数理解析研究所講究録
733巻 1990年 33-45

長方形セル流の安定性

阪府大 工 後藤金英 (Kanefusa Gotoh)

1。はじめに

非圧縮・粘性流体の空間周期流の安定性の問題は，乱流の大規模構造形成の1つの素過程としてとりあげられて来たが，コルモゴロフ流を代表とする2次元平行流[1~8]にはじまって，最近は正方形,[9] 菱形,[10] 三角形[11]などのセル構造をもった流れがとり扱われるようになった。 問題はレイノルズ数に加えて2つのフロケ指数をパラメターとして含む固有値問題に帰着されるが，これまでの結果を見ると，安定性の臨界はどの場合もフロケ指数の値が0（従って，主流と同じ周期構造）の撹乱によっている。 ただし，例外は三角形セル流の場合で，臨界撹乱が有限フロケ指数をもつ場合がある。

平行周期流の場合，撹乱方程式は，フロケ指数0の極限でtrivialではあるが一意の解をもち，その摂動展開が臨界レイノルズ数の普遍評価式を与える。 これに対し，セル構造をもつ周期流の場合は，いつでも存在するtrivialな解の他

に nontrivial な解も存在し得る。　この場合，前者の攪乱は特定の大規模構造をもつが，後者の攪乱は特定の構造をもたない。　この報告では長方形セル流を問題にし，安定性に関する結果を述べ，これらの点を明らかにする。

2. 定式化

非圧縮・粘性流体の二次元定常流に加えられた二次元攪乱を考える。　主流の流れ関数を $\Psi(x,y)$，攪乱の流れ関数を $\psi(x,y;t)$，　R をレイノルズ数とすると，線形化攪乱方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi+\frac{\partial(\Delta\Psi,\psi)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(\Delta\psi,\Psi)}{\partial(x,y)}-\frac{1}{R}\Delta^2\psi=0 \qquad (2.1)$$

となる。ここに $\partial(f,g)/\partial(x,y)$ は Jacobi 行列式，$\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ である。　攪乱 ψ に対する境界条件は

$$\psi(\pm\infty,y;t),\quad \psi(x,\pm\infty;t)<\infty \qquad (2.2)$$

である。

主流として縦 2π 横 $2\pi/k$ の長方形単位セルをもつ周期流を考えることにすると，周期方向に x-y 軸をとって，主流は

$$\Psi\left(x+\frac{2\pi}{k},y\right)=\Psi(x,y+2\pi)=\Psi(x,y) \qquad (2.3)$$

の周期性をもつ。　このとき攪乱はフロケの定理により

$$\psi(x,y;t)=e^{(\sigma t+i\alpha kx+i\beta y)}F(kx,y) \qquad (2.4)$$

形をとる。ここに，σはあとで固有値の決まる複素増幅率，αとβはフロケ指数，Fは主流と同じ周期性

$$F(kx+2\pi, y) = F(x, y+2\pi) = F(x, y) \tag{2.5}$$

をもつ周期関数である。境界条件（2.2）により，フロケ指数α，βは実数でなければならない。$F(x, y)$を支配する方程式は（2.4）を（2.1）に代入して得られる。形式的には，（2.1）の$\partial/\partial t$をσ，ψに作用する$\partial/\partial x$と$\partial/\partial y$をそれぞれ$i\alpha k + \partial/\partial x$，$i\beta + \partial/\partial y$，$\psi$を$F$におきかえることによって得られる。

3. 固有値問題

（2.3）の$\Psi(x, y)$と（2.5）の$F(kx, y)$をフーリエ級数の形

$$\left.\begin{aligned} \Psi(x, y) &= \sum_{m,n} B_{m,n}\, e^{i(mkx+ny)}, \\ F(kx, y) &= \sum_{m,n} a_{m,n}\, e^{i(mkx+ny)}, \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

に書き，これをFを支配する式に代入すると

$$\begin{aligned} \sigma a_{m,n} = &-\frac{1}{R}\Delta_{m+\alpha, n+\beta}\, a_{m,n} \\ &+ \frac{1}{\Delta_{m+\alpha, n+\beta}} \sum_{r,s} k\{s(m+\alpha) - r(n+\beta)\}\cdot \\ &\cdot(\Delta_{m+\alpha-r, n+\beta-s} - \Delta_{r,s}) B_{r,s}\, a_{m-r, n-s} \end{aligned} \tag{3.2}$$

