。 $y$  方向の圧力勾配はそれ自身単独でも横流れ速度を発生させるけれども、 $x$  方向の圧力勾配は後退角と結びついて始めて横流れ速度を誘起できるのである。

### 3. 攪乱方程式

前節で導かれた基本流に微小な波動攪乱を重ね合せ、その時間的消長を計算することによって、流れの安定性を判別す

る。諸量の無次元化を行なうために、 $x$  方向の代表長さを  $L$  とし、境界層厚さを  $\delta(x) = (\nu x/U_0)^{1/2}$  で定義する。さらに無次元パラメータ  $\varepsilon = \delta(L)/L$  を導入し、これが 1 に比べて十分小さい場合を考える。基準速度には外部非粘性流の翼弦方向速度  $U_0$  を用い、つぎの無次元化を行なう。

$$\begin{aligned} \frac{x}{L} &= X, & \frac{y}{L} &= Y, & \frac{z}{\delta(x)} &= \zeta, & \frac{U_0}{L} \left(\frac{x}{L}\right)^{-m} t &= T, \\ \frac{u}{U_0} &= U + \hat{u}, & \frac{v}{U_0} &= V + \hat{v}, & \frac{w}{U_0} &= \varepsilon W + \hat{w}, & & (3.1) \\ \frac{p}{\rho U_0^2} &= P + \hat{p}, & \frac{\delta(x)}{L} &= \varepsilon \Delta(X), & \frac{U_0 \delta(x)}{\nu} &= R(X). \end{aligned}$$

ここで大文字の速度と圧力は基本流を、 $\hat{\quad}$  の付いた量は攪乱成分を表す。また局所レイノルズ数  $R$  と微小パラメータ  $\varepsilon$  の間には  $\varepsilon R = x^{(1+m)/2}$  の関係があり、境界層の厚さの変化は  $\Delta(X) = x^{(1-m)}$  で表される。

前節の結果より、無次元基本流はつぎのように書ける。

$$\begin{aligned} U &= F'(\zeta), & V &= \gamma G(\zeta) - \kappa H(\zeta), & & (3.2) \\ W &= -\frac{\Delta}{2X} \{ (1+m)F(\zeta) - (1-m)\zeta F'(\zeta) \}. \end{aligned}$$

一方、攪乱としては、 $X$  と  $Y$  方向および時間に関してほぼ周期的に変化する微小な波動攪乱を考え、支配方程式の線形化が許されるものとする。独立変数  $X$ 、 $Y$ 、 $T$  は大きな基準長さ  $L$  を用いて無次元化されているので、境界層厚さ程度



の長さ尺度を持つ波動を表すために、解をつぎの形に置く。

$$\begin{aligned}\hat{v} &= v_1(\zeta, X) \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\theta(X, Y, T)\right\}, & \hat{p} &= p_1(\zeta, X) \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\theta(X, Y, T)\right\}, \\ \frac{\partial\theta}{\partial X} &= \frac{\alpha(X)}{\Delta}, & \frac{\partial\theta}{\partial Y} &= \frac{\beta(X)}{\Delta}, & \frac{\partial\theta}{\partial T} &= -\frac{X^m \omega(X)}{\Delta}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

ここで  $\alpha$  と  $\beta$  は  $X$  方向と  $Y$  方向の波数、 $\omega$  は複素数で、実部  $\omega_r$  が振動数、虚部  $\omega_i$  が時間的増幅率を表す。これらの波数や複素振動数は局所的な境界層厚さ  $\delta(x)$  を用いて無次元化された量である。(3.1)と(3.3)をナビエ・ストークス方程式に代入し、攪乱に対して線形の部分だけを残すと

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{R} \nabla^2 + i\omega - i\alpha U - i\beta V - \varepsilon \Delta \left\{ U \left( \frac{\partial}{\partial X} + \frac{m}{X} - \frac{\Delta'}{\Delta} \zeta D \right) + \frac{W}{\Delta} D + \left( \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{m}{X} U \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\Delta'}{\Delta} \zeta DU \right) \right] u_1 - DU \omega_1 - \left\{ i\alpha + \varepsilon \Delta \left( \frac{\partial}{\partial X} + \frac{2m}{X} - \frac{\Delta'}{\Delta} \zeta D \right) \right\} p_1 = 0, \\ & \left[ \frac{1}{R} \nabla^2 + i\omega - i\alpha U - i\beta V - \varepsilon \Delta \left\{ U \left( \frac{\partial}{\partial X} + \frac{m}{X} - \frac{\Delta'}{\Delta} \zeta D \right) + \frac{W}{\Delta} D \right\} \right] v_1 \\ & \quad - \varepsilon \Delta \left( \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{m}{X} V - \frac{\Delta'}{\Delta} \zeta DV \right) u_1 - DV \omega_1 - i\beta p_1 = 0, \quad (3.4) \\ & \left[ \frac{1}{R} \nabla^2 + i\omega - i\alpha U - i\beta V - \varepsilon \Delta \left\{ U \left( \frac{\partial}{\partial X} + \frac{m}{X} - \frac{\Delta'}{\Delta} \zeta D \right) + \frac{W}{\Delta} D + \frac{DW}{\Delta} \right\} \right] \omega_1 \\ & \quad - \varepsilon^2 \Delta \left( \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{m}{X} W - \frac{\Delta'}{\Delta} \zeta DW \right) u_1 - Dp_1 = 0, \\ & \left\{ i\alpha + \varepsilon \Delta \left( \frac{\partial}{\partial X} + \frac{m}{X} - \frac{\Delta'}{\Delta} \zeta D \right) \right\} u_1 + i\beta v_1 + D\omega_1 = 0,\end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $'$  は常微分を表し、 $D \equiv \partial/\partial \zeta$ ,

