数理解析研究所講究録
735巻 1990年 105-114

古典型単純Lie環の q-analogue の 有限次元既約表現の基底 − crystal base について

京大数理研　中島俊樹 (Toshiki Nakashima)

ここでは [K] により概念づけがなされた q-analogue $U_q(\mathfrak{g})$ ($\mathfrak{g} = A_n, B_n, C_n, D_n$) の有限次元既約表現に対する "crystal base" 及びそれを具体的に描写する "crystal graph" について述べたいと思う.

§1 The q-analogue of a universal enveloping algebra

まず $\mathfrak{t}$ を $\mathbb{Q}$ 上の有限次元 vector space, I を finite index set とする.

$\{h_i \in \mathfrak{t}; i \in I\}$ と $\{\alpha_i \in \mathfrak{t}^*; i \in I\}$ は lin indep set であり $\{\langle h_i, \alpha_j \rangle\}_{ij}$ は symmetrizable generalized Cartan matrix となるものとする. $\mathfrak{t}^*$ には $2(\alpha_i, \lambda) = (\alpha_i, \alpha_i)\langle h_i, \lambda\rangle$ なる内積をとっておく. ((α_i, α_i) は $\forall i \in I$ に対し positive integer)

$P \subset \mathfrak{t}^*$: weight lattice

$Q \subset P$: root lattice とする.

Def　U_q は $\mathbb{Q}(q)$ 上の algebra で symbol q^h ($h \in P^*$), e_i, f_i ($i \in I$) という次の関係式をみたすもので生

成される.

(1.1) $q^{h+h'}=q^h\cdot q^{h'}$ (for $h,h'\in P^*$) $q^0=1$

(1.2) $q^h e_i q^{-h}=q^{\langle h,\alpha_i\rangle}e_i$ $q^h f_i q^{-h}=q^{-\langle h,\alpha_i\rangle}f_i$ (for $h\in P^*$)

(1.3) $t_i=q^{(\alpha_i,\alpha_i)h_i}$ とおくと

$$[e_i,f_j]=\delta_{ij}\frac{t_i-t_i^{-1}}{q^{(\alpha_i,\alpha_i)}-q^{-(\alpha_i,\alpha_i)}}.$$

又 comultiplication $\Delta: U_q\to U_q\otimes U_q$ は

(1.4) $\Delta(q^h)=q^h\otimes q^h$

$\Delta(e_i)=e_i\otimes 1+t_i\otimes e_i$

$\Delta(f_i)=f_i\otimes t_i^{-1}+1\otimes f_i$

で与えられる. これにより U_q-module の tensor 積は U_q-module になる.

以下あつかう表現は integrable なものとし. とくに $M(\lambda)$ は highest weight λ ($\in P_+=\{\mu\in P;\ \langle h_i,\lambda\rangle\geq 0\}$) の irreducible U_q-module を表すものとする.

§2 Operators $\widetilde{e}_i$ と $\widetilde{f}_i$

各 i に対する Laplacian $\Delta_i=q_i^{-1}t_i+q_it_i^{-1}+(q_i-q_i^{-1})^2e_if_i-2$ と t_i $q_i=q^{(\alpha_i,\alpha_i)}$ で e_i, f_i を modify して $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{f}_i$ を次のようにおく.

$$\widetilde{e}_i:=(q_it_i\Delta_i)^{-\frac{1}{2}}e_i \qquad \widetilde{f}_i:=(q_it_i^{-1}\Delta_i)^{-\frac{1}{2}}f_i$$

$\widetilde{e}_i$, $\widetilde{f}_i$ は任意の U_q-module に operate する.

§3 Crystal base

$K := \mathbb{Q}(q)$ とし． $A := \{ f \in K \mid f$は $q=0$ で regular$\}$ とおく

K上の vector space V に対し L が V の lattice

$\Leftrightarrow$ L は A-free module で $V \cong K \otimes_A L$

Def　integrable U_q-module M に対し (L, B) が M の crystal base

$\Longleftrightarrow$ L は M の lattice，B は $\mathbb{Q}$-vector space L/qL の base で次の 1)～5) をみたす

1) $L = \bigoplus_{\lambda \in P} L_\lambda$　ここで $L_\lambda := L \cap M_\lambda$　(M_λ は M の weight space)

2) $B = \bigsqcup_{\lambda \in P} B_\lambda$　ここで $B_\lambda := B \cap (L_\lambda / qL_\lambda)$

