数理解析研究所講究録
735巻 1990年 140-156

Weyl群のSpringer表現とhyperplane complementのcohomology

東京理科大 理工 庄司俊明
(Toshiaki Shoji)

§0. 序. Weyl群 W の鏡映に関する hyperplane complement から生じる Poincaré 多項式と、W の Springer 表現との間に奇妙な関係のある事が Spaltenstein [S] により指摘されていた。この Spaltenstein の予想は例外群の場合には、彼自身により確められていたが、古典群の場合にはまだ未確認だった。ここでは、予想が古典群 (D_{2n+1} 型を除いて) の場合にも成立する事を報告したい。以下は、G. I. Lehrer との共同研究である。

§1. Hyperplane complement の cohomology.

W を Euclid 空間 $V_{\mathbb{R}}$ 上に実現された有限 Coxeter 群とし、$V = V_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ をその複素化とする。$\mathcal{A}$ を W の鏡映から生じる V の (複素化された) 超平面全体の集合とし、V の hyperplane complement $M = V - \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ を考える。

$$P_M(t) = \sum_{i \geq 0} \dim_{\mathbb{C}} H^i(M, \mathbb{C}) t^i$$

をMのPoincaré多項式とする。次の事実は古典的である。

<u>定理</u>1.1.（Arnold, Brieskorn）

$$P_M(t) = \sum_{w \in W} t^{n(w)} = \prod_{i=1}^{\ell} (1 + m_i t) \quad ,$$

但し，$\ell = \dim V$，$m_1, m_2, \cdots, m_\ell$ は W の exponents，$n(w)$ は w を鏡映の積として書いた時の最小個数（$= \operatorname{rank}(w-1)$）である。

上の定理は，Orlik-Solomon により次の様に一般化された。X を $\mathcal{A}$ に含まれる超平面いくつかの共通部分として得られる V の部分空間とする。X の超平面 $\mathcal{A}_X$ を

$$\mathcal{A}_X = \{ H \cap X \mid H \in \mathcal{A} ,\ H \cap X \subsetneq X \}$$

で定義する。$M_X = X - \bigcup_{H \in \mathcal{A}_X} H$ とおき，M_X の Poincaré 多項式 $P_{M_X}(t)$ を考える。この時，

<u>定理</u>1.2.（Orlik-Solomon [OS]）

$$P_{M_X}(t) = \prod_{i=1}^{k} (1 + m_i(X) t)$$

と表せる。但し，$k = \dim X$，$m_1(X), \cdots, m_k(X)$ は正の整数。

注意. Orlik-Solomon は，各 X に対し $P_{M_X}(t)$ を計算し定理を得た。$m_1(X), \cdots, m_\ell(X)$ の意味ははっきりしない。寺尾[T]の結果によれば，$\mathcal{A}_X$ が X の free arrangement になる場合には，M_X の Poincaré 多項式は一次式の積に分解し，$\{m_i(X)\}$ は $\mathcal{A}_X$ に対応する generalized exponents に一致する事が分っている。上の場合の多くの X に対し，$\mathcal{A}_X$ が free arrangement になる事が確められているが，すべてそうなるかどうかはまだ分っていない。

§2. Spaltenstein の予想

G を複素 reductive Lie 群，B を G の Borel 部分群，W を G の Weyl 群とする。G の unipotent 元 u に対して

$$\mathcal{B}_u = \{ gB \in G/B \mid g^{-1}ug \in B \}$$

とおく。$\mathcal{B}_u$ は $\mathcal{B} = G/B$ の closed subvariety になる。Springer により $\mathcal{B}_u$ の cohomology $H^i(\mathcal{B}_u, \mathbb{C})$ 上に W の表現が定義されている。これを W の Springer 表現と言う。W の Springer 表現は，有限体上定義された reductive 代数群に対しても，ℓ-adic cohomology を使って構成できる。それは有限代数群の Deligne-Lusztig の virtual character と密接に関係している。即ち，G を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上定義された連結 reductive 代数群，

$F: G \to G$ を対応する Frobenius map，$G^F = G(\mathbb{F}_q)$ を F の固定点からなる有限群とする。G の F-stable な maximal torus T，$\theta: T^F \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ に対し G^F の Deligne－Lusztig virtual character $R_T^G(\theta)$ が構成される。但し，$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ は ℓ－進数体 $\mathbb{Q}_\ell$ の代数的閉包，$(\ell \neq ch(\mathbb{F}_q))$ である。G^F_{uni} を G^F の unipotent 元全体の集合とすると，$R_T^G(\theta)|G^F_{uni}$ は θ によらない。G^F_{uni} 上の類関数 $Q_T^G = R_T^G(\theta)|G^F_{uni}$ を G の T に関する Green 関数という。次の事実が知られている。