となる。ここに，$\Delta_{p,q} = k^2p^2 + q^2$．（3.2）を形式的に

$$\sigma \boldsymbol{a} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{a} \tag{3.3}$$

と書くことにする。

この報告で問題にする長方形セル流

$$\Psi(x, y) = \cos kx \cdot \cos y \tag{3. 4}$$

に対する (3. 1) の表式は

$$\left.\begin{aligned} &B_{1,1} = B_{1,-1} = B_{-1,1} = B_{-1,-1} = \frac{1}{4}, \\ &\text{他の}\ B_{m,n} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3. 5}$$

となり，このとき (3. 2) は

$$\begin{aligned} \sigma a_{m,n} = &-\frac{1}{R}\Delta_{m+\alpha, n+\beta}\, a_{m,n} \\ &+ \frac{k}{4\Delta_{m+\alpha, n+\beta}}\Big\{(m+\alpha-n-\beta)(\Delta_{m+\alpha-1, n+\beta-1} - \Delta_{1,1})\, a_{m-1,n-1} \\ &\quad -(m+\alpha+n+\beta)(\Delta_{m+\alpha-1, n+\beta+1} - \Delta_{1,-1})\, a_{m-1,n+1} \\ &\quad +(m+\alpha+n+\beta)(\Delta_{m+\alpha+1, n+\beta-1} - \Delta_{-1,1})\, a_{m+1,n-1} \\ &\quad -(m+\alpha-n-\beta)(\Delta_{m+\alpha+1, n+\beta+1} - \Delta_{-1,-1})\, a_{m+1,n+1}\Big\} \end{aligned} \tag{3. 6}$$

となる。

フロケ指数 α と β は一般性を失うことなく

$$0 \leq \alpha,\ \beta \leq \frac{1}{2} \tag{3. 7}$$

にとることができる。何故なら，$|\alpha|, |\beta| > \frac{1}{2}$ の場合は，(2. 4), (2. 5) に従う $\bar{F}$ をとり直すことによって $|\alpha|, |\beta| \leq \frac{1}{2}$ の場合に，$-\frac{1}{2} \leq \alpha, \beta < 0$ の場合は

$$\left\{\begin{aligned} &a_{m,n}(-\alpha, \beta ; R) = (-1)^m a_{-m,n}(\alpha, \beta ; R), \\ &\sigma(-\alpha, \beta : R) = \sigma(\alpha, \beta ; R), \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} a_{m,n}(\alpha,-\beta;R) = (-1)^n a_{m,-n}(\alpha,\beta;R) \\ \sigma(\alpha,-\beta;R) = \sigma(\alpha,\beta;R) \end{cases}$$

によって，(3.7) の問題に帰着できるからである。

問題は結局 (3.7) の範囲の α と β に対し，R を与えて (3.6) から σ の固有値を求め，それが純虚数（増幅率 $\sigma_r = 0$）となるような R の値を決定することである。

4. 固有値問題の数値解

この節では (3.6) の右辺 $\mathbf{D}$ を有限行列 D_N におきかえて求めた固有値と，臨界レイノルズ数について述べる。ここに D_N は，$-N \leq m, n, j, k \leq N$ の $D_{m,n,j,k}$ を要素とする行列である。数値計算は2段階QR法[12,13]を用い，倍精度で行った。$k=1$ の場合の厳密解 $R_c = \sqrt{8}$ への収束を $N=3$ で再現できるが，今回の計算は $N=4\sim6$ で行い，更に大きな N で spot-check した。

図1に $k=0.5$，$R=3.55$ の場合の固有値の実部 σ_r の分布を示す。最大増幅率は $\alpha=\beta=0$ に現れる。この値が0となるレイノルズ数が臨界レイノルズ数 R_c で，$k=0.5$ の場合，$R_c = 3.54$ である。この形の σ_r 分布は，$0<k<0.639$ の k の範囲にわたって見出される。R_c の k による変化はあとで図3に示す。

