数理解析研究所講究録
733巻 1990年 46-53

安定性理論におけるアーノルドの方法について

京大防災研　山田　道夫 (Michio YAMADA)

1．はじめに

粘性流体の運動の安定性理論は、ダクト内の流れを代表とする実験室規模の現象と関連して広く研究され、線形理論のみならず非線形理論においても多くの精密な結果が得られてきた。一方、非粘性流体の運動の安定性理論は、非粘性流体が現実の粘性流体に対する近似にすぎないという点から、流体力学の分野においては、粘性流体ほど集中した研究の対象ではなかったように思われる。しかし地球物理やプラズマ物理などの分野においては、非常に大きなレイノルズ数や関与する要因の多様さのため、むしろ非粘性流体の運動とする記述の方が現象の第一近似として適切な場合が存在する。この場合、流れの安定性問題、特に非線形安定性問題は粘性問題の場合と全く異なる解析方法を必要とするが、このような方法は、流体力学の分野では用いられることが比較的少なく粘性流体の安定性理論ほどには知られていないように思われる。ここでは、このような手法の1つであるArnol'dの方法について簡単に紹介する。

2．安定性の概念

発展方程式が

$$\frac{\partial u}{\partial t} = N(u)$$

で与えられる系の定常解 $u = u_0$ の安定性を考える。解 u_0 からの有限の大きさの擾乱（有限擾乱）を Δu、　無限小の擾乱（無限小擾乱）を δu とする。δu は線形化方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta u = \left.\frac{\partial N}{\partial u}\right|_{u=u_0} \cdot \delta u$$

に従って時間発展する。このとき、線形安定、非線形安定を次のように定義する。

1）線形安定

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$$

$$\|\delta u\| < \delta \ \text{at}\ t=0 \Rightarrow \|\delta u\| < \varepsilon \ \text{for}\ t>0.$$

2）非線形安定

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$$

$$\|\Delta u\| < \delta \ \text{at}\ t=0 \Rightarrow \|\Delta u\| < \varepsilon \ \text{for}\ t>0.$$

（ここに定義した非線形安定は、流体力学的安定論における慣用的用法とは異なることに注意されたい。）

粘性流体系（散逸系）においては、線形化方程式のすべての固有値

$$\sigma:\quad \sigma\Phi = \left.\frac{\partial N}{\partial u}\right|_{u=u_0}\cdot\Phi$$

の実部がある負定数より小さいとき解は線形安定であること、また解が線形安定ならば非線形安定であることが知られている。従って、粘性流体の定常運動の非線形安定性を調べるには、実際上、線形化作用素の固有値を調べれば十分である。ところが非粘性流体系（保存系）の場合は状況が大きく異なる：保存量の存在のため、攪乱の大きさが時間とともにゼロに近付くことが期待できない。従って線形化作用素の全ての固有値の実部が負になることはなく、せいぜいゼロになるだけである。これらの固有値が幾何学的に縮退している場合には、時間のべきのオーダーで増幅する無限小攪乱が存在し、線形不安定となる。そこで、線形安定のためには、固有値が幾何学的に縮退しないしないことが必要となるが、この条件も非線形安定のためには十分ではない：線形安定の場合、攪乱は線形的には増幅も減衰もしないので、有限攪乱の究極的な消長は非線形項で決定される。従って、非粘性流体系（保存系）では、線形安定であっても、非線形安定であるとは限らない。

次の例（Pollard, 1966）は、保存系（Hamilton系）では線形安定かつ非線形不安定な系が存在することを示している。

$$H = \frac{1}{2}(q_1^2+p_1^2) - (q_2^2+p_2^2) + \frac{1}{2}(p_1^2-q_1^2)p_2 - q_1q_2p_1,$$

実際、この系では、（**q**，**p**）＝０が線形安定な定常解であるが、次の解

$$p_1 = \sqrt{2}\,\frac{\sin(t-\tau)}{t-\tau},\quad p_2 = \frac{\sin 2(t-\tau)}{t-\tau}$$

$$q_1 = -\sqrt{2}\,\frac{\cos(t-\tau)}{t-\tau},\quad q_2 = \frac{\cos 2(t-\tau)}{t-\tau}$$

は、τを大きく選ぶことによって、$t=0$で定常解にいくらでも近くから出発し$t=\tau$で発散する。すなわち、この定常解は非線形不安定である。

以上のように、保存系である非粘性流体系の定常解について安定性（非線形安定性）を保証するためには、線形安定性の結果のみでは不十分であり、本質的に非線形性を考慮した方法を用いなければならない。以下では、このような方法の一例として、Arnol'dおよびDritschelによる方法を述べる。