<u>定理</u> 2.1.（Springer，Kazhdan） G を $\mathbb{F}_q$ 上 split type，$p = ch(\mathbb{F}_q)$，q は十分大きいと仮定する。この時 G^F_{uni} の各共役類（in G）に"良い"代表元 u が選べ，

$$Q_{T_w}^G(u) = \sum_{i \geq 0} Tr(w, H^{2i}(\mathcal{B}_u, \overline{\mathbb{Q}}_\ell))\, q^i$$

と表わせる。但し T_w は $w \in W$ に対応する G の F-stable な maximal torus である。

<u>注意</u>．$\mathbb{C}$，$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ のいずれの場合にも，$\mathcal{B}_u$ の odd cohomology は 0 になる事が知られている。E_8 の場合，上の"良い"代表元の取り方には，q に少し条件がつく。

再び $G/\mathbb{C}$ に戻る。Springer-Kazhdan の定理を踏まえて，形式的に G の unipotent 元 u に対し，

$$Q_u(w) = \sum_{i \geq 0} \mathrm{Tr}(w, H^{2i}(\mathcal{B}_u, \mathbb{C}))\, t^i$$

とおく。$w \in W$ を動かす事により Q_u は係数が W の指標環 $R(W)$ にある多項式環 $R(W)[t]$ の元とみなす事ができる。

以上の準備のもとに Spaltenstein の予想を述べる。今，Δ を G の maximal torus T に対応する root 系，$\Pi \subset \Delta$ を simple root 系とする。Weyl 群 $W = N_G(T)/T$ は $V = \mathrm{Lie}\, T$ 上に鏡映群（その複素化）として実現できる。各 $J \subset \Pi$ に対し，$X = X_J$ を $X_J = \bigcap_{\alpha \in J} H_\alpha$ で定義する。但し，H_α は鏡映 $r_\alpha \in W$ に関する V の超平面である。Orlik-Solomon の結果より

$$P_{M_{X_J}}(t) = \prod_{i=1}^{k} (1 + m_i(X_J)t)$$

と分解できる。

一方，P_J を type J の G の parabolic subgroup，L_J を P_J の Levi subgroup とする。（L_J の simple root 系は J で与えられる。）L_J の regular unipotent element を u_J とし，"Green 関数" Q_{u_J} を考える。この時

予想 2.2. (Spaltenstein)

$$\langle Q_{u_J}, \rho \rangle_W = \sum_{i=1}^{k} t^{m_i(X_J)},$$

但し，ρ は W の reflection character，$\langle\ ,\ \rangle_W$ は W の指標に関する内積である。

注意 (i). $J=\phi$（空集合）の場合は，$u_J=1$ で $Q_{u_J}=Q_1=\sum_{i\geq 0} H^{2i}(\mathcal{B},\mathbb{C})t^i$ となる。又，graded W-module として，$\bigoplus H^{2i}(\mathcal{B},\mathbb{C})$ は $S(V^*)/I$ と同型になる事が知られている。ここに，$S(V^*)$ は V 上の polynomial functions の algebra，I は定数項を持たない W-不変な polynomial functions で生成された $S(V^*)$ の ideal である。一方この場合，$X_J=V$ で $\{m_i(X_J)\}=\{m_i\}$ は Weyl 群の exponents である。この場合に予想の成立する事は，知られていた。

(ii). 有限体上の代数群に対して，Green 関数 $Q^G_{T_w}$ を計算する algorithm が存在する。特に例外群に対しては $Q^G_{T_w}$ は全て計算され，Green 関数の表が出来ている。この表を使って，個々の $H^i(\mathcal{B}_u,\mathbb{C})$ への Springer 表現は，完全に決定される。又，$m_i(X_J)$ は Orlik-Solomon により全て与えられているので，これらにより予想を例外群の場合に検証する事は可能である。実際 Spaltenstein は例外群の場合に確め