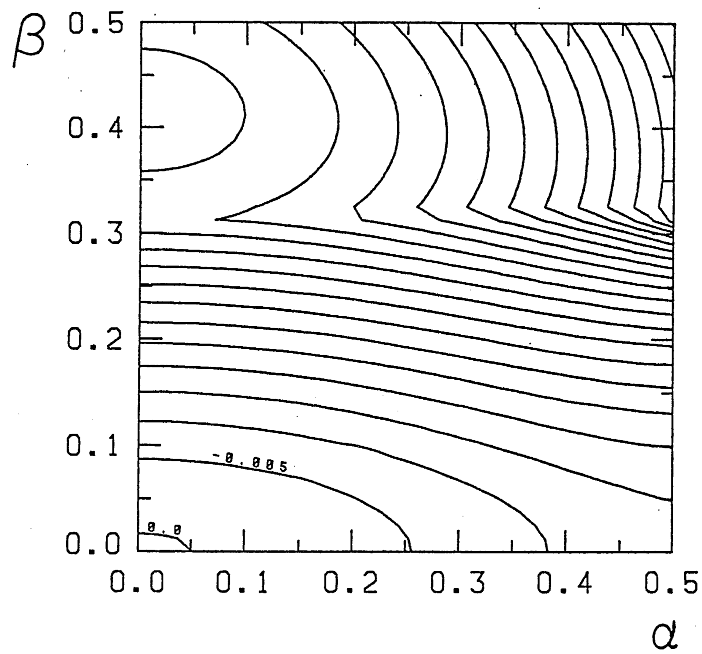


図1。等増幅率曲線
$k = 0.5$, $R = 3.55$
隣接する曲線上のσ_rの値の差は0.005である。

次に図2に $k = 0.75$, $R = 3.42$ の場合の σ_r の分布を示す。この場合，最大増幅率は $\beta/\alpha = 3/4$ の線上に現れる。Rの値を減少させると最大増幅率を与える(α, β) は $\beta/\alpha = 3/4$ にそって $\alpha = \beta = 0$ に近づく。$k = 0.75$ のときの R_c は3.41である。R_c の k による変化は図3に示す。

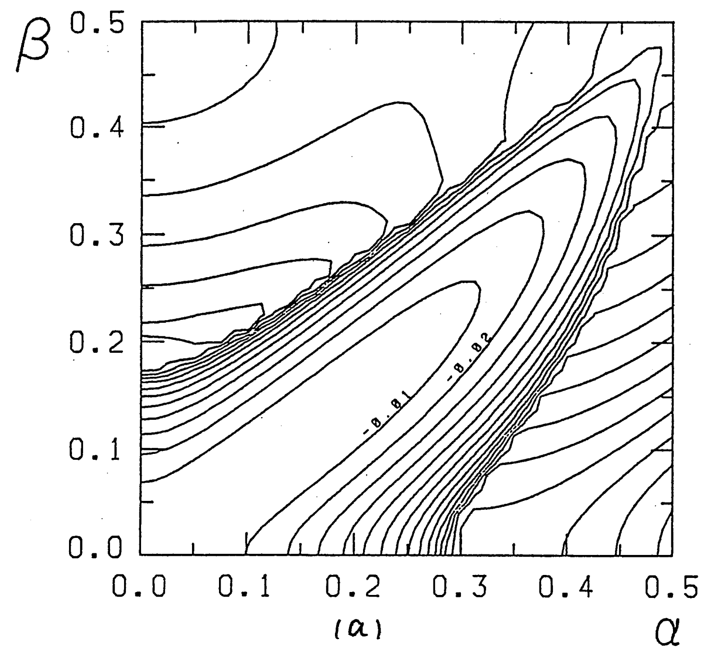
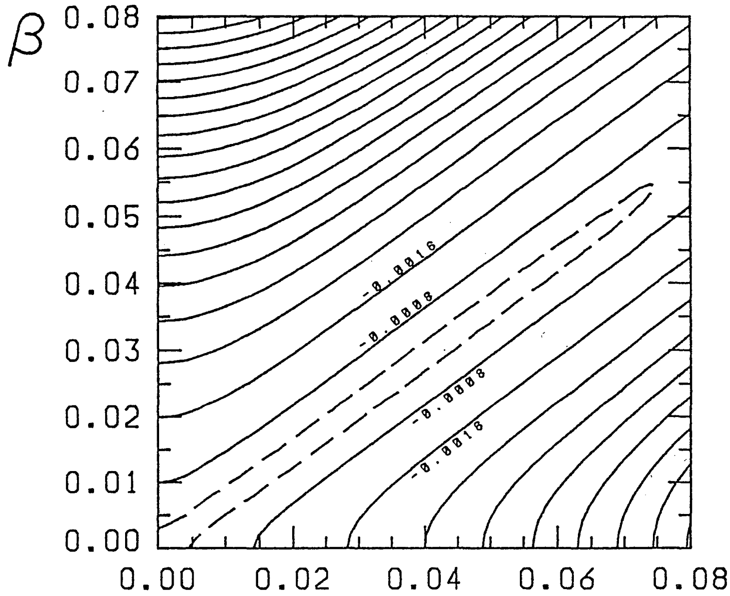


