数理解析研究所講究録
第 735 巻 1990 年 88-104

spinor 上の dual pair に対応する Robinson-Schensted 型対応

東大・理　寺田　至 (TERADA ITARU)

1. イントロダクション

最近、Robinson-Schensted 対応に類似した対応がさまざまの状況で非常に活発に構成されている。オリジナルの Robinson-Schensted 対応を含めて多くのものは、ある種の dual pair の存在する状況で現れる。(dual pair についてはすぐ下で復習する。) 大ざっぱにいって、dual pair を構成する二つの Lie 環 (または Lie superalgebra など各々の状況に応じたもの) の既約表現が partition で parametrize され、既約表現空間がそれぞれある種の tableau の集合と対応するような basis を持つ状況では、どういう Robinson-Schensted 型対応が存在するかを知ることは、舞台となる module がどう分解するか (2 つの Lie 環の既約表現がどういう組み合わせで対になって現れるか) を知ることと同値である。そこでさらに、単に "存在" を知るだけでなくいい性質を持つ対応を具体的に構成することは、何らかの表現論的な現象を読みとる手がかりになるのではないかというのがわれわれの基本的な考え (期待) である。

本稿では、一つの dual pair (長谷川浩司氏による "spinor 上の (C_m, C_n) 型 dual pair" [Ha]) に対応する Robinson-Schensted 型の対応を構成する。この構成には、Berele insertion [Be] 及び S. Sundaram が示したいくつかの性質 [Su86] を用いる。われわれの示した新しい本質的な点は、この dual pair の状況が insertion の使える状況として理解できることを示した点と、ある条件のもとで Berele insertion を連続して行ったときの shape の変化を $Sp(2n)$-tableau の形で表す方法を与えた点である。

われわれの結果は、この dual pair を定義する表現の分解 ((3.2) 参照) を組み合わせ論的に証明するもの (従って、それが dual pair であることを組み合わせ論的に証明するもの) ともいえる。($Sp(2m,\mathbb{C})$ の有限次元有理表現の同値類は character だけで決まること、及び既約表現の character が $Sp(2m)$-tableau の集合を使って書けることだけを使って証明する。)

E. Date, M. Jimbo, T. Miwa 氏による最近の仕事 [DaJiM] により、オリジナルの Robinson-Schensted 対応は Lie 環 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ の quantum deformation の立場から、ある表

現空間 (自然表現のいくつかのテンソル積) の 2 種類の basis (自然な basis と Gelfand-Tsetlin basis の q-analogue) の関係を $q \to 0$ の極限で記述するものとしてとらえられることがわかった。また、M. Kashiwara **[Ka]** によって、より一般に少なくとも古典型の Lie 環の q-analogue の有限次元表現においては、ある種の basis の間にそのような一対一対応を自然に引き起こすような構造が存在することも示されている。本稿で構成する対応も $U_q(\mathfrak{g})$ の表現の立場から自然にとらえられるかどうかを調べることは興味深い課題の一つである。

以下、次の記法及び用語を断りなく用いる。N で 1 以上の自然数全体を表し、$[n]$ で 1 から n までの自然数の集合を表す。*Partition* とは自然数の列 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ で、$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_l$ を満たすものをいう。このとき l を partition λ の長さといい、$l(\lambda)$ で表す。また、partition 全体の集合を $\mathcal{P}$ で表す。Partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ $(l = l(\lambda))$ を $\{(i,j) \in \mathsf{N} \times \mathsf{N} \mid 1 \leq j \leq \lambda_i\}$ という自然数の pair の集合と同一視し、これを第 1 座標軸を上から下へ、第 2 座標軸を左から右へ (行列と同じ) とったときの格子点の集合として図示したり、さらには格子点を正方形で置き換えた図 1 のような Young 図形と呼ばれるもので表す。また、symbol の集合 Γ を fix しておくとき、λ から Γ への写像を shape λ の *tableau* と定義する。(このときの λ は $\mathsf{N} \times \mathsf{N}$ の部分集合と見ている。) 形式的にはこのように写像として定義するが、shape λ の tableau と呼びたい本当のものは、図 2 のように λ の Young 図形の i 行 j 列の正方形の中に $T(i,j)$ を書き込んだものである。枠を書かずに中身だけ並べて書くこともある。また、partition λ と μ に対して、$\lambda \subset \mu$ とは $1 \leq i \leq l(\lambda)$ のすべてに対して$\lambda_i \leq \mu_i$ が成立することをいう。Young 図形でいえば、左上をそろえて書いたときλ の Young 図形が μ の Young 図形の中にすっぽり入ってしまうことである。