$$\nabla^2 \equiv D^2 - \alpha^2 - \beta^2 + \varepsilon \Delta \left\{ 2i\alpha \left( \frac{\partial}{\partial X} + \frac{m}{X} - \frac{\Delta'}{\Delta} \zeta D \right) + i \left( \frac{d\alpha}{dX} - \frac{\Delta'}{\Delta} \alpha \right) \right\} + O(\varepsilon^2)$$

である。上式は境界層の  $X$  方向への発達を含めた厳密な線形攪乱方程式であるが、 $\xi$  と  $X$  に関する偏微分方程式であるから、そのままでは固有値問題に帰着されない。 $X$  微分項の全てに微小パラメータ  $\varepsilon$  が掛るので、解を  $\varepsilon$  のべき級数に展開する方法が考えられるが、粘性項の係数  $1/R$  も  $\varepsilon$  の大きさなので単純な  $\varepsilon$  展開では最低次近似が非粘性方程式となり、壁面上の境界条件を満たせなくなる。本論文は非平行流の詳しい安定解析を意図するものではないので、所謂「平行流近似」を適用することでこの難点を逃れる。平行流近似とは、(3.4)における  $1/R$  以外の  $O(\varepsilon)$  項を無視する方法で、これによって流れが純粹に平行な場合（例えば平面ポアズイユ流）に導かれるものと同じ方程式が得られる。この近似に基づく安定解析の結果はレイノルズ数がある程度大きい領域では詳しい非平行解析の結果とほとんど変わらないことが知られている (Smith 1979, Itoh 1986)。

平行流近似を適用した後に  $u_1$ 、 $v_1$  および  $p_1$  を消去すると、よく知られたオル・ゾンマーフェルト方程式が得られる。

$$\left[ \left\{ \frac{1}{R}(D^2 - \alpha^2 - \beta^2) + i\omega - i\alpha F' - i\beta(\gamma G - \kappa H) \right\} (D^2 - \alpha^2 - \beta^2) + i\alpha F''' + i\beta(\gamma G'' - \kappa H'') \right] w_1 = 0. \quad (3.5)$$

境界条件は壁面で速度が 0 になることと、境界層の外縁 ( $\xi_0$ )

と置く) で外側の一様流 ( $F' = G = H = 1$ ) に対する (3.5) の適正な解、即ち  $z \rightarrow \infty$  に対して  $w_1 \rightarrow 0$  となる解との接合条件から定まり、つぎのように書ける。

$$\begin{aligned} w_1(0) = w_1'(0) = w_1''(\zeta_0) + (\rho_0 + \rho_1)w_1'(\zeta_0) + \rho_0\rho_1w_1(\zeta_0) \\ = w_1'''(\zeta_0) + (\rho_0 + \rho_1)w_1''(\zeta_0) + \rho_0\rho_1w_1'(\zeta_0) = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

但、 $\rho_0 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ 、 $\rho_1 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - i\omega R + i\alpha R + i\beta R(\gamma - \kappa)}$  である。同次方程式 (3.5) は同次境界条件 (3.6) とともに固有値問題を構成し、方程式中に含まれるパラメターの間を関係づける。即ち複素振動数  $\omega$  を定める関数が

$$\omega = \omega(\alpha, \beta, R; \gamma, m, \kappa) \quad (3.7)$$

の形に与えられる。 $\omega$  の虚数部  $\omega_i$  が正の値を取れば攪乱は時間と共に指数関数的に増幅し、 $\omega_i$  が負であれば攪乱は減衰する。いま、基本流の形状を表すパラメター  $\gamma$ 、 $m$ 、 $\kappa$  が与えられたとき、中立安定の条件  $\omega_i = 0$  を課すと、 $\alpha$ 、 $\beta$  および  $R$  を座標軸とする三次元空間中に一つの曲面が定義される。この中立安定曲面を  $R$  一定の平面で切ると、 $(\alpha, \beta)$  - 平面上に閉曲線が描け、その内部で  $\omega_i > 0$ 、外部で  $\omega_i < 0$  となる。 $R$  を小さくしてゆくと、中立閉曲線はだんだん小さくなり、 $R$  のある値で一つの点になる。この時の  $R$  を臨界レ