図2. 等増幅率曲線
$k = 0.75$, $R = 3.42$

a) 隣接する曲線上のσ_rの値の差は0.01。

b) 隣接する曲線上のσ_rの値の差は0.0008. 破線は$\sigma_r = -0.0002$.



(b)

パラメーターkによるR_cの変化を図3に示す。曲線は2つの部分から成るが，$k=0$から0.639までの部分をI，$k=0.639$から1.0までの部分をIIとする。I，IIともR_cを与える攪乱モードのフロケ指数は$\alpha=\beta=0$であるが，Iについてはα/βに特定の値を見出せない（図1）のに対し，IIの上ではβ/αが特定の値をとっていて，kに等しいと推定される（図2）。この点については次節で再び述べる。

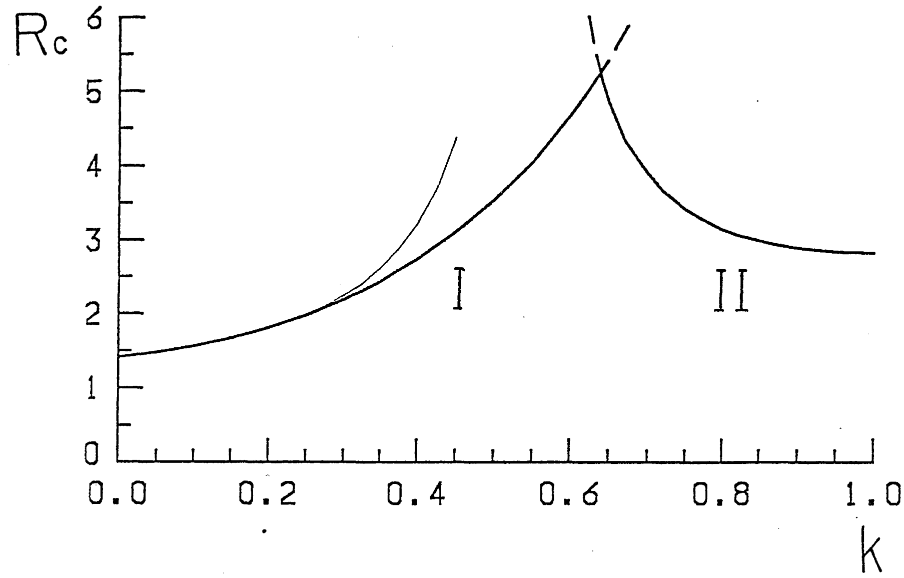


図3. kによるR_cの変化。細い曲線については5節参照。

5. 漸近解

前節に述べた数値計算の結果は，臨界レイノルズ数 R_c がいづれの場合もフロケ指数 $\alpha=\beta=0$ の擾乱によるにも拘らず，R_c の k による変化に2つの変り方があることを示している。その間の事情を明らかにする目的で，この節では固有値問題の $\alpha,\ \beta\to 0$ の漸近解を解析的に求めてみる。

$F,\ R,\ \sigma$ の α によるべき級数展開

$$(F,\ R,\ \sigma)=\sum_{n=0}^{\infty}(F_n,\ R_n,\ \sigma_n)(i\alpha)^n \qquad (5.1)$$