本稿は投稿準備中の論文 **[T90]** の訳に説明を追加したものである。

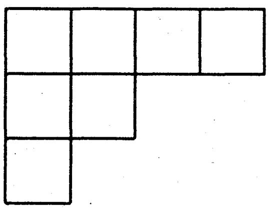

図 1. $(4,2,1)$ の Young 図形

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1} \end{array} = \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 \end{array}$$

図 2. Shape $(4,2,1)$ の tableau の例

2. Dual Pair と Robinson-Schensted 型対応 及び (C_m, C_n) 型 Dual Pair

Dual pair. Dual pair の概念は R. Howe によって導入され盛んに研究されているものであるが、ここでは長谷川浩司氏の [**Ha**] における定義に従う。

定義 A_i $(i = 1,2)$ を各々 associative algebra または Lie algebra とし、V を A_1 と A_2 の両方の作用を持つ module とする。(A_1, A_2) が V 上の *dual pair* であるとは、(1) A_1 と A_2 は V 上に互いに可換に作用し、(2) V は A_1-module としても A_2-module としても完全可約であり、しかも (3) $i = 1, 2$ のそれぞれに対して V 中に現れる既約 A_i-module の完全代表系を $\{\lambda_{A_i}\}_{\lambda \in \Lambda_i}$ (Λ_i は適当な index set) とするとき、全単射 $\dagger \colon \Lambda_1 \ni \lambda \mapsto \lambda^\dagger \in \Lambda_2$ が存在して、V が次の形に分解することをいう:

$$V \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_1} \lambda_{A_1} \boxtimes \lambda^\dagger_{A_2}.$$

以下では特に、Λ_i として適当な partition の集合がとれ、λ_{A_i} の表現空間にある種の Young tableau の集合と対応するような basis がとれる場合を考える。

Dual pair としての Weyl 相互律. もっとも古典的な dual pair の例は、Weyl の相互律として知られる状況で現れるものである。それともともとの Robinson-Schensted 対応の関連に簡単に触れておく。

この場合、$A_1 = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, $A_2 = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_f]$ ととり、$V_0 = \mathbb{C}^n$ とおいて $V = V_0^{\otimes f}$ とする。ここで $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ は f 個の V_0 に diagonal に作用し、$\mathfrak{S}_f$ は f 個の V_0 の置換として作用する。既約表現のラベリングは通常通りとすれば (たとえば [W] または [I] 参照)、$\Lambda_1 = \Lambda_2$ を自然数 f を n 個以下の part に分ける partition の集合とし、$\dagger$ を恒等写像とすることに

より dual pair の条件が満たされる。すなわち、次のような分解がある。

$$V \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_1} \lambda_{GL(n)} \boxtimes \lambda_{\mathfrak{S}_f}. \tag{2.1}$$

$\lambda_{GL(n)}$, $\lambda_{\mathfrak{S}_f}$ はそれぞれ λ をラベルに持つ $GL(n, \mathbb{C})$ (または $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$), $\mathfrak{S}_f$ の既約表現である。

もとの Robinson-Schensted 対応の位置づけ. もともとの Robinson-Schensted 対応 ([**R**], [**Sc**] 参照)、特にその「重複を許した word に対する version」はこの dual pair と次のように関連している。

$e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i}{\breve{1}}, 0, \ldots, 0)$ とおくと、V は自然な basis $\mathcal{B}(V) = \{e_{w_1} \otimes \cdots \otimes e_{w_f}\}$ (w は長さ f の列—word— $(w_1, \ldots, w_f)$ 全体を動く) を持つ。このような word 全体の集合を W で表そう。

一方 λ を Λ_1 に属する partition とするとき、$\lambda_{GL(n)}$ の表現空間には、shape が λ の semistandard tableau で中身が $[n]$ の元からなるもの全体を index set とする basis $\mathcal{B}(\lambda_{GL(n)}) = \{e_P\}$ をとることができる。そういう basis の例としては、Gelfand-Zetlin basis (たとえば [**Z**] に説明あり) や $n \times n$ 行列上の多項式環の中につくられる、小行列式の積を使った basis (たとえば [**DeEP**] 参照) がある。Shape が λ で中身が $[n]$ の元からなる semistandard tableau 全体の集合をSSTab$(\lambda; [n])$ と書くことにする。一方、対称群の表現 $\lambda_{\mathfrak{S}_f}$ の表現空間は、shape が Q の standard tableau 全体を index set とする basis $\mathcal{B}(\lambda_{\mathfrak{S}_f}) = \{e_Q\}$ を持つ。そういう basis としては、たとえば Young の seminormal form ([**JaKe**] 参照) などがある。Shape が λ の standard tableau 全体の集合をSTab(λ) と書くことにする。