３．Ａｒｎｏｌ’ｄの方法

保存系において、Lyapunov関数の存在が定常解の安定性のための十分条件を与えることはよく知られている。Arnol'dは、定常解近傍における局所的なLyapunov関数を構成する方法を提案した。彼は、非粘性流体系が、Hamiltonianを持ちながらも、以下に述べる意味で独立変数の変数の数が不足した系であることを利用してLyapunov関数を構成する方法を提案した。現在ではこの方法は拡張され、Hamilton系であることは必ずしも必要ではなくなっているが、ここでは本来の着想に沿った方法を紹介する。

いま、Hamiltonian $H=H(q_i, p_i)$ によって与えられるHamilton系を考えよう。この系の運動方程式は Poisson括弧を用いて、

$$\dot{q}_i=[q_i, H],\quad \dot{p}_i=[p_i, H]\quad (i=1,2,\cdots,N)$$

と表される。変数の名前を

$$(z_1,\cdots,z_{2N})=(q_1,\cdots,q_N,p_1,\cdots,p_N)$$

のように付けかえれば Poisson括弧は

$$[F,G]=\frac{\partial F}{\partial z_i}J^{ij}\frac{\partial G}{\partial z_j},\quad J^{ij}=\begin{bmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{bmatrix}$$

$$(\mathrm{rank}\, J^{ij}=2N)$$

と表現される。ここに現れた J^{ij} は変数変換

$$\bar{z}_i=\bar{z}_i(z)$$

によって

$$\bar{J}^{ij}=\frac{\partial \bar{z}_i}{\partial z_m}J^{mn}\frac{\partial \bar{z}_j}{\partial z_n}$$

のように変換される量であり、逆変換可能な変数変換に対しては常に

$$\mathrm{rank}\,\bar{J}^{ij}=2N$$

となっている。しかし変数変換が逆変換を持たない場合には、行列 $\bar{J}^{ij}$ は特異（singular）であり、そのrankは２Ｎより真に小さい（＝２Ｎ－ｋ）ため

$$\bar{J}^{lm}\frac{\partial C_l}{\partial z_m}=0$$

を満たすｋ個の量 C_l が存在する。すぐに分かるように、これらの量は任意の量Ｆ

とのPoisson括弧をゼロにするという性質を持ちCasimirと呼ばれている。特にHamiltonian Hに対し、

$$[H, C_l]=0$$

であるのでこれらの量は保存量である。

さて、上に述べたように、保存系においてある定常解が安定（非線形安定）であるための十分条件は、局所的なLyapunov関数、すなわち定常解で極値をもつ保存量が存在することである。Arnol'dは、不完全な座標（＝ J^{ij} が特異）を持つHamilton系においてこのような保存量 H_c を捜す方法として、Casimirを用いた次の形のもの

$$H_c = H + \sum_l \lambda_l C_l \quad (\lambda_l : 定数)$$

を試すことを提案した。残念ながら、この形のLyapunov関数が常に存在するという保証はないが、実際には多くの場合に求める保存量が得られている。

4．非粘性流体運動の安定性

直観的には、非粘性流体の運動はエネルギー散逸の無い流体粒子の運動であり、このような流体粒子の集団として流体を記述すれば、通常のHamilton系として運動を定式化できるように思われる。事実、非粘性流体系は、Lagrange座標を用いることにより、自然な形のLagrangian

$$L = \int da \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 - E(\rho, S) - \Phi(x) \right\}$$

$$\rho = \partial(a)/\partial(x), \quad S = S(a)$$

と変分原理

$$\delta \int L\, dt = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla \Phi, \quad p = \rho^2 \frac{\partial E}{\partial \rho}$$

が得られ、これからHamiltonianおよびPoisson括弧が次のように求められる。

$$H = \int da \left\{ \frac{u^2}{2} + E + \Phi \right\},$$

$$[F, G] = \int da \left\{ \frac{\delta F}{\delta x(a)} \frac{\delta G}{\delta u(a)} - \frac{\delta F}{\delta u(a)} \frac{\delta G}{\delta x(a)} \right\}.$$

ここでaは初期時刻のおける流体粒子の位置を区別する座標である。このようにして得られるHamiltonianをEuler座標に変換すればEuler表示によるHamilton形式