3) $\forall i \in I$ に対し　$\tilde{e}_i L \subset L$　$\tilde{f}_i L \subset L$

4) $\forall i \in I$ に対し　$\tilde{e}_i B \subset B \cup \{0\}$　$\tilde{f}_i B \subset B \cup \{0\}$

5) $u, v \in B$ と $i \in I$ に対し． $u = \tilde{e}_i v \Longleftrightarrow v = \tilde{f}_i u$

Thm 1　$\mathfrak{g} = A_n\ B_n\ C_n\ D_n$ のとき　任意の integrable $U_q(\mathfrak{g})$-module with highest weight は crystal base をもつ

証明は [K] による．現在は $\mathfrak{g}$ が一般の symmetrizable な Kac Moody Lie-環に対しても成り立つことがわかっている．

Thm は $M = \mathcal{M}(\lambda)$ $(\lambda \in P_+)$ のとき　もう少し精密に述べられる．

$$\mathcal{L}(\lambda) := \sum A \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_k} u_\lambda \subset \mathcal{M}(\lambda) \qquad (u_\lambda \text{ は h.w.v})$$

$$B(\lambda) := \{ v = \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_k} u_\lambda \bmod q\mathcal{L}(\lambda)\ ;\ v \neq 0 \} \subset \mathcal{L}(\lambda)/q\mathcal{L}(\lambda)$$

とおくと

<u>Thm 2</u> $\lambda \in P_+$ に対し $(\mathcal{L}(\lambda), B(\lambda))$ は $M(\lambda)$ の crystal base

§4 sl_2-case

ここでは $\mathfrak{g} = sl_2$ とし具体的に crystal base をあつかってみる。$U_q(sl_2)$ は generator t, t^{-1}, e, f で生成される $\mathbb{Q}(q)$ 上の algebra で、その基本関係式は $tet^{-1} = q^2 e$, $tft^{-1} = q^{-2} f$, $[e, f] = t - t^{-1} / (q - q^{-1})$. Laplacian $\Delta = q^{-1} t + q t^{-1} + (q - q^{-1})^2 ef - 2 = qt + q^{-1} t^{-1} + (q - q^{-1})^2 fe - 2$ は $U_q(sl_2)$ の center 。$\{u_k\}_{0 \le k \le l}$ に対し

$$tu_k = q^{l-2k} u_k$$
$$eu_k = [k] u_{k-1}$$
$$fu_k = [l-k] u_{k+1}$$

とすると $V_l := \bigoplus_{k=0}^{l} \mathbb{Q}(q) u_k$ は $l+1$ 次元 irreducible $U_q(sl_2)$-module になる。($[n] = q^n - q^{-n} / q - q^{-1}$)

$\Delta|_{V_l} = q^{l+1} - 2 + q^{-l-1}$ より $(qt\Delta)^{\frac{1}{2}}$ は V_l に

$$(qt\Delta)^{\frac{1}{2}} u_k = q^{-k} (1 - q^{l+1}) u_k$$

という形で作用する。ここで $\tilde{e} = (qt\Delta)^{-\frac{1}{2}} e$ $\tilde{f} = (qt^{-1}\Delta)^{-\frac{1}{2}} f$ は

$$\tilde{e} u_k = (1 - q^{2k})(1 - q^2)^{-1}(1 - q^{l+1})^{-1} u_{k-1}$$
$$\tilde{f} u_k = (1 - q^{2(l-k)})(1 - q^2)^{-1}(1 - q^{l+1})^{-1} u_{k+1}$$

という形で作用する。ここで両係数とも A の元であることがわかる。しかも $q=0$ でともに 1 になる。

ここで $L := \bigoplus_{k=0}^{\ell} A u_k$　$B = \{u_k\}_{0\le k\le \ell}$ とおくと．$\tilde{e}L \subset L$ $\tilde{f}L \subset L$．や さらに

$$\tilde{e}u_k \equiv u_{k-1} \mod qL \qquad (0<k\le \ell)$$
$$\tilde{f}u_k \equiv u_{k+1} \mod qL \qquad (0\le k<\ell)$$

より　(L, B) が V_ℓ の crystal base となることがわかる．

§5 Properties of Crystal base

Prop 1　(L_j, B_j) が M_j $(j=1,\cdots,r)$ の crystal base のとき $\oplus(L_j, B_j) = (\bigoplus_j L_j, \bigsqcup_j B_j)$ は $\bigoplus_j M_j$ の crystal base