(2.1) により、次のような全単射が "存在" することはわかっている:

$$W = [n]^f \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda_1} \mathrm{SSTab}(\lambda; [n]) \times \mathrm{STab}(\lambda).$$

しかし具体的に対応を与えるにはどうすればよいかというのは別問題であり、Robinson-Schensted 対応はそれに一つの美しい答を与えている。

この Robinson-Schensted 対応は、次の意味で weight を保つ対応になっている。$\mathcal{B}(V)$ の元は明らかに weight vector (対角行列からなる Cartan subalgebra に関して) であり、e_P

も weight vector にとることができる。上であげた Gelfand-Zetlin basis や小行列式の積からなる basis も weight vector になっている。これをふまえて、word $w=(w_1,\ldots,w_f)$ 及び semistandard tableau P の weight というものを定義して、それがそれぞれ $e_{w_1}\otimes\cdots\otimes e_{w_f}$ 及び e_P の weight を表すようにすることができる。このとき、Robinson-Schensted 対応で w が (P,Q) に対応したとすると、w の weight は P の weight に等しくなっている。

(C_m,C_n) 型 dual pair. 本題に戻り、(C_m,C_n) 型 dual pair を復習しよう。詳しくは長谷川氏の [Ha] を見ていただきたい。$A_1=\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$, $A_2=\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ とおく。このとき、$A_1\oplus A_2$ は自然に $\mathfrak{o}(4mn,\mathbb{C})$ に埋め込むことができる。(埋め込めるだけでなく、(A_1,A_2) は Howe の意味で $\mathfrak{o}(4mn,\mathbb{C})$ 中の dual pair になっている。すなわち、A_1,A_2 は $\mathfrak{o}(4mn,\mathbb{C})$ 中で互いに他の commutant に一致している。) さて、V_0 を $\mathbb{C}^{4mn}$ の maximal isotropic subspace として、$V=\bigwedge V_0=\bigoplus_{d=0}^{2mn}\bigwedge^d V_0$ とおく。このとき $\mathfrak{o}(4mn,\mathbb{C})$ は spin 表現として V に作用している。この $\mathfrak{o}(4mn,\mathbb{C})$ の作用を先ほどの埋め込みによって $A_1\oplus A_2$ に引き戻してできる A_1 と A_2 の V への作用を考える。このとき、(A_1,A_2) は V 上の dual pair になっている。具体的には、$\Lambda_1=\{\lambda\in\mathcal{P}\mid\lambda\subset R_{m,n}\}$, $\Lambda_2=\{\lambda\in\mathcal{P}\mid\lambda\subset R_{n,m}\}$ とおき、さらに $\dagger\colon\Lambda_1\to\Lambda_2$ を図 3 のように $R_{m,n}$ に関する complement をとって逆対角線に関して折り返す操作と定める。(ここで、$R_{m,n}=(\overbrace{n,\ldots,n}^{m})$ である。すなわち $R_{m,n}$ は縦が m で横が n の長方形を Young 図形に持つ paritition である。) すると V は次のように分解する。

$$V\simeq\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_1}\lambda_{Sp(2m,\mathbb{C})}\boxtimes\lambda^{\dagger}_{Sp(2n,\mathbb{C})}. \tag{3.2}$$

ここで $\lambda_{Sp(2m,\mathbb{C})}$ は partition λ に対応する $Sp(2m,\mathbb{C})$ の既約表現 (または対応する Lie 環 $\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$ の既約表現) である。ラベリングは、H. Weyl の本 [W] に従う。λ は highest weight を表すといってもよい。