が得られると考えられる。実際このような変換を行えば、新しいHamiltonianが得られる。しかし、このときの座標変換は逆変換を持たない種類のものである。これは、Euler表示においては、流体粒子を区別するラベルａに関する情報が失われているため、力学変数をａの関数として特定する方法がないためである。したがってEuler表示は特異なHamilton系を与え、Casimirが存在することになる。３次元非粘性流体系の場合、このCasimirは

$$C=\int dx\,\rho f(q),\quad q=\frac{1}{\rho}(\nabla\times u)\cdot\nabla S$$

となり、特に２次元非圧縮性流体の場合は

$$\rho=\mathrm{const.},\quad \omega=(\nabla\times u)\cdot\hat{z}$$

とおいた

$$C=\int dx\,f(\omega)$$

の形になる。これは渦度の任意関数の積分であり２次元非粘性流体系の保存量であることはよく知られている。

上に述べたArnol'dの方法を用いて、２次元の非粘性非圧縮性流体の、二重連結領域Ｄ内での運動の安定性を考える。領域の境界Γ_1, Γ_2では、流れは境界に平行で、境界に沿った循環、

$$\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\psi}{\partial n}ds,\quad \int_{\Gamma_2}\frac{\partial\psi}{\partial n}ds$$

は一定と仮定する。ここでϕは流れ関数、ｄｓは境界に沿う線要素、$\partial/\partial n$は法線微分である。流体の運動方程式は

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial(\omega,\psi)}{\partial(x,y)}=0$$

となり、Hamiltonian（運動エネルギー）Ｈ

$$H=\frac{1}{2}\int_D(\nabla\psi)^2dxdy$$

と、Casimir（渦度の任意関数Ｆ（ω）の空間積分）

$$C=\int_D F(\omega)dxdy$$

が保存量である。

そこで、H_cとして$H_c[\phi]=H+\int F(\omega)\,dxdy$、の形のものを捜そう。$\phi_{st}$に小さな摂動$\delta\phi$を加えたとき、$H_c$の第一変分は

$$\delta H_c=-\int_D\Delta Q\,\delta\psi\,dxdy+\int_\Gamma\frac{\partial Q}{\partial n}\delta\psi\,ds+\int_\Gamma F'(\omega_{st})\frac{\partial\delta\psi}{\partial n}ds$$

となる。ここで、$Q=\phi_{st}+F'(\omega_{st})$、$\omega_{st}=-\Delta\phi_{st}$、$\Gamma=\partial D=\Gamma_1+\Gamma_2$とおいた。もし

$$\psi_{st}=-F'(\omega_{st})$$

ならば、$\delta H_c=0$が得られ、第二変分は

$$\delta^2 H_c=\frac{1}{2}\int_D\{(\nabla\delta\psi)^2+(\Delta\delta\psi)^2F''(\omega_{st})\}dxdy$$

となる。さらにもし、

$$F''(\omega_{st})>c'>0$$

が成り立てば（C’は定数）、δ^2H_cは正定値であり、解ϕ_{st}はH_cの真の極小値を与えることになるので、流れϕ_{st}は非線形安定であると結論される。従って、条件A及びBが非線形安定の十分条件を与える。実際、$\delta\phi$の大きさを

$$\|\delta\psi\|=\sqrt{\frac{1}{2}\int_D\{(\nabla\delta\psi)^2+c'(\Delta\delta\psi)^2\}dxdy}$$

で定義すると、十分小さな$\delta\phi$に対して、$t>0$で

$$\|\delta\psi\|^2<H_c[\psi_{st}+\delta\psi]-H_c[\psi_{st}]$$

となるので、非線形安定性の定義を満足する。なお、一般に定常解では、ϕ_{st}とω_{st}の間に局所的な関数関係が存在するが、ここで求めた条件Aはそれが大域的にϕ_{st}について解けることを要求している。

5．2次元非粘性平行流の安定性への応用

平行平板間をx方向に流れる平行流（U（y），0）において、攪乱をx方向に周期Xを持つものだけに制限すると、（x＋X、y）を（x，y）と同じ点とみなして上の方法が適用できる。$F''(\omega_{st})=U(y)/U''(y)$であるので、すべての点で$U''(y)>0\ (<0)$となるときは、ガリレイ変換によって$U(y)>0\ (<0)$となる座標系に移れば、上の十分条件が成り立つ。すなわち、変曲点を持たない（$U''(y)\neq0$）平行流は非線形安定である。この結果はよく知られた線形安定性に関するRayleighの定理を強めたものである。

一方、第二変分δ^2Hが負定値になるときも解ϕ_{st}は安定である。平行平板間の平行流が、$y=0$に関して反対称（$U(-y)=-U(y)$）かつ$U''(0)=0$を満たすとしよう。前と同様、x方向に周期Xをもつ攪乱のみを考え、さらに上下の平板上での流れ関数の値は変わらない、即ち$\delta\phi=0$（Γ_1，Γ_2上）、と仮定する。

$$\int_D(\nabla\psi)^2dxdy\leq\min\left\{\left(\frac{d_y}{\pi}\right)^2,\left(\frac{X}{2\pi}\right)^2\right\}\int_D(\Delta\delta\psi)^2dxdy$$