レイノルズ数と呼び、 $R_0$  で表す。臨界点では  $\omega_i = 0$  の他に、 $\omega$  を  $\alpha$  と  $\beta$  でそれぞれ偏微分したときの虚数部  $\text{Im}(\omega_\alpha)$  と  $\text{Im}(\omega_\beta)$  も共に 0 になる。臨界レイノルズ数の値は流れの安定性を表す指標として最も重要であり、これが  $\gamma$ 、 $m$  および  $\kappa$  の関数としてどのように変化するかを見るのが本論文の主目的である。

中立安定曲線や臨界点など各種の条件を満たす解を計算する場合に、 $\omega$  の  $\alpha$ 、 $\beta$  および  $R$  に関する偏微分係数を知りたいことが多い。それらを得るには、 $\omega$  と  $w_1$  を  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $R$  の関数とみなし、方程式 (3.5) と境界条件 (3.6) を  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $R$  に関してそれぞれ偏微分する。例えば  $w_1$  の  $\alpha$  に関する偏微分係数  $w_{1\alpha}$  について見ると、これは非同次オル・ゾンマーフェルト方程式と非同次境界条件に支配され、非同次項の中には未知量  $\omega_\alpha$  が含まれる。方程式の主部は (3.5) の左辺と一致するので、問題は特異境界値問題となり、非同次項が一定の条件（可解条件）を満たすときにだけ解が存在する。未知量  $\omega_\alpha$  はこの可解条件を満足させるように決められる（伊藤 & 綿貫 1984）。

固有値  $\omega$  と固有関数  $w_1$  が (3.5) と (3.6) を解くことによって定められたとき、他の速度成分  $u_1$  と  $v_1$  はつぎの式から得られる。

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{1}{R}(D^2 - \alpha^2 - \beta^2) + i\omega - i\alpha F' - i\beta(\gamma G - \kappa H) \right\} u_1 \\
& = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \left[ i\alpha \left\{ \frac{1}{R}(D^2 - \alpha^2 - \beta^2) + i\omega - i\alpha F' \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - i\beta(\gamma G - \kappa H) \right\} D + \beta^2 F'' \right] w_1,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$u_1(0) = 0, \quad u_1'(\zeta_0) + \rho_1 u_1(\zeta_0) = \frac{i\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \{ w_1'''(\zeta_0) + \rho_1 w_1'(\zeta_0) \},$$

$$v_1 = -\frac{1}{i\beta} (i\alpha u_1 + Dw_1). \tag{3.9}$$

以上に現れた式は全て常微分方程式なので、その固有値問題および非同次の境界値問題は筆者の数値解法 (Itoh 1974, 伊藤 & 綿貫 1984) によって十分精度よく解くことができる。

#### 4. 計算結果と考察

前節では定式化の簡単さを考えて、無次元化のための基準速度に外部非粘性流の  $x$  方向速度  $U_0$  を用いた。しかし流れの安定性を臨界レイノルズ数などで表示し、パラメータを変えて比較するときには、外部流の流線に沿う局所的な流速に基づくレイノルズ数を用いる方が都合が良い。そこで本節では基準速度に  $U^* = \sqrt{U_0^2 + V_0^2}$  を用いることにし、 $R$  と  $\omega$  の代りに、

$$R^* = RU^*/U_0, \quad \omega^* = \omega U_0/U^* \tag{4.1}$$

を使用する。基準長さは変えないので  $\alpha$  と  $\beta$  は同じである。

流れの安定性を定量的に表す最も合理的な指標は臨界レイ

ノルズ数である。臨界点は、前節で述べたごとく、

$$\text{Im}\{\omega^*(\alpha, \beta, R^*)\} = \text{Im}\{\omega_\alpha^*(\alpha, \beta, R^*)\} = \text{Im}\{\omega_\beta^*(\alpha, \beta, R^*)\} = 0 \quad (4.2)$$

を満たす点として定義され、この点における値を添字。を用いて表すことにする。流れの形状を表すパラメータ  $\gamma$ 、 $m$  および  $\kappa$  のいろいろな組合せに対して  $R^*(\gamma, m, \kappa)$  を計算し、結果を比較することによって安定性の評価を行なう。

はじめに 後退角が 0 の場合について、二つの圧力勾配がそれぞれ単独に存在するときの効果を見る。図 1 には  $R^*$  の  $m$  と  $|\kappa|$  に対する変化が示されている。  $x$  方向の圧力勾配を表すパラメータ  $m$  は淀み点 ( $m = 1$ ) から剝離点 ( $m = -0.0904$ ) までの範囲で意味をもつ。  $m = 0$  は平板境界層に対応し、そこでの臨界値  $R^* = 301.6$  は境界層排除厚 ( $1.721\delta$ ) に基づくレイノルズ数に換算すると、よく知られた値 519.1 に一致する。  $m$  を負の方向 (逆圧力勾配) にとると  $R^*$  は急激に減少して流れは不安定化され、  $m$  を正の方向 (順圧力勾配) に取れば  $R^*$  が急激に増大して流れを安定にすることはよく知られた事実である。これに対して、後退角のないときの  $y$  方向圧力勾配  $\kappa$  の効果は  $\kappa = 0$  に対称で、その絶対値と共に  $R^*$  は急激に低下する。とくに  $\kappa$  の小さい範囲でその低下が著しく、  $\kappa = 0.2$  までの間に  $R^*$  は  $1/3$  以下に減じ、その後は変化が比較的緩やかになる。これから、  $y$