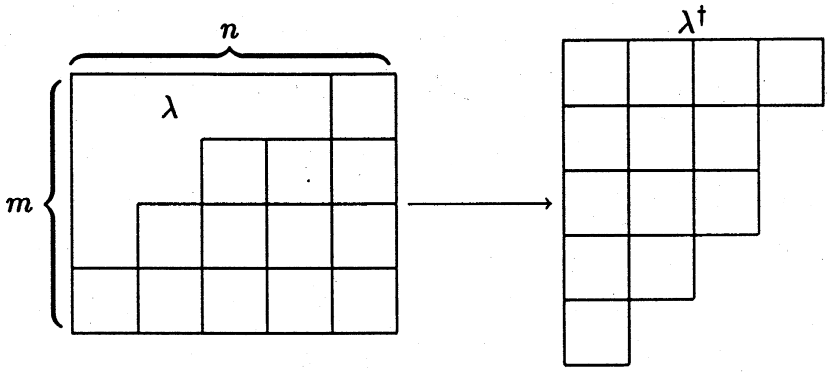

図 3. $m = 4$, $n = 5$ のときの $(4,2,1)^{\dagger}$

3. 対応を構成する OBJECT とその WEIGHT

われわれの目標は、この dual pair に対応する Robinson-Schensted 型対応を構成することである。(それによって、分解 (3.2) を combinatorial に証明したことにもなる。) その構成に入る前に、(3.2) の両辺を代表するような combinatorial な object を指定して、その weight をしかるべく定義する必要がある。

Subset-words. まずオリジナルの Robinson-Schensted 対応でいうと W (word の集合) に対応するもの、すなわち V の自然な basis を代表するような object を決めておく。まず A_1 の自然表現の空間を V_1 として、V_1 の basis $\{\phi^i, \phi_i \mid i \in [m]\}$ を、$<\phi^i, \phi^j> = <\phi_i, \phi_j> = 0$, $<\phi^i, \phi_j> = \delta_{ij}$ $(i, j \in [m])$ を満たすようにとる。ただし、$<\ ,\ >$ は A_1 によって infinitesimal に不変に保たれる V_1 上の alternating bilinear form である。また V_2 を A_2 の自然表現の空間とし、$\{\psi^k, \psi_k \mid k \in [n]\}$ を同様の basis とする。このとき $V_{2,0} = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{C}\psi^k$ は V_2 の maximal isotropic subspace である。そこで V_0 として $V_1 \otimes V_{2,0}$ をとろう。$\mathcal{B}(V_0) = \{\phi^i \otimes \psi^k, \phi_i \otimes \psi^k \mid i \in [m],\ k \in [n]\}$ は V_0 の basis となる。

便宜上次のような表記法を導入しよう。まず $\Gamma_m = \{1, \bar{1}, \ldots, m, \overline{m}\}$ ($2m$ 個の symbol の集合) とおき、Γ_m の元の間に全順序 $1 < \bar{1} < \cdots < m < \overline{m}$ を指定する。(この順序は、下で説明する $Sp(2m)$-tableau 及び Berele insertion で意味を持つ。) Γ_m の添え字はここでは常に m なので、以下では Γ_m の代わりに単に Γ と書く。そして $i \in [m]$ に対して $e_i = \phi^i$, $e_{\bar{i}} = \phi_i$ とおく。先ほどの V_1 の basis は $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ と書ける。さらに、$\gamma \in \Gamma$, $k \in [n]$ に対して $e_\gamma^{(k)} = e_\gamma \otimes \psi^k \in V_0$ とおく。さて $V_{2,0} = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{C}\psi^k$ という分解に沿って $V_0 = \bigoplus_{k=1}^{n} V_1^{(k)}$ ただし $V_1^{(k)} = V_1 \otimes \mathbb{C}\psi^k = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{C}e_\gamma^{(k)}$ となる。A_1-module としては

$V_1^{(k)} \simeq V_1$ $(e_\gamma^{(k)} \mapsto e_\gamma)$ である。これより

$$V = \bigwedge V_0 \simeq \bigwedge V_1^{(1)} \otimes \cdots \otimes \bigwedge V_1^{(n)} \simeq \bigwedge V_1 \otimes \cdots \otimes \bigwedge V_1 \tag{3.1}$$

という A_1-module としての同型を得る。$k \in [n]$ と $S \in 2^\Gamma = \{\text{the subsets of } \Gamma\}$ に対し、S の元を大きい順に $\gamma_1 > \cdots > \gamma_s$ $(s = |S|)$ として $e_S^{(k)} = e_{\gamma_1}^{(k)} \wedge \cdots \wedge e_{\gamma_s}^{(k)} \in \bigwedge V_1^{(k)}$ とおく。$\{e_S\}_{S \in 2^\Gamma}$ は $\bigwedge V_1^{(k)}$ の basis である。(大きい順に並べる理由は、Berele insertion を連続して行ったときの shape の変化に関する Sundaram の結果に関係がある。Lemma '1 参照。) さらに $\mathbf{S} = (S_1, \ldots, S_n) \in (2^\Gamma)^n$ に対して $e_\mathbf{S} = e_{S_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{S_n}^{(n)}$ とおく。すると $\{e_\mathbf{S}\}_{\mathbf{S} \in (2^\Gamma)^n}$ は V の basis である。従って W に相当するものとして、$(2^\Gamma)^n$ をとることができる。