る事により上述の予想に到達した。しかし Green 関数を計算する algorithm は、Springer 表現の個々の情報，例えば $H^{2i}(\mathcal{B}_u,\mathbb{C})$ における ρ の重複度などについては、無力である。全ての Green 関数を計算して始めて全ての Springer 表現が分り，従って ρ の重複度も計算できるわけだが これでは、古典群に関しては役に立たない。直接 ρ の重複度を計算する工夫が必要になる。

我々の結果は，

定理 2.3.（Lehrer − Shoji [LS]）G を A_n 型，B_n 型，C_n 型，および D_{2n} 型のいずれかとする。この時予想は成立する。

注意．D_{2n+1} 型の場合は，まだ分っていない。以下の証明は，個々の場合に ρ の $H^{2i}(\mathcal{B}_u,\mathbb{C})$ における重複度を計算して，Orlik-Solomon の結果と比較する事により得られる。Case-by-case の検証によらない一般的な証明が望まれる。

§3．証明の概略．

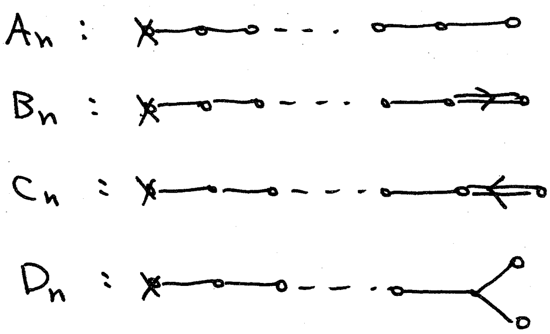
それぞれの場合に，ρ と $H^{2i}(\mathcal{B}_u) = H^{2i}(\mathcal{B}_u,\mathbb{C})$ との重複度を計算する事が目標である。先ず，次の定理が出発点である。

<u>定理</u>3.1.（Borho–MacPherson）PをGのparabolic subgroup, W_Pを対応するWのWeyl subgroupとする. Gのunipotent元uに対し, $\mathcal{P}_u = \{ gP \in G/P \mid g^{-1}ug \in P \}$とおく。この時

$$H^i(\mathcal{B}_u, \mathbb{C})^{W_P} \simeq H^i(\mathcal{P}_u, \mathbb{C}),$$

但し，左辺は$H^i(\mathcal{B}_u, \mathbb{C})$の$W_P$-fixed point subspaceを意味する。

以下では，次の様にDynkin図形から1頂点を除いて得られるmaximal parabolic subgroup Pを考える。



この時，次の事実は容易に分る。

(3.2)
$$1_{W_P}^{W} = \begin{cases} 1+\rho & W : A_n\text{型の場合.} \\ 1+\rho+\xi & W : B_n, C_n, D_n\text{型の場合.} \end{cases}$$

但し，ρはWのreflection表現，ξはYoung図形$(\square\cdots\square, \phi)$に対応する$\deg \xi = n-1$の既約表現である。($\rho$は$(\square\cdots\square, \square)$

に対応し，$\deg \rho = n$ である。)

所で一般に，$i=0$ の時 $H^0(\mathcal{B}_u) \simeq 1_W$，$i>0$ の時 $\langle H^i(\mathcal{B}_u), 1_W \rangle_W = 0$ となる事が知られている。従って Frobenius の相互律により

(3.3) $i>0$ に対し

$$\dim H^{2i}(\mathcal{P}_u) = \begin{cases} \langle \rho, H^{2i}(\mathcal{B}_u) \rangle_W & A_n \text{型} \\ \langle \rho+\xi, H^{2i}(\mathcal{B}_u) \rangle_W & B_n, C_n, D_n \text{型}. \end{cases}$$

となる事が分る。A_n 型の場合には (3.3) から直ちに ρ の重複度が計算できる。実際，この場合 $\mathcal{P}_u \simeq \mathbb{P}(\mathrm{Ker}(u-1))$，射影空間であり，良く知られている様に

$$H^{2i}(\mathcal{P}_u) = \begin{cases} \mathbb{C} & i=0,1,\cdots,\dim \mathcal{P}_u \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他}. \end{cases}$$

従って，

$$\langle \rho, Q_u \rangle_W = t + t^2 + \cdots + t^{\dim \mathcal{P}_u}$$

を得る。

他の場合にも $H^{2i}(\mathcal{P}_u)$ を計算する事により $\rho+\xi$ と $H^{2i}(\mathcal{B}_u)$ との内積は計算できる。しかし定理を示す為には ρ と ξ を分離する必要がある。その為に $H^{2i}(\mathcal{B}_u)$ を W-module $H^{2i}(\mathcal{B})$ と