を F を支配する方程式に代入し，α のべきについて整理すると，$F_n\ (n=0,1,2,\cdots)$ を支配する方程式系が

$$\begin{aligned}
&\{L_0^2-\sigma_0R_0L_0-kR_0(\sin x\cos y\,\partial_y-\cos x\sin y\,\partial_x)(L_0+1+k^2)\}F_n\\
&=-4L_0L_1F_{n-1}-2(L_0L_2+2L_1^2)F_{n-2}-4L_1L_2F_{n-3}-L_2^2F_{n-4}\\
&\quad+\sum_{\substack{k+j+m=n\\ m\neq n}}\sigma_kR_jL_0F_m+2\sum_{k+j+m=n-1}\sigma_kR_jL_1F_m+\sum_{k+j+m=n-2}\sigma_kR_jL_2F_m\\
&\quad+k\sum_{\substack{j+m=n\\ m\neq n}}R_j(\sin x\cos y\,\partial_y-\cos x\sin y\,\partial_x)(L_0+1+k^2)F_m\\
&\quad+k\sum_{j+m=n-1}R_j\{2(\sin x\cos y\,\partial_y-\cos x\sin y\,\partial_x)L_1\\
&\qquad\qquad-(\cos x\sin y-\gamma\sin x\cos y)(L_0+1+k^2)\}F_m\\
&\quad+k\sum_{j+m=n-2}R_j\{(\sin x\cos y\,\partial_y-\cos x\sin y\,\partial_x)L_2\\
&\qquad\qquad-2(\cos x\sin y-\gamma\sin x\cos y)L_1\}F_m\\
&\quad-k\sum_{j+m=n-3}R_j(\cos x\sin y-\gamma\sin x\cos y)L_2F_m,
\end{aligned}\qquad (5.2)$$

のように得られる。ここに，$X=kx$，$\gamma=\beta/\alpha$，$\partial_X=\partial/\partial X$，$\partial_y=\partial/\partial y$，$L_0=k^2\partial_X^2+\partial_y^2$，$L_1=k^2\partial_X+\gamma\partial_y$，$L_2=k^2+\gamma^2$ である。特に F_0 を支配する方程式は

$$\{L_0^2-\sigma_0R_0L_0-kR_0(\sin X\cos y\,\partial_y-\cos X\sin y\,\partial_X)(L_0+1+k^2)\}F_0=0 \qquad (5.3)$$

となる。

レイノルズ数が実数であることと，臨界条件を与える σ が純虚数であることから，R_{2n} と σ_{2n+1} は実数，R_{2n+1} と σ_{2n} は純虚数でなければならない。

(5.3) はパラメター γ を含まないので，(5.3) から R_0 が決るとすれば R_0 と k の関係は γ に依存しない図1の曲線Ⅰを与える筈である。これとは別に (5.3) は $F_0=\mathrm{const.}$ を解とする。この場合，R_0 は (5.3) だけでは決らず高次近似を必要とし，これが γ に依存するのでこの場合の R_0 と k の関係は曲線Ⅱを与えるであろう。周期条件 (2.5) を満足する (5.2) の解 F_n が存在するためには (5.2) の非同次項は可解条件を満足しなければならない。この条件は，(5.3) の随伴方程式の解を $\tilde{F}_0$ とすると $\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{(5.2)\text{の右辺}\}\tilde{F}_0\,dX\,dy=0$ となる。特に $\tilde{F}_0=1$ のとき，

$$4\pi^2L_2^2\,\delta_{n,4}-4\pi^2\sum_{k+j=n-2}\sigma_kR_jL_2^2$$

$$+2k\sum_{j+m=n-2}R_j\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos X\sin y-\gamma\sin X\cos y)L_1F_m\,dX\,dy$$

$$+ k \sum_{j+m=n-3} L_2 R_j \iint_{-\pi\,-\pi}^{\pi\,\pi} (\cos x \sin y - \gamma \sin x \cos y) F_m\, dx\, dy. \quad (5.4)$$

$F_0 = 1$ を第一近似とする (5.2) と (5.4) の解は

$$\sigma_0 = 0,$$

$$F_1 = -\frac{kR_0}{1+k^2}(\cos x \sin y - \gamma \sin x \cos y),$$

$$\sigma_1 = 0,$$

$$F_2 = \frac{k^2 R_0(\gamma^2 - k^2)}{1+k^2}(g-h) + G,$$

ただし、$G_2 = \dfrac{4kR_0}{(1+k^2)^2}\{(k^2-\gamma^2)\sin x \sin y + (k^2-1)\gamma \cos x \cos y\}$

$$-\frac{kR_1}{1+k^2}(\cos x \sin y - \gamma \sin x \cos y),$$

$g(x,y)$ と $h(x,y)$ は

$$\{L_0^2 - kR_0(\sin x \cos y\, \partial_y - \cos x \sin y\, \partial_x)(L_0 + 1 + k^2)\}\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2x \\ \cos 2y \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