Prop 2　$M(\lambda)$ の crystal base $(\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(\lambda))$ に対し．$\mathcal{B}(\lambda)$ の元 u が $^\forall i$ に対し $\tilde{e}_i u = 0$ を満たすとき．$\mathcal{L}(\lambda)$ の元 u' があって $u = u' \mod q\mathcal{L}(\lambda)$ かつ $^\forall i$ に対し $e_i u' = 0$ を満たす．

Prop 3　(L_j, B_j) を M_j $(j=1,2)$ の crystal base とする．

(a)　$(L_1, B_1)\otimes(L_2, B_2) := (L_1\otimes L_2, B_1\times B_2)$ は $M_1\otimes M_2$ の crystal base．ここで $B_1\times B_2 \hookrightarrow L_1\otimes L_2/q(L_1\otimes L_2)$ は $(u, v)\mapsto u\otimes v$ で与えられる

(b)　$u\in B_1$　$v\in B_2$ に対し

(i)
$$\tilde{f}_i(u\otimes v) = \begin{cases} \tilde{f}_i u\otimes v & \text{if } ^\exists N>0 \text{ s.t. } \tilde{f}_i^N u \ne 0 \text{ かつ } \tilde{e}_i^N v = 0 \\ u\otimes \tilde{f}_i v & \text{otherwise} \end{cases}$$

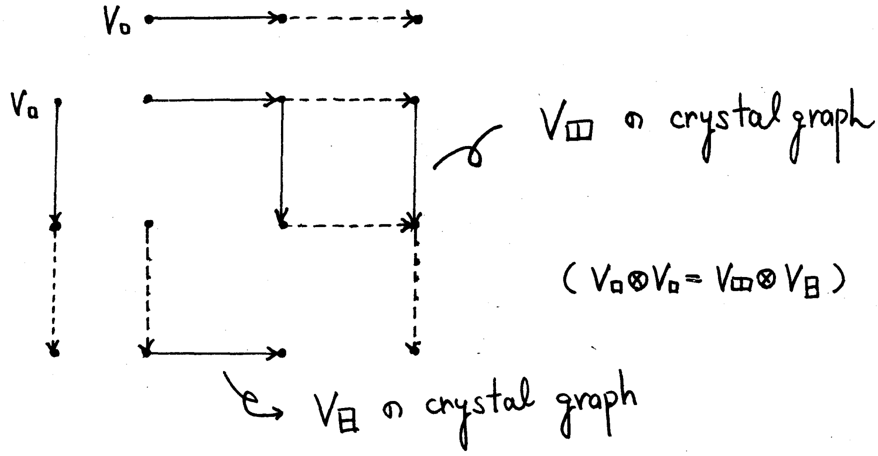
(ii)
$$\tilde{e}_i(u\otimes v) = \begin{cases} u\otimes \tilde{e}_i v & \text{if } ^\exists N>0 \text{ s.t. } \tilde{e}_i^N v \ne 0 \text{ かつ } \tilde{f}_i^N u = 0 \\ \tilde{e}_i u\otimes v & \text{otherwise} \end{cases}$$

§ 6 Crystal graph

crystal base の定義の 4), 5) より base B は graph の構造をもつことがわかる. $\tilde{f}_i u = v$ を $u \xrightarrow{i} v$ とかくことにすれば この graph は colored oriented graph となる.
又, この graph は tensor 積に対して, 安定性をもつことが Prop 3 よりわかる.

<u>Example</u> ・A_2 の vector表現 $V_\square$ の crystal graph

・A_2 の $V_\square \otimes V_\square$ の crystal graph



ここで, U_q-module M の crystal base (L, B) について,

M が irreducible $\Longleftrightarrow$ crystal graph が connected

(ここで crystal graph が connected とは各 arrow の color を忘れた graph として connected ということ)

に注意すれば, U_q-module M_1, M_2 に対し, $M_1 \otimes M_2$ の crystal graph の各 connected component が $M_1 \otimes M_2$ の既約成分

の crystal graph となることがわかる.