比較する事を考える。自然な埋め込み $\iota: \mathcal{B}_u \hookrightarrow \mathcal{B}$ より $\iota^*: H^{2i}(\mathcal{B}) \longrightarrow H^{2i}(\mathcal{B}_u)$ が誘導されるが、ι^* は W-equivariant になる事が分っている。又、$j: \mathcal{P}_u \hookrightarrow \mathcal{P}$ より $j^*: H^{2i}(\mathcal{P}) \longrightarrow H^{2i}(\mathcal{P}_u)$ が導かれる。一方、自然な写像 $G/B \longrightarrow G/P$ より $p_u: \mathcal{B}_u \longrightarrow \mathcal{P}_u$ が定義され、$p_u^*: H^{2i}(\mathcal{P}_u) \longrightarrow H^{2i}(\mathcal{B}_u)$ を得る。次の命題は Borho-MacPherson の定理（定理3.1）の精密化である。

<u>命題</u>3.4. p_u^* により $H^{2i}(\mathcal{P}_u) \xrightarrow{\sim} H^{2i}(\mathcal{B}_u)^{W_P}$ が誘導され次の図式は可換になる。

$$\begin{array}{ccc}
H^{2i}(\mathcal{B})^{W_P} & \xrightarrow{\iota^*} & H^{2i}(\mathcal{B}_u)^{W_P} \\
{\scriptstyle p_1^*}\ \wr\uparrow & & \uparrow\wr\ {\scriptstyle p_u^*} \\
H^{2i}(\mathcal{P}) & \xrightarrow{j^*} & H^{2i}(\mathcal{P}_u)
\end{array}$$

次の Lemma は命題3.4より直ちに得られる。（以下では、W-module V の ρ,ξ-isotypic part を $V_{\rho,\xi}$ で表わす事にする。）

<u>Lemma</u> 3.5. ある $i>0$ に対し、$j^*: H^{2i}(\mathcal{P}) \longrightarrow H^{2i}(\mathcal{P}_u)$ は全射であり、$H^{2i}(\mathcal{B})_{\rho,\xi} = H^{2i}(\mathcal{B})_\chi$ $(\chi \in \{\rho,\xi\})$ と仮定する。（即ち、$H^{2i}(\mathcal{B})_{\rho,\xi}$ は ρ 又は ξ のどちらか一方のみ）。この時、$H^{2i}(\mathcal{B}_u)_{\rho,\xi} = H^{2i}(\mathcal{B}_u)_\chi$ であり、

$$\dim H^{2i}(\mathcal{B}_u)_\chi = \dim H^{2i}(\mathcal{P}_u).$$

実際、仮定より $H^{2i}(\mathcal{B})_{\rho,\xi} \longrightarrow H^{2i}(\mathcal{B}_u)_{\rho,\xi}$ は全射となり、従って Lemma が成立する。

所で、W-module $\bigoplus H^{2i}(\mathcal{B})$ の構造は §2の注意に述べた様によく知られている。そこで、$H^{2i}(\mathcal{B})$ に $1, \rho, \xi$ の現われる pattern を表にすると次の様になる。

$H^*(\mathcal{B})$の次数	0	1	2	3	・ ・・・	$2n-2$	$2n-1$
B_n型，C_n型	1	ρ	ξ	ρ	・・・・・	ξ	ρ

	0	1	2	・・・・	$2n-2$	$2n-1$	$2n$	・・・	$4n-3$	$4n-2$
D_{2n}型	1	ρ	ξ	・・・・	ξ	2ρ	ξ	・・・	ρ	ξ

	0	1	2	・・・・	$2n-1$	$2n$	$2n+1$	・・・	$4n-1$	$4n$
D_{2n+1}型	1	ρ	ξ	・・・・	ρ	$\rho+\xi$	ρ	・・・	ρ	ξ

これより Lemma 3.5 の2番目の仮定に関して次が成り立つ。

(3.6.) (i) G が B_n, C_n, D_{2n} 型の時，全ての $i>0$ に対し Lemma 3.5 の仮定が満される。

(ii) G が D_{2n+1} 型の場合，$i=2n$ (この時 $H^{2i}(\mathcal{B})_{\rho,\xi} = \rho+\xi$) を除いて Lemma 3.5 の仮定が満たされる。