の周期解，そして $n=4$ のとき (5.4) は

$$\sigma_2 = 0,$$

$$4\pi^2 L_2^2 - \frac{\pi^2 k^2 R_0^2 (1+\gamma^2) L_2}{1+k^2}$$

$$+ \frac{8\pi^2 k^2 R_0^2}{(1+k^2)^2}\{(1-k^2)^2\gamma^2 + (k^2-\gamma^2)^2\}$$

$$- \frac{2k^3 R_0^3 (\gamma^2-k^2)^2}{1+k^2} I_s = 0, \quad (5.6)$$

$$I_s = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin y\, (g-h)\, dx\, dy \quad (5.7)$$

となる。 k と R_0 を与えて (5.5) から g と h を求め，(5.7)

の I_s を計算し，(5.6) から γ^2 が定まるので，γ^2 が正値をとる範囲で R_0 の最小値を求めることによって R_c が得られる。

この手順で R_c を定める前に (5.6) で $\gamma^2=k^2$ とおくと，R_0 について容易に解くことができて，

$$R_0^2=\frac{8(1+k^2)^2}{(3-k^2)(3k^2-1)} \tag{5.8}$$

が得られるが，この結果は図3の曲線Ⅱと完全に一致する。従って，曲線Ⅱは $\gamma=\pm k$，α と $\beta\to 0$ の解，すなわち正方形大規模構造をもったモードであることが確認された。

(5.8) は $1/3<k^2<3$ の R_c しか与えないので，k の小さな値に対して先に述べた手順に従って R_c をもとめると，結果は図3に細い曲線で示したように，$k=0$ 近傍では曲線Ⅰと一致するが，k が増加するに従って曲線Ⅰよりも大きな値をとる。このとき $\gamma=0$。この細曲線上の (k,R) について4節の方法で σ の固有値を求めると，σ_r の大きな値から順に順序をつけたとき，この節で得られた $\sigma_r=0$ は第2固有値になっていることが確認できる（第1固有値は勿論正実部）。曲線Ⅰを与えるモードは比 β/α の任意の値に対して存在し（図1）特定の空間構造をもたないと考えられる。

6. 結　論

この論文では，流れ関数 $\Psi=\cos kx\cos y$ で表される長方形セル流の安定性を研究し，次の結果を得た。

1) 臨界レイノルズ数 R_c の k による変化は図3に示す通りである。

2) 図3の曲線Iの R_c を与える臨界擾乱は，フロケ指数0のモードであるが，特定の空間構造を伴わない。

3) 図3の曲線IIの R_c を与える臨界擾乱は，フロケ指数→0のモードであって，正方形大規模構造をもつ。

これらのモードが擾乱の非線形成長にどのような意味をもつかは今後の研究課題である。

追　記　本研究の数値計算は 万井敏寛君が担当した。ここに記して謝意を表します。

引用文献

1) L.D.Meshalkin and Ia.G.Sinai, PMM 25 (1961) 1140 (J. Appl. Math. Mech., 25 (1961) 1700).

2) T.J.Eisler, Rep. Proj. Michigan 2900-327-T Univ. Michigan (1962).

3) I.S.A.Green, J. Fluid Mech., 52 (1974) 273.

4) N.F.Bondarenko, M.Z.Gak and F.V.Dolzhansky, Atmospheric and Oceanic Physics 15 (1979) 771.

5) D.N.Beaumont, J. Fluid Mech., 108 (1981) 461.

6) K.Gotoh, M.Yamada and J.Mizushima, J. Fluid Mech., 127 (1983) 45.

7) G.I.Sivashinsky, Physica 17D (1985) 243.

8) K.Gotoh and M.Yamada, Encyclopedia of Fluid Mech. N.D. Cheremisinoff ed. Gulf Publishing (1985) 589.

9) K.Gotoh and M.Yamada, J. Phys. Soc. Japan 53 (1984) 3395.

10) K.Gotoh and M.Yamada, Fluid Dynamic Res., 1 (1986) 165.

11) M.Takaoka, J. Phys. Soc. Japan 58 (1989) 2223.

12) J.H.Wilkinson, The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press Oxford (1965)

13) J.H.Wilkinson and C.Reinsch, Linear Algebra, Handbook for Automatic Computation, 2, Springer-Verlag pp.359-371.