定義 $(2^\Gamma)^n$ の元を Γ 上の長さ n の *subset-word* と呼ぶ。

ここでとった basis は、適当な Cartan subalgebra に関して weight vector になっていることが、次のようにわかる。まず $A_1 = \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C})$ の Cartan subalgebra $\mathfrak{h}_1$ で、$e_i = \phi^i$ を weight ϵ_i の weight vector, $e_{\bar{i}} = \phi_i$ を weight $-\epsilon_i$ の weight vector とするものをとることができる。(ここで $\{\epsilon_i\}_{i \in [m]}$ は $\mathfrak{h}_1^*$ の basis で、root 系が $\{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j\}_{1 \le i \le j \le m}$ と表されるようなものである。) また A_2 に関しても $\mathfrak{h}_2$ (Cartan subalgebra), $\{\eta_k\}_{k \in [n]}$ ($\mathfrak{h}_2^*$ の basis) を同様にとる。

Lemma 1. $\mathbf{S} \in (2^\Gamma)^n$ とするとき、上で定義した元 $e_\mathbf{S}$ は上でとった *Cartan subalgebra* $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ に関する *weight vector* である。$e_\mathbf{S}$ の $\mathfrak{h}_1$ に関する *weight* を $\sum_{i=1}^m a_i\epsilon_i$, $\mathfrak{h}_2$ に関する *weight* を $\sum_{k=1}^n b_k\eta_k$ とおけば、a_i, b_k は次のようになる。

$$a_i = \#\{k \mid i \in S_k\} - \#\{k \mid \bar{i} \in S_k\} \quad (i \in [m])$$

$$b_k = |S_k| - m \quad (k \in [n])$$

証明: A_1 の V への作用は V_1 上の自然表現から (3.1) を通じて引き起こされるものと一致することに注意すれば、$e_\mathbf{S}$ が $\mathfrak{h}_1$ に関する weight vector であること、及びその weight は容易にわかる。$\mathfrak{h}_2$ に関してはもう少し注意が必要である。埋め込み $\iota\colon A_1 \oplus A_2 \hookrightarrow \mathfrak{o}(4mn, \mathbb{C})$ は、$V_1 \otimes V_2$ を $\mathfrak{o}(4mn, \mathbb{C})$ の自然表現の空間とみなすことにより得られている。このとき $\mathfrak{o}(4mn, \mathbb{C})$ の Cartan subalgebra $\mathfrak{h}$ 及び $\mathfrak{h}^*$ の basis $\{\zeta_\gamma^{(k)}\}_{\gamma \in \Gamma,\, k \in [n]}$ を、$e_\gamma^{(k)}$ の weight が

$\zeta_\gamma^{(k)}$ となり、かつ $e_\gamma^{(\bar{k})} = e_\gamma \otimes \psi_k$ とおけば $e_\gamma^{(\bar{k})}$ の weight が $-\zeta_\gamma^{(k)}$ となるようにとることができて、$\iota(\mathfrak{h}_2) \subset \mathfrak{h}$ でありかつ $\iota^*(\zeta_\gamma^{(k)}) = \eta_k$ ($\gamma \in \Gamma$, $k \in [n]$) となっている。Spin 表現の構成のしかたにより、$e_{\mathbf{S}} \in V$ $(= \bigwedge V_0,\ V_0 \subset V_1 \otimes V_2)$ は $\mathfrak{h}$ に関する weight vector で、その weight を $\sum_{\gamma\in\Gamma,\, k\in[n]} c_\gamma^{(k)} \zeta_\gamma^{(k)}$ とおけば、

$$c_\gamma^{(k)} = I_{\gamma,S_k} - \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \gamma \in S_k \text{ のとき} \\ -\frac{1}{2} & \gamma \notin S_k \text{ のとき} \end{cases}$$

となる。(ここで $\gamma \in \Gamma$ 及び $S \subset \Gamma$ に対し、$I_{\gamma,S}$ は $\gamma \in S$ のときに 1, $\gamma \notin S$のときには 0 を表すものとする。) これより $\iota^*(\sum c_\gamma^{(k)} \zeta_\gamma^{(k)})$ における η_k の係数は $\sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma^{(k)}$ であるから、これは $|S_k| - m$ に等しい。∎