方向の圧力勾配は、たとえ弱くても、流れに対してかなり重大な不安定作用を及ぼすことが判る。図1の二曲線に対応して攪乱の波数と振動数がどのように変化するかを示したものが図2である。但、波数については、そのベクトル長  $k_c$  と  $x$  軸からの傾き  $\phi_c$  で表してある。 $m = \kappa = 0$  の場合は二次元ブラジウス境界層であるから攪乱は  $x$  方向と一致する波数ベクトルをもち、主流の4割程度の位相速度 ( $\omega_r / \alpha = 0.3966$ ) で下流に伝播する。これに  $x$  方向の圧力勾配が加わっても、波数や振動数の大きさに若干の変化が生じるだけで、攪乱の性質に本質的な相違は起らない。基本流が二次元のまゝであるから当然の結果と言える。一方、 $y$  方向の圧力勾配が加え

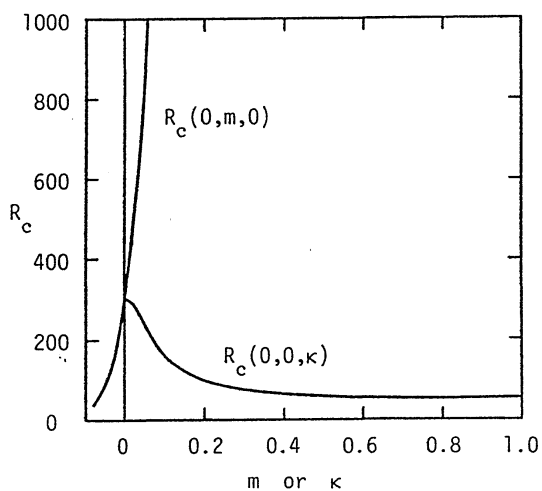


図 1

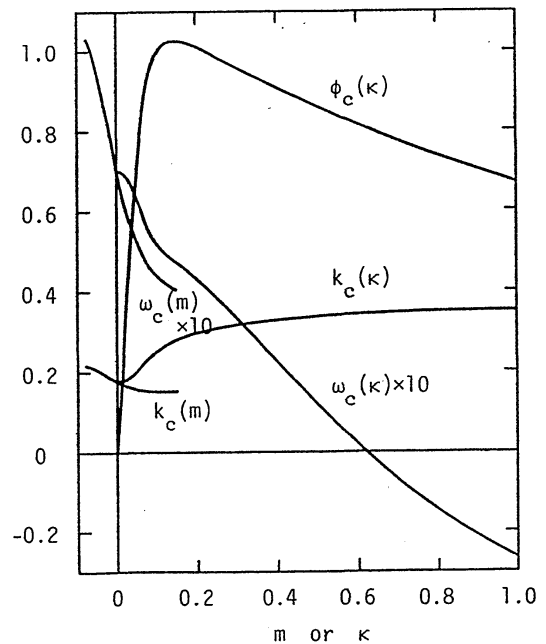


図 2

られた場合には、基本流が横流れ速度をもつ三次元型になる  
ので、攪乱の位相速度は 0 に近づき、波数ベクトルの傾き  
も増大する。とくに  $\kappa = 0.62$  の付近で攪乱は位相速度を持  
たない静止渦となり、そのときの波数ベクトルの方向は軸に  
対して約  $46^\circ$  の傾斜を持つ。後退翼上などで実験的に観測さ  
れる静止型攪乱、いわゆる「横流れ不安定渦」に対応してい  
るものと思われる。

つぎに後退角が存在する場合を考える。オル・ゾンマーフ  
ェルト方程式(3.5)はパラメタ  $\gamma = r_0 X^{-m}$  を通して物体の  
後退角に依存するので、 $r_0$  の代わりに  $\gamma$  を一定として計算を実  
行する方が簡単である。ここでは  $\gamma = 1$  の場合について  $R_c^*$   
の  $m$  および  $\kappa$  に対する変化を示す。図 3 は  $m$  を横軸に選び、  
 $\kappa$  を一定にしたときの  $R_c^*$  を、図 4 では  $\kappa$  を横軸に取り、 $m$