が一般的に成り立つので（d_yは平板間の距離）

$$\min\left\{\left(\frac{d_y}{\pi}\right)^2, \left(\frac{X}{2\pi}\right)^2\right\} + \frac{U(y)}{U''(y)} < C'' < 0$$

を満たす流れは上の十分条件を満たす（C”は負の定数）。たとえばU（y）＝ａｓｉｎ　ｙ　（ａは定数）は、$d_y < \pi$なら任意のＸに対して安定であり、$d_y > \pi$ならＸ＜２πに対しては安定であることが結論される。

６．渦度の不連続分布の安定性（Dritchelの方法）

上に述べたArnol'dの方法は、攪乱の大きさを計る適当なノルムを導入し、それで計った攪乱の大きさが初期値で決まるある値を越えないことを保証することで、定常解の非線形安定性を導いている。このような考え方は保存系における安定性問題を扱う上で基本的なものであり、例えば渦度の分布が不連続でAronl'dの方法が適用できないような場合にも、以下のように適当なノルムを構成することにより、非線形安定性を示すことができる（Dritchel, 1988）。

主流が２次元非粘性非圧縮流体の軸対称流れである場合を考える。このような系では、impulse

$$J = \int y Q(\theta, t)\, dy \qquad \left(y = \frac{r^2}{2}\right)$$

が保存する。いま渦度ωが区分的定数の分布をすると仮定すると

$$J = \sum_i Q_i \oint \int_{y_i}^{y_{i+1}} y\, dy\, d\theta = \sum_i \frac{Q_i}{2} \oint (y_{i+1}^2 - y_i^2)\, d\theta$$
$$= \sum_i \frac{\Delta Q_i}{2} \oint y_i^2\, d\theta, \quad (\Delta Q_i = Q_{i-1} - Q_i)$$

となる。また、この系では面積

$$A_i = \oint y_i\, d\theta$$

も保存量である。ここで積分路は渦度の不連続線上にとっている。

さて、この系に攪乱が加わり、渦度の不連続線が円形から

$$y_i(\theta, t) = y_{ei} + \eta_i(\theta, t)$$

のように歪んだとしよう（ηは円形からのずれ）。ここで、J_e及びA_eを主流に関するＪ及びＡとすると次の関係

$$J - J_e - \sum_i \Delta Q_i y_{ei}(A_i - A_{ei}) = \frac{1}{2}\sum_i \Delta Q_i \oint \eta_i^2(\theta, t)\, d\theta$$

が成り立つ。もし、ωが半径ｒの単調減少関数であるときは$\Delta Q_i > 0$であるから、上式の右辺は非負になる。この右辺の平方根でηのノルム$\|\eta\|$を定義すると、

左辺は保存量であるから、ノルムは時間的に一定

$$\|\eta(t)\| = \|\eta(0)\|$$

となる。これは、もとの主流の非線形安定性を意味している。即ち、半径の単調減少関数であるような軸対称渦度分布は非線形安定であることが示された。なお、この方法は、Δωをdωとすることで、渦度が連続分布する場合にも適用できる。

以上、非粘性流体の定常運動の非線形安定性を調べる方法の一つを紹介した（オリジナルな内容は含まれていない）。現在では、この方法はさまざまな場合に適用・発展されている。詳細は以下の文献およびそれらの文献表等を見られたい。

- V. I. Arnol'd(1965), Conditions for nonlinear stability of stationary plane curvilinear flows of an ideal fluid, Doklady, Vol.162, pp.773-777.
- V. I. Arnol'd(1965), Variational principle for three-dimensional steady state flows of an ideal fluid, PMM, Vol.29, pp.1002-1008.
- V. I. Arnol'd(1965), On the nonlinear theory of hydrodynamic stability, PMM, Vol.29, pp.1009-101 2.
- V. I. Arnol'd(1978), Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag. 安藤韶一他 訳(1980)、古典力学の数学的方法、岩波書店.
- R. Salmon(1988), Hamiltonian Fluid Dynamics, Ann. Rev. Fluid Mech., Vol.20, pp.225-256.
- D. D. Holm, J.E.Marsden, T.Ratiu and A.Weinstein(1985), Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria, Phys. Rep., Vol.123, pp.1-116.
- D. G. Dritschel(1988), Nonlinear stability bounds for inviscid, two-dimensional, parallel or circular flows with monotonic vorticity, and the analogous three-dimensional quasi-geostrophic flows, J. Fluid Mech., Vol.191, pp.575-581.