定義 Lemma 1 のように a_i, b_k を定義したとき、$(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ を $\mathbf{S}$ の weight と呼び、$wt(\mathbf{S})$ で表す。

***Sp*(2*m*)-tableau.** 次に、各既約表現の weight 分解を代表する combinatorial な object を復習しよう。(詳細はたとえば **[KoT90]** を参照) まず、$Sp(2m, \mathbb{C})$ の有理既約表現は長さ m 以下の partition によって parametrize されていたことを思いだそう。

定義 λ を長さ m 以下の partition とする。Shape λ の *Sp*(2*m*)*-tableau* とは、$\lambda \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ から Γ への写像 T で次の条件 (Sp1)–(Sp3) を満たすもののことをいう。

(Sp1) $T(i,1) \le T(i,2) \le \cdots \le T(i,\lambda_i) \quad (1 \le i \le l)$,
(Sp2) $T(1,j) < T(2,j) < \cdots < T(\lambda'_j, j) \quad (1 \le j \le \lambda_1)$,
(Sp3) $T(i,j) \ge i \quad ((i,j) \in \lambda)$

ただし、λ'_j は λ の第 j 列の長さ $(= \#\{i \mid \lambda_i \ge j\})$ を表す。イントロダクションの最後で述べたように、T は λ の Young 図形の各 i 行 j 列の箱の中に $T(i,j)$ を書き込んだもので表す。

注意 条件 (Sp1) と (Sp2) は、でてくる symbol の違いをのぞけば、semistandard tableau の定義と同じ条件である。条件 (Sp3) は、「すべての i に対して、λ の中で $\bar{i}$ 以下の symbol が占めている部分 (条件 (Sp1) と (Sp2) により λ より小さな partition の Young 図形になる) の行数が i を越えない」というのと同値である。

定義 *Sp*(2*m*)-tableau T の *weight* とは、$a_i(T) = (T \text{ 中の } i \text{ の個数}) - (T \text{ 中の } \bar{i} \text{ の個数})$

$(i \in [m])$ とおいてできる数列 $wt(T) = (a_1(T), \ldots, a_m(T))$ のことをいう。m 個の不定元の組 $(t_1, \ldots, t_m)$ を t と略記し、monomial $t_1^{a_1(T)} \cdots t_m^{a_m(T)}$ を $t^{wt(T)}$ と略記する。

このとき、$Sp(2m)$-tableau の重要な性質は次のものである。

THEOREM '1. λ を長さ m 以下の *partition* とすると、

$$\lambda_{Sp(2n,\mathbb{C})}(t) = \sum_{T \in \mathrm{Sp}_{2n}\,\mathrm{Tab}(\lambda)} t^{wt(T)}$$

が成立する。ここで、$\lambda_{Sp(2m,\mathbb{C})}(t)$ は λ に対応する $Sp(2m,\mathbb{C})$ の既約表現の *character* を表し、$\mathrm{Sp}_{2m}\,\mathrm{Tab}(\lambda)$ は *shape* λ の $Sp(2m)$*-tableau* 全体の集合を表す。

この定理は、最初に **[Ki]** に発表された。われわれは **[KoT90]** でこれに厳密な証明を与えた。また、$Sp(2m)$-tableau のことを A. Berele は **[Be]** で Sp-tableau と呼び、S. Sundaram は **[Su86]** で symplectic tableau と呼んでいる。

問題の formulation. 以上の準備をすると、ここで扱おうとしている問題は次のように定式化できる。

問題. 次の集合の間の全単射

$$(2^{\Gamma})^n \ni \mathbf{S} \longmapsto (P(\mathbf{S}), Q(\mathbf{S})) \in \coprod_{\lambda \subset R_{m,n}} \mathrm{Sp}_{2m}\,\mathrm{Tab}(\lambda) \times \mathrm{Sp}_{2n}\,\mathrm{Tab}(\lambda^{\dagger}) \tag{3.3}$$

であって、$wt(\mathbf{S}) = (wt(P(\mathbf{S})); wt(Q(\mathbf{S})))$ を満たすものを構成せよ。

定義 以下で構成する $P(\mathbf{S})$ 及び $Q(\mathbf{S})$ を、それぞれ $\mathbf{S}$ の P-symbol 及び Q-symbol と呼ぶ。

注意 (3.3) の左辺の weight generating function をとれば、それは V の character に等しい。一方 (3.3) の右辺の weight generating function は (3.2) の右辺の character に等しい。ここで言っているような bijection が構成できれば、完全可約性と既約指標の一次独立性から、分解 (3.2) が combinatorial に示されたことになる。