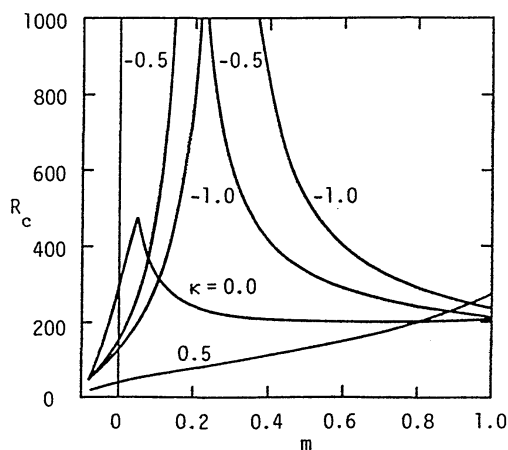


図 3

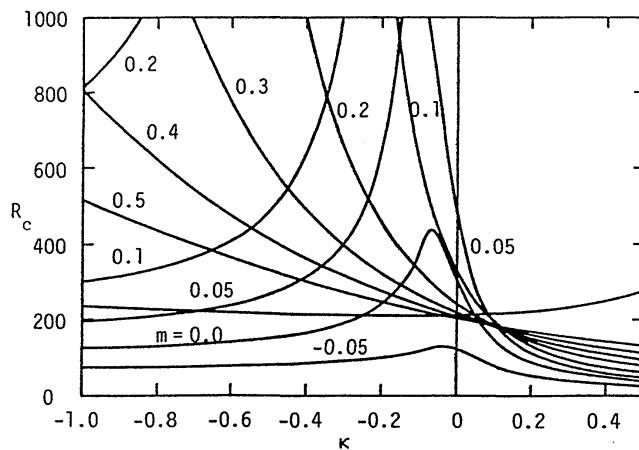


図 4



の一定値に対する  $R^*$  の変化をそれぞれ示してある。これらの図を合成すると、 $m$ 、 $\kappa$  および  $R^*$  を座標軸とする三次元空間中に一つの曲面を描くことができ、 $m > 0$  で  $\kappa < 0$  の領域において臨界レイノルズ数が非常に高くなることが判る。曲面のこのような性質をもっと明確に示すために、 $(m, \kappa)$  - 平面上に  $R^* =$  一定の等高線を描いたものが図5である。ここで  $R^*$  は  $m = \kappa = 0$  のブラジウス境界層に対する臨界レイノルズ数を表し、等高線はそれの  $1/3$  から  $3$  倍までについて示されている。  $R^* = 3R^*$ 。曲線の内側には、さらに  $R^*$  の  $4$  倍、 $5$  倍等に対応する曲線がかなり密に存在するのであるが、図の煩雑さを避けるために省略してある。曲面は原点  $(0, 0)$  から横座標に対して  $-20^\circ$  前後傾いた第2象限

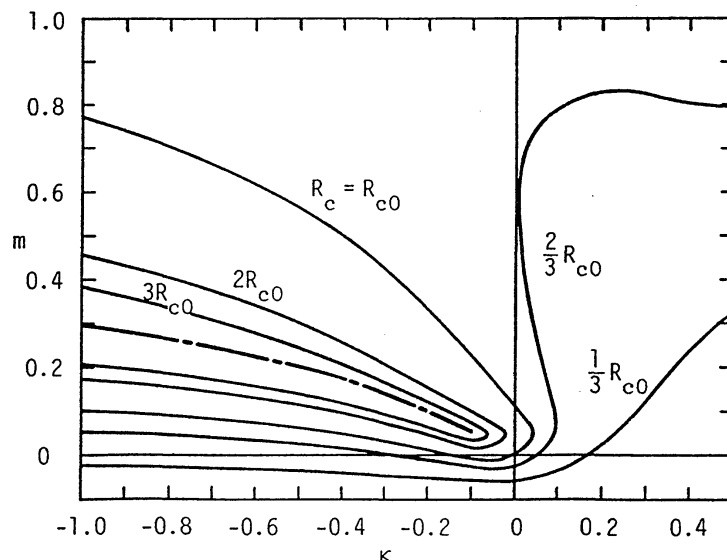


図 5

の方向に沿って最も急勾配に上昇する。その上昇の程度は  $\gamma = 0$  の場合における  $R^*$  の  $m$  に対する変化に匹敵するものである。このことから、後退角がない場合には、 $R^*$  の最も急上昇する方向は  $m$  座標と一致しているが、後退角  $\gamma$  が正の値を持つとその方向は  $k$  軸の負の方向に向って傾き始め、 $\gamma = 1$  で傾き角が  $70^\circ$  前後にも達するのであると推測される。なお、 $\gamma$  が負の値を持つ場合には  $k$  の符号が逆転するだけで、全く同じ結果が得られる。

上に得た計算結果に対する詳しい考察に入る前に、もう一つの同じような計算結果を示しておく。三次元境界層の不安定に関する多くの実験観測では物体表面に固定した渦、即ち位相速度 0 の波が見出されており、通常この渦が横流れ速度に起因する不安定の特徴と解釈されている。しかしなぜ進行波型攪乱に先立って固定渦が観測され易いかについてはまだ理論的に十分説明されていない。線形安定論から計算される臨界点においては一般に位相速度が存在することは図 2 に示したとおりである。そこで、始めから位相速度のない攪乱だけを考慮して、その安定限界を計算しておくことも、今後の関連研究、とくに上記の未解決問題の研究に有益と思われる。いま、 $\gamma$ 、 $m$  および  $k$  が与えられたとき、固定渦型攪乱に対する安定限界はつぎの条件を満たす点として定まる。

$$\omega^*(\alpha, \beta, R^*) = \text{Im}\{\omega_\alpha^*(\alpha, \beta, R^*) \tilde{\omega}_\beta^*(\alpha, \beta, R^*)\} = 0 \quad (4.3)$$