Lemma 3.5 の最初の仮定については，次が成り立つ。

<u>命題</u> 3.7. (i) G が C_n 型の時，各 u に対し，$j^*: H^{2i}(\mathcal{P}) \longrightarrow H^{2i}(\mathcal{P}_u)$ は全ての $i \geq 0$ について，全射．

(ii) G が B_n, D_n 型の時，各 u に対し，j^* は高々1個の i を除いて全射．

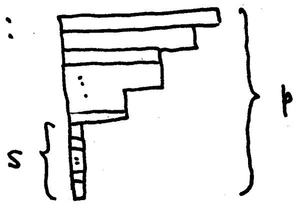
<u>注意</u> (i). 命題3.7の証明は，cohomology の完全列

$$0 \longrightarrow H_c^{2i}(\mathcal{P}-\mathcal{P}_u) \longrightarrow H^{2i}(\mathcal{P}) \longrightarrow H^{2i}(\mathcal{P}_u) \rightarrow H_c^{2i+1}(\mathcal{P}-\mathcal{P}_u) \rightarrow 0$$

を通じて，$H_c^{2i+1}(\mathcal{P}-\mathcal{P}_u) = 0$ を示す事により得られる。又．Lemma 3.5 を適用して ρ の重複度を求める為には $H^{2i}(\mathcal{P}_u)$ の次元の決定が必要になる。つまり我々の方針は．ρ の重複度の決定に．$\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_u$, $\mathcal{P}-\mathcal{P}_u$ の cohomology の計算を利用する事にある。

(ii). 命題3.7の (ii) で除外される i は次の通りである。$G = SO_N(\mathbb{C})$ を $GL_N(\mathbb{C})$ に埋め込み，unipotent 元 u を Jordan 標準形により $u = u_\lambda$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)$, $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p > 0$ と N の partition で表わす。今 s を $\lambda_i = 1$ となる i の個数とする。即ち，

$u = u_\lambda$,　　λ :



この時，G：B_n型（$N=2n+1$）ならば p は奇数，G：D_n型（$N=2n$）ならば p は偶数である。いずれの場合も，

s：奇数 ⇒ j^* は全ての i に対して全射

s：偶数 ⇒ j^* は $i = p - \frac{s}{2} - 1$ の時全射ではなく，その他の i に対しては全射．

である。

以上の議論をまとめると，$\mathcal{P}_u$ の cohomology を計算する事により次の事実が示される。ここまでの議論は任意の unipotent 元（即ち，$u = u_J$ とならないものも含めて）で成立する事に注意する．

(3.8.) 任意の unipotent 元 u に対し，ρ の $H^{2i}(\mathcal{B}_u)$ における重複度は，以下の場合に計算できる．

- C_n型 ‥‥ 全ての i.
- B_n, D_{2n}型 ‥‥ 高々1個の i を除いて全ての i.
- D_{2n+1}型 ‥‥ 高々2個の i を除いて全ての i.

C_n型に関しては、(3.8) より直ちに定理が得られる。B_n, D_{2n}型の場合もう1つ情報があれば残りの i も決める事が出来る。実際 $u = u_J$ については次の事実が知られている。

<u>定理</u>3.9. (Alvis-Lusztig) G を reductive 群, $u = u_J$ を L_J の regular unipotent element とする。この時

$$\bigoplus_{i \geq 0} H^{2i}(\mathcal{B}_u) \simeq \mathrm{Ind}_{W_J}^{W} 1 .$$

この定理により, B_n, D_{2n}型の場合, $u = u_J$ については残りの i に対しても ρ の重複度が計算でき, 定理を得る。D_{2n+1}型の場合には, まだ不定性が残ってしまう。

参考までに以下に各 $X = X_J$ に対応する $\{m_i(X_J)\}$ を記しておく。

A_n型 : $\{1, 2, \cdots, n - |J|\}$

B_n型 : $\{1, 3, 5, \cdots, 2n - 2|J| - 1\}$

D_n型 : $\{1, 3, 5, \cdots, 2n - 2|J| - 1\}$

(J が D_m型 $(m \geq 2)$ の成分を持つ場合)

〃 : $\{1, 3, 5, \cdots 2n - 2|J| - 3, k + n - |J| - 1\}$

(J が A 型の k 個の成分から成る場合).