以下. tensor 積を利用し $\mathfrak{g} = A_n$ の場合に 任意の $\lambda \in P_+$ に対し $M(\lambda)$の crystal graph の具体的描写を与える. $\Lambda_i \ (1 \leq i \leq n)$ を fundamental dominant integral weight とするとき. $M(\Lambda_i)$の crystal graph を $M(\Lambda_i) \hookrightarrow M(\Lambda_1)^{\otimes i}$ を利用して実現してみる. $U_q(A_n)$-module $M(\Lambda_1)$ の crystal graph を次の形でかくことにする.

$$\boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \xrightarrow{2} \boxed{3} \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \boxed{n-1} \xrightarrow{n-1} \boxed{n} \xrightarrow{n} \boxed{n+1}$$

($L_0 = \bigoplus_{i=1}^{n+1} A\boxed{i}$, $B_0 = \{\boxed{i}\}_{i=1,\ldots,n}$) が $M(\Lambda_1)$ の crystal base

この B_0 の元 の tensor 積 $\boxed{i_1} \otimes \boxed{i_2} \otimes \cdots \otimes \boxed{i_N}$ を $\begin{array}{|c|}\hline i_1 \\ \vdots \\ i_N \\ \hline\end{array}$ とかくことにすると.

<u>Prop 4</u> $M(\Lambda_N)$ の crystal base $(L(\Lambda_N), B(\Lambda_N))$ に対し.

$$B(\Lambda_N) = \left\{ \begin{array}{|c|}\hline i_1 \\ \vdots \\ i_N \\ \hline\end{array} \ \middle| \ \begin{array}{l} \cdot\ i_j \in \{1, 2, \cdots, n+1\} \\ \cdot\ i_j < i_{j+1} \end{array} \right\}$$ とかけ

$B(\Lambda_N)$への $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ action は 次のように記述される

$u \in B(\Lambda_N)$ に対し. $u(i \to j)$ は u の i を j にかえたもの とすると. $u \in B(\Lambda_N)$ に対して

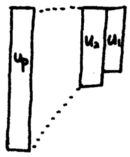
$$\tilde{f}_i u = \begin{cases} u(i \to i+1) & \text{if } \exists k \text{ s.t. } i_k = i \text{ かつ } i_{k+1} \neq i+1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\tilde{e}_i u = \begin{cases} u(i+1 \to i) & \text{if } \exists k \text{ s.t. } i_k = i+1 \text{ かつ } i_{k-1} \neq i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

証明は、まず $B(\Lambda_N)$ への $\tilde{e}_i$ $\tilde{f}_i$ の action が $B(\Lambda_N)$ の元を $B(\Lambda_1)$ の元の tensor積とみたときの $\tilde{e}_i$ $\tilde{f}_i$ の action と一致することを示す。次に $B(\Lambda_N)\cup\{0\}$ が $\tilde{e}_i$ $\tilde{f}_i$ の action で閉じていることをいい、最後に、$\forall i$ に対し $\tilde{e}_i u=0$ なる $B(\Lambda_N)$ の元 u は $u=\begin{array}{|c|}\hline 1\\ 2\\ \vdots\\ N\\ \hline\end{array}=\boxed{1}\otimes\cdots\otimes\boxed{N}$ という形のもののみであることを示せばよい。

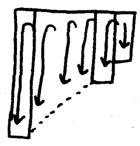
次に一般の $\lambda\in P_+$ に対しては $\lambda=\sum_{i=1}^{n} m_i\Lambda_i$ $(m_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ とかけるとき $M(\lambda)\hookrightarrow M(\Lambda_1)^{\otimes m_1}\otimes M(\Lambda_2)^{\otimes m_2}\otimes\cdots\otimes M(\Lambda_n)^{\otimes m_n}$ により crystal graph を実現する。

<u>Thm</u> $\lambda\in P_+$ を $\lambda=\Lambda_{i_1}+\Lambda_{i_2}+\cdots+\Lambda_{i_p}$ $(1\leq i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_p\leq n)$ とかくとき、$M(\lambda)$ の crystal base $(L(\lambda),B(\lambda))$ の $B(\lambda)$ は、

$B(\lambda)=\Big\{ w=$  $:=\boxed{u_1}\otimes\boxed{u_2}\otimes\cdots\otimes\boxed{u_p}\in B(\Lambda_{i_1})\otimes\cdots\otimes B(\Lambda_{i_p})$ $\Big|$ w は shape Y_λ の semi standard tableau (i.e Young tableau Y_λ に文字 $1,\dots,n+1$ をよこ方向"$\leq$" たて方向"∧"で $\Big\}$