ここで $\sim$ は共役複素数を表す。以前と同じように $\gamma = 1$ の場合について、 $m$ と $\kappa$ のいろいろな組合せに対して臨界レイノルズ数 $R^*$ の変化を示したものが図6から図8までである。但、添字 $\kappa$ は固定渦型攪乱に対する臨界点を表している。図8を図5と比較すると、座標原点の近傍を除いて、等高線の形状は非常に似ている。もともと固定渦という付加条件を課している分だけ、 $R^*$ 曲面は $R^*$ 曲面より上方にあるけれども、臨界点が300を越えるような高い領域では二曲面がほとんど一致するほどに接近している。このことは横流れを伴う境界層の不安定に対する固定渦型攪乱の重要性を示唆しているように思われるが、線形安定計算からはそれ以上の

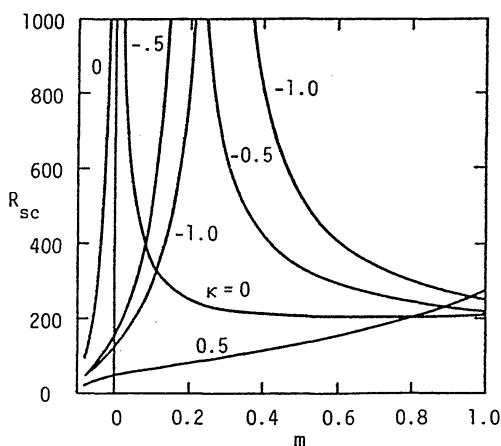


図 6

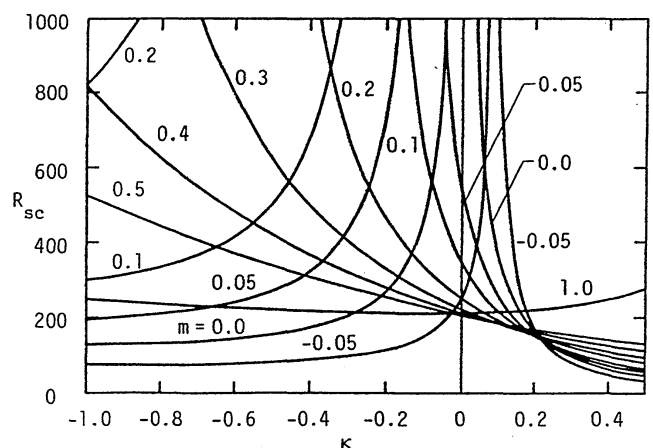


図 7

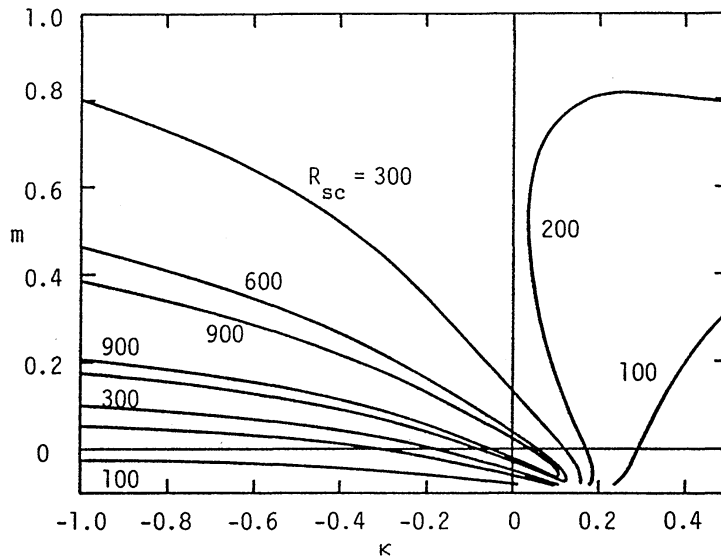


図 8

結論を導くことはできない。

以上の計算結果から導かれる最も興味ある推論は、後退翼上の一般的な三次元境界層においても、翼弦方向と翼幅方向の圧力勾配を適当に組合せることによって、二次元境界層と同じ程度に安定な流れを作れるのではないかと言うことである。今までの安定解析では  $p_v$  の影響を考慮していなかったもので、図5あるいは図8の  $m$  座標軸上における臨界値の変化だけを見ていたことになり、 $m > 0$  の領域で三次元境界層は二次元境界層に比べて著しく不安定であると認識されてきた。上記の結果はこの認識を変更させるに十分な材料を与えているものと思われる。図3から図8までの結果は  $\gamma = 1$  の場合に対するものであるが、もっと一般の後退角に対して臨界レイノルズ数が最も急上昇する方向を予想してみる。基本