この表から分る様に，A_n型，B_n型に対応する$\{m_i(X_J)\}$は それぞれ$A_{n-|J|}$，$B_{n-|J|}$型のWeyl群のexponentsに一致する。実際これらの場合$\mathcal{A}_X$はrank $n-|J|$のWeyl群W'のCoxeter arrangement（即ちW'に対応する$\mathcal{A}$）に一致している。しかし，D型の場合，$\mathcal{A}_X$はCoxeter arrangementにはならない。

注意．定理3.9は$u=u_J$に対してしか適用できないが，Green関数の"Ennola duality"を使う事により実はB_n，D_{2n}型の場合，全てのuに対して$\mathcal{S}$の重複度を計算する事が出来る。Ennola dualityはGreen関数をqの多項式としてみて$-q$を代入した結果を記述するもので，例えばA_n型に対しては

$$Q^{G^+}_{T_w}(u)(q) = Q^{G^-}_{T_{ww_0}}(u)(-q)$$

と表わされる。但し，左辺は$GL_n(\mathbb{F}_q)$に対するqの多項式としてみたGreen関数，右辺は$U_n(\mathbb{F}_{q^2})$のGreen関数である。又$w_0\in W$は最長元を表わす。同様の$q\leftrightarrow -q$に関する等式は，より複雑な形ではあるが全ての群に対して成立し，B_n，C_n，D_{2n}型の場合はGの"inner duality"を与え，D_{2n+1}型の場合は．A_n型と同様に$G^+\leftrightarrow G^-$のdualityを与える。所でGのinner duality $q\leftrightarrow -q$は．WのSpringer表現に

一種の parity の条件を与える。(例えば，B_n, C_n, D_{2n} 型の場合，ρ の $H^*(\mathcal{B})$ に表われる次数は常に奇数，ξ は常に偶数（3.5 の表参照）。）これにより定理 3.9 を使わずに残りの i の場合を決定する事が出来る。この場合でも，D_{2n+1} 型は除外される事に注意する。以下に C_n 型の場合を含めて，ρ と ξ の $H^*(\mathcal{B}_u)$ における重複度を Q_u との内積の形で表にしておく。各場合を通じて $u = u_\lambda$, $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$, $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_p > 0$ と表わす。又，s は命題 3.7 の後の注意 (ii) と同様である。

<u>B_n 型，D_{2n} 型.</u>

(a) s：奇数の場合

$$B_n 型：\begin{cases} \langle Q_{u_\lambda}, \rho \rangle = q + q^3 + \cdots + q^{p-2} \\ \langle Q_{u_\lambda}, \xi \rangle = q^2 + q^4 + \cdots + q^{p-3} \end{cases}$$

$$D_{2n} 型：\begin{cases} \langle Q_{u_\lambda}, \rho \rangle = q + q^3 + \cdots + q^{p-3} \\ \langle Q_{u_\lambda}, \xi \rangle = q^2 + q^4 + \cdots + q^{p-2} \end{cases}$$

(b) s：偶数の場合

$$B_n 型：\begin{cases} \langle Q_{u_\lambda}, \rho \rangle = q + q^3 + \cdots + q^{p-2} \\ \langle Q_{u_\lambda}, \xi \rangle = q^2 + q^4 + \cdots + q^{p-3} + q^{p-s/2-1} \end{cases}$$

$$D_{2n} 型：\begin{cases} \langle Q_{u_\lambda}, \rho \rangle = q + q^3 + \cdots + q^{p-3} + q^{p-s/2-1} \\ \langle Q_{u_\lambda}, \xi \rangle = q^2 + q^4 + \cdots + q^{p-2} \end{cases}$$

C_n 型

$$\langle Q_{u_\lambda}, \rho \rangle = \begin{cases} q + q^3 + \cdots + q^{p-1} & p：偶数 \\ q + q^3 + \cdots + q^{p-2} & p：奇数 \end{cases}$$

$$\langle Q_{u_\lambda}, \xi \rangle = \begin{cases} q^2 + q^4 + \cdots + q^{p-2} & p：偶数 \\ q^2 + q^4 + \cdots + q^{p-1} & p：奇数 \end{cases}$$

References

[LS] G. I. Lehrer and T. Shoji; On Flag varieties, Hyperplane complements and Springer representations of Weyl groups. Preprint.

[OS] P. Orlik and L. Solomon; Coxeter arrangements, in Proc. Sympos. Pure Math., 40 (1983), 167–189.

[S] N. Spaltenstein; Contribution to "Open problems in Algebraic groups", Katata, Taniguchi Foundation 1983.

[T] H. Terao; Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shepard-Todd-Brieskorn formula, Invent. Math., 63 (1981), 159–179.