(ここで Y_λ は λ できまる Young tableau)

$\tilde{f}_i$, $\tilde{e}_i$ の $B(\lambda)$ への action i.e $M(\lambda)$ の crystal graph の arrow の出方は次のように記述される。

$\tilde{f}_i$, $\tilde{e}_i$ の action について考えるとき、$w\in B(\lambda)$ の i と $i+1$ に注目する。$w=$  をこの矢印のように右上から1列ずつ見ていき、i と $i+1$ を順番に読みとっていく。

それを 左から順にならべ、i, $i+1$ というように ($i+1, i$ はダメ) となりあっているものがあれば、その2つをとりのぞく。それをくりかえし、とりのぞけるものがなくなるまで続ける。最終的に、$i+1, i+1, \cdots, i+1\ i \cdots, i$ というものがのこる。$\tilde{f}_i$ についてこの sequence の一番左の i (○でかこんだ i) に対応する w の i が $i+1$ にかわったものが $\tilde{f}_i w$ である。もしも、そういう i がなければ $\tilde{f}_i w = 0$ である。又、$\tilde{e}_i$ についてこの sequence の一番右の $i+1$ (◌でかこんだ $i+1$) に対応する w の $i+1$ が i にかわったものが $\tilde{e}_i w$ である。もしも、そういう $i+1$ がなければ $\tilde{e}_i w = 0$ である。(定理の証明は省略する)

<u>Example</u>. $\mathfrak{g} = A_3$ のとき

$$w = \begin{array}{|cccccc|}\hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & & \\ 3 & 4 & 4 & & & \\ \hline\end{array}$$

への $\tilde{f}_2$, $\tilde{e}_2$ の action を考える。

2, 3 を右上からよみとっていくと、3, 2, 2, 3, 2, 2, 3。定理の rule により $3, 2, 2, 3, 2, 2, 3 \longrightarrow 3, 2, 2$ となる。よってこのとき

$$\tilde{f}_2 w = \begin{array}{|cccccc|}\hline 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & & \\ 3 & 4 & 4 & & & \\ \hline\end{array} \qquad \tilde{e}_2 w = \begin{array}{|cccccc|}\hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & & \\ 3 & 4 & 4 & & & \\ \hline\end{array}$$

<u>Remark</u>. $\forall i$ に対して $\tilde{e}_i w = 0$ となる $B(\lambda)$ の元 w は

$$w = \begin{array}{|ccccccc|}\hline 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & & \\ 3 & 3 & \cdots & 3 & & & \\ \vdots & & & & & & \\ n & \cdots & n & & & & \\ \hline\end{array}$$

という形のもののみである。

$\mathfrak{g}=C_n$ のとき、$U_q(C_n)$ の vector 表現 $M(\Lambda_1)$ の crystal graph は次のようにかける。

$$\boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \xrightarrow{2} \cdots \xrightarrow{n-2} \boxed{n-1} \xrightarrow{n-1} \boxed{n} \xrightarrow{n} \boxed{\overline{n}} \xrightarrow{n-1} \boxed{\overline{n-1}} \xrightarrow{n-2} \cdots \xrightarrow{2} \boxed{\overline{2}} \xrightarrow{1} \boxed{\overline{1}}$$

これを、A_n の場合と同様に tensor 積を利用して、つみ上げて、一般の表現の crystal graph が構成される。又、B_n、D_n の場合、vector表現だけでなく spin表現も組みこむ必要があるため、記述は A、C 型にくらべやや複雑になる。

crystal graph は次のような応用が考えられる。

「$u\in B(\lambda)$、$v\in B(\mu)$ で $\forall i$ に対し $\tilde{e}_i(u\otimes v)=0$ をみたす u、v を確定せよ。」

これは、すなわち、$M(\lambda)\otimes M(\mu)$ の highest weight vector を確定せよということで、$M(\lambda)\otimes M(\mu)$ がどのように分解するかという $\mathfrak{gl}$ の場合の Littlewood Richardson rule を与えることになる。現在 $\mathfrak{g}=A_n$、B_n、C_n、D_n のとき、それぞれの crystal graph を利用して上記の u、v を確定する手続きが得られている。

参考文献

[K]. Masaki Kashiwara. "Crystalizing the q-analogue of univeral enveloping algebra" RIMS preprint 676 (to appear in C.M.P.)