流を表す式(2.6)において、横流れ速度  $v^*$  が恒等的に 0 であると仮定すると、外部流方向の速度  $u^*$  は  $F'(\xi; m)$  に比例する。このとき、 $m$  を正の方向に取れば流れが急速に安定化することは図 1 に示したとおりである。実際には、 $r m = \kappa = 0$  以外に  $v^*$  を恒等的に 0 にする組合せは存在しないけれども、 $|v^*|$  を全体的に小さくすることは可能である。図 9 には、いくつかの  $m$  に対して  $-(G-F')/m$  (点線) と  $H-F'$  (実線) の分布形を比較してある。ただし、 $m \rightarrow 0$  に対しては、 $(G-F')/m \rightarrow g-f'$  の極限を用いている。各  $m$  に対して両方の分布形は非常に近いとの位置で極大値を取るのので、その中間点  $\xi_m$  における関数値の比を取り、

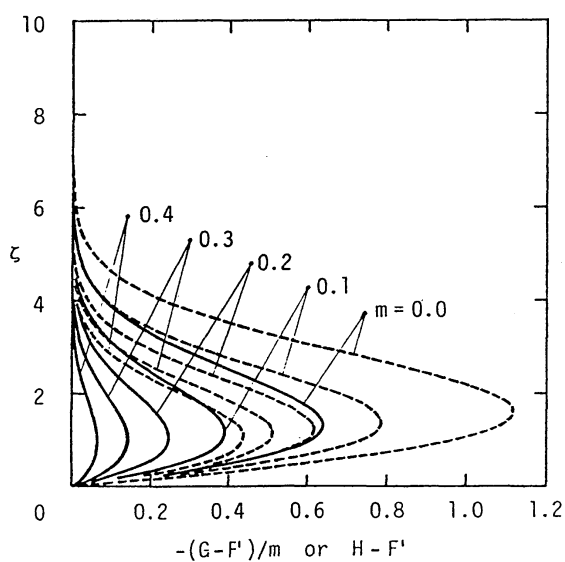


図 9

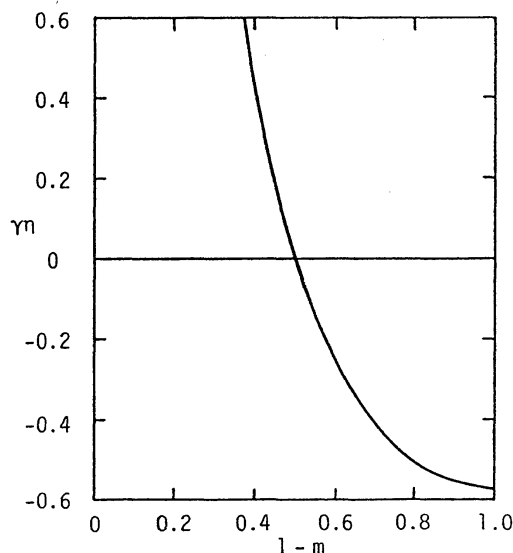


図 10

$$\alpha(m) = \frac{H(\zeta_m) - F'(\zeta_m)}{\{G(\zeta_m) - F'(\zeta_m)\}/m} \quad (4.4)$$

で表す。そうすると、横流れ速度  $v^*$  は

$$\gamma m - \kappa \alpha(m) = 0 \quad (4.5)$$

の関係が満たされる所でほとんど 0 に近い値を取ることになる。図 5 中の一点鎖線は (4.5) 式を図示したもので、等高線の尾根にほぼ一致していることが確認される。なお、 $m = 0.5$  においては  $H(\zeta)$  が恒等的に  $F'(\zeta)$  に一致するから  $\alpha$  は 0 になる。したがって、この一点鎖線は  $\kappa \rightarrow -\infty$  に対して  $m = 0.5$  の直線に漸近する。以上の結果からつぎのことが結論される。負の圧力勾配  $p_x$  ( $m > 0$ ) はそれ自身速度分布の変形を通して流れを安定化させる効果を持つのであるが、一方では後退角と協力して横流れ速度を発生させ、流れを不安定にする能力も持つ。そこで、横流れ速度を誘起するもう一つの要因である  $p_y$  を適当に加えることによって、横流れ効果を相殺してやれば、 $p_x$  本来の安定化作用だけを残すことができるのである。(4.5) はそのための条件を与えている。

最後に、三次元境界層が最も安定になるための条件 (4.5) と翼面上の等圧力線の関係を調べておく。一般に翼表面の圧力分布  $p(x, y)$  が与えられたとき、ある一点  $(x, y)$  を通る等圧