4. P-SYMBOL の構成 (SUBSET の INSERTION)

問題を適切な形に formulate すれば、P-symbol は Berele の仕事と Sundaram による分析とから構成することができる。

原則として、P-symbol は V の A_1-module としての分解を反映するように構成される。(3.1) で見たように、V は A_1-module としては $\bigwedge V_1 \otimes \cdots \otimes \bigwedge V_1$ (n 個) に同型である。オリジナルの Robinson-Schensted 対応における P-symbol が、$GL(n, \mathbb{C})$ の勝手な多項式既約表現に自然表現 (vector 表現) を一つテンソルすることに対応する Schensted insertion を連続して何度も行うことにより作られたように、ここで構成しようとする P-symbol も $\bigwedge V_1$ をテンソルことに対応するある手続きを連続して何度も行うことによって作られると期待される。

表現論既知の立場からは、$Sp(2m, \mathbb{C})$ の任意の既約表現に $\bigwedge V_1$ をテンソルしたときの分解は次のようになることが対称関数の計算からわかる。これを combinatorial に証明しようとする立場から言えば、分解が次のようになることを示すような全単射を構成したい。

定義 Partition λ 及び μ に対し、$\lambda \subset \mu$ であって、かつ skew shape μ/λ が vertical strip であるとき、$\lambda \ll \mu$ または $\mu \gg \lambda$ と書く。

LEMMA 2. λ を長さ m 以下の *partition*, $\lambda_{Sp(2m,\mathbb{C})}$ を対応する $Sp(2m, \mathbb{C})$ の既約表現とする。$\square_{Sp(2m,\mathbb{C})}$ は $Sp(2m, \mathbb{C})$ の自然表現を表す。このとき、次のような分解が成立する。

$$\lambda_{Sp(2m,\mathbb{C})} \otimes \bigwedge \square_{Sp(2m,\mathbb{C})} \simeq \bigoplus_{\substack{(\mu,\nu) \text{ s.t.} \\ \lambda \ll \mu \\ \mu \gg \nu \\ l(\mu) \leq m}} \nu_{Sp(2m,\mathbb{C})}.$$

注意 Lemma 2 の中の式の右辺の意味は、$\nu_{Sp(2m,\mathbb{C})}$ が、$\lambda \ll \mu$, $\mu \gg \nu$, 及び $l(\mu) \leq m$ を満たす μ の個数と同じ重複度で現れるということである。

従って、次のような bijection

$$\mathrm{Sp}_{2m}\,\mathrm{Tab}(\lambda) \times 2^{\Gamma} \longrightarrow \coprod_{\substack{(\mu,\nu) \text{ s.t.} \\ \lambda \ll \mu \\ \mu \gg \nu \\ l(\mu) \leq m}} \mathrm{Sp}_{2m}\,\mathrm{Tab}(\nu) \tag{4.1}$$

であって、$(T,S)\mapsto \widetilde{T}$ のとき $wt(T)+wt(S)=wt(\widetilde{T})$ となるようなものを構成したい。ただし、ここで $wt(S)$ とは $a_i=I_{i,S}-I_{\bar{i},S}$ $(i\in[m])$ とおいてできる数列 $(a_1,\ldots,a_m)$ のことである。($I_{i,S}$ の意味は Lemma 1 の証明で定義したものと同じである。)

Berele insertion. そういう bijection を作る上で基本的な Berele insertion を簡単に説明しよう。Berele insertion は、$Sp(2m,\mathbb{C})$ の勝手な既約表現と自然表現 $\Box_{Sp(2m,\mathbb{C})}$ のテンソルの分解に対応する。(具体的な insertion のやり方はここでは述べない。[Be], [T89] 参照)

λ を長さ m 以下の partition とする。このとき次のような分解がある。

$$\lambda_{Sp(2m,\mathbb{C})}\otimes\Box_{Sp(2m,\mathbb{C})}\simeq\bigoplus_{\lambda\prec\mu\text{ or }\lambda\succ\mu}\mu_{Sp(2n,\mathbb{C})},$$

ここで $\lambda\prec\mu$ (または $\mu\succ\lambda$) は、μ の Young 図形が λ の Young 図形に一つだけ箱をつけ加えて得られることを表す。