曲線の局所的勾配は  $\eta(x, y) = -p_x(x, y)/p_y(x, y)$  で表される。これに(2.2)を代入すると、条件(4.5)を満たす等圧線は

$$\eta = \frac{\alpha(m)}{\gamma(1-m)} \quad (4.6)$$

の勾配を持つことになる。後退角がないとき( $\gamma = 0$ )と淀み点または attachment line に沿う所( $m = 1$ )では、上式の示す等圧線は翼前縁に平行であるが、それ以外では前縁に対して  $\alpha(m)$  の符号に応じた傾きを持つ。(4.4)から予測した  $\alpha(m)$  の値は  $m < 0.5$  の範囲で負の符号を持つから、後退角が正のとき、等圧線は  $y$  の増加と共に前縁に近づく方向に傾き、 $m > 0.5$  ではその逆になる。図10は、(4.6)と(4.4)に従って  $\gamma\eta$  を  $1-m$  に対してプロットしたものである。一般の翼では、attachment line ( $m = 1$ ) から  $x$  方向に  $m$  が減少するので、同図の横座標は  $x$  方向の距離と対応関係を持つ。もしこの関係が与えられれば、 $\eta$  を  $x$  で積分することができて、等圧線の形状が定まる。以上は最も安定な速度分布を与えるような等圧線の形状を調べた結果であるが、実際にこのような性質の後退翼を設計することは難しい。しかし、通常の設計では翼の等圧線が前縁にほぼ平行であるから、それをなるべく安定なものに改良したい場合などには、ここで得られた結果が重要な指針になるものと期待される。

## 5. むすび

三次元境界層は外側の非粘性流に垂直な方向の速度成分、即ち横流れ速度を持つことによって特徴づけられる。横流れ速度を誘起する原因には二つあり、一つは翼の後退角と翼弦方向の圧力勾配の結合によるもの、他の一つは翼幅方向の圧力勾配である。一般的な後退翼上の三次元境界層では、これらの要因が共存し、横流れ速度はそれぞれの要因から生じる二種類の横流れ成分の和で表される。このような一般的な三次元境界層の最も単純な例は、くさび形物体が一様流に対して偏揺角をもって置かれ、前縁に沿う方向に圧力勾配が加えられた場合である。本論文では、その場合に関する三次元境界層方程式の厳密解を導き、得られた速度分布に対してオル・ゾンマフェルト方程式に基づく線形安定計算を行なった。

三次元境界層は一般に二次元境界層に比べて微小攪乱に対する安定性が低いと言われてきたが、これは翼幅方向に圧力勾配がない場合に関する安定解析を根拠とするものである。上で述べたような一般的な場合については、まだ安定性が調べられていなかったのである。本論文で得られた計算結果は、今までに知られていなかった多くの事実を提示しており、翼幅方向の圧力勾配を無視した議論では三次元境界層の安定性のごく一部を見ているだけで、最も重要な特性が見落されて



いることを明らかにした。ここで最も重要な特性とは図5における等高線の尾根で表されているものである。後退角があるとき、翼弦方向と翼幅方向の圧力勾配がある比率になると、両者から誘起される横流れ成分がほとんど打消し合う状態になり、臨界レイノルズ数がそれ以外の場合に比べて著しく高くなるのである。このような安定特性を利用すると、今まで考えられていたものよりずっと安定な三次元境界層をつくることや、与えられた三次元境界層を事情の許す限り安定なものに改良することが可能になる。

本論文では流れの安定性を評価する目安としてオル・ゾンマーフェルト方程式の固有値を用いた。この方程式は平行流近似のもとで成立するものであるから、境界層流れに適用するときには精度に関して疑問が残る。しかし、二次元境界層に対してこれまでに行なわれた非平行安定解析 (Smith 1979, Itoh 1986) の結果を参照すると、ブラジウス境界層の臨界レイノルズ数 ( $R_{x,c}^* = 301.6$ ) の付近およびそれより大きいレイノルズ数では非平行の影響はあまり大きくなり、流れの安定特性そのものを著しく変えることはない。したがって、本論文の計算結果についても、 $R_{x,c}^*$  が  $R_{x,c}^*$  に比べて非常に小さい所を除いて、定性的に十分信頼できるものと推測される。

## 参 考 文 献

- Anscombe, A. & Illingworth, L.N. 1952 ARC R&M 2968.
- Cebeci, T. & Stewartson, W. 1980 AIAA J. 18, 398.
- Dallmann, U. & Bieler, H. 1987 AIAA-87-1337.
- Falkner, V.M. & Skan, S.W. 1930 ARC R&M 1314.
- Gray, W.E. 1952 R.A.E. TM-255.
- Gregory, N., Stuart, J.T. & Walker, W.S. 1955 Phil. Trans. A 248, 155.
- Itoh, N. 1974 Trans. Japan Soc. Aero. Sci. 17, 65.
- Itoh, N. 1985 Laminar-Turbulent Transition, ed. V.V. Kozlov, p.463, Springer.
- Itoh, N. 1986 Fluid Dyn. Res. 1, 119.
- 伊藤 & 綿貫 1984 NAL TR-841.
- Kobayashi, R., Kohama, Y. & Takamada, Ch. 1980 Acta Mech. 35, 71.
- Mack, L.M. 1984 AGARD Rep. No.709.
- Malik, M.R. & Poll, D.I.A. 1984 AIAA-84-1672.
- Malik, M.R., Wilkinson, S.P. & Orszag, S.A. 1981 AIAA J. 19, 1131.
- Rosenhead, L. 1963 Laminar Boundary Layers, Oxford Univ. Press.
- Smith, F.T. 1979 Proc. Roy. Soc. Lond. A 366, 91.
- Sowerby, L. 1954 ARC Rep. 16832.