A. Berele は [Be] の中でこの分解に対応する (またはそれを combinatorial に証明する) 次のような bijection (*Berele insertion* と呼ばれる) を構成した。

$$\begin{array}{lcccc} \mathrm{Sp}_{2m}\,\mathrm{Tab}(\lambda) & \times & \Gamma & \longrightarrow & \displaystyle\coprod_{\lambda\prec\mu\text{ or }\lambda\succ\mu}\mathrm{Sp}_{2m}\,\mathrm{Tab}(\mu) \\ (T & , & \gamma) & \longmapsto & T\xleftarrow{\mathcal{B}}\gamma \end{array} \tag{4.2}$$

$wt(T)=(a_1,\ldots,a_m)$ 及び $wt(T\xleftarrow{\mathcal{B}}\gamma)=(a'_1,\ldots,a'_m)$ とおけば、$\gamma=i$ ならば $a'_i=a_i+1$ かつ $a'_j=a_j$ $(j\neq i)$, また $\gamma=i'$ ならば $a'_i=a_i-1$ かつ $a'_j=a_j$ $(j\neq i)$ である。

Berele insertion を連続して行ったときの shape の変化. S. Sundaram はこの insertion について [Su86] で考察し、その中で特に次を示した。

Lemma '1. $T\in\mathrm{Sp}_{2m}\,\mathrm{Tab}(\lambda)$ *($l(\lambda)\leq m$)* とし、また$\gamma,\gamma'\in\Gamma$ とする。また $T\xleftarrow{\mathcal{B}}\gamma$ の *shape* を μ, $(T\xleftarrow{\mathcal{B}}\gamma)\xleftarrow{\mathcal{B}}\gamma'$ の *shape* を ν とする。

(1) $\gamma\leq\gamma'$ ならば、次の *3* 通りのいずれかが起きる。

(1a) $\lambda\underset{(i,j)}{\succ}\mu$, $\mu\underset{(i',j')}{\succ}\nu$ かつ $i'\geq i$, $j'<j$

(1b) $\lambda\succ\mu$ かつ $\mu\prec\nu$, (1c) $\lambda \underset{(i,j)}{\prec} \mu$, $\mu \underset{(i',j')}{\prec} \nu$ かつ $i' \leq i$, $j' > j$

(2) $\gamma > \gamma'$ ならば、次の 3 通りのいずれかが起きる。

(2a) $\lambda \underset{(i,j)}{\prec} \mu$, $\mu \underset{(i',j')}{\prec} \nu$ かつ $i' > i$, $j' \leq j$

(2b) $\lambda \prec \mu$ かつ $\nu \succ \nu$,

(2c) $\lambda \underset{(i,j)}{\succ} \mu$, $\mu \underset{(i',j')}{\succ} \nu$ かつ $i' < i$, $j' \geq j$

ただし、$\lambda \underset{(i,j)}{\prec} \mu$ (または $\mu \underset{(i,j)}{\succ} \lambda$) とは、$\lambda$ の *Young* 図形に (i,j) の位置に箱を一つ加えると μ の *Young* 図形が得られることを表す。

注意　$\lambda \underset{(i,j)}{\prec} \mu$ かつ $\mu \underset{(i',j')}{\prec} \nu$ であるとき、(i',j') は必然的に (1c) か (2a) で主張している領域のいずれかに含まれる。同様に、$\lambda \underset{(i,j)}{\succ} \mu$ かつ $\mu \underset{(i',j')}{\succ} \nu$ であるとき、(i',j') は必然的に (1a) か (2c) で主張している領域のいずれかに含まれる。従って、Lemma '1 に並ぶ 6 つの条件は、すべての可能性を尽くしている。

[**Su86**, Lemmas 10.3–10.6] 参照。

Subset の insertion. この Lemma '1 を見れば、Γ の subset S の元を大きい順に Berele insertion で挿入すれば、ちょうどわれわれの望む bijection になることがわかる。これを明瞭に formulate するために、新しい notation を導入しよう。

定義　T を shape λ の $Sp(2m)$-tableau (λ は長さ m 以下の partition), S を Γ の subset, そして $\gamma_1 > \cdots > \gamma_s$ を S の元を大きい順に並べたものとする。このとき

$$T \overset{\mathcal{B}}{\Longleftarrow} S = (T \overset{\mathcal{B}}{\longleftarrow} \gamma_1) \overset{\mathcal{B}}{\longleftarrow} \cdots \overset{\mathcal{B}}{\longleftarrow} \gamma_s.$$

とおく。

この記法を用いて書けば、(4.1) の形の bijection が次のように得られる。

Proposition 1. λ を長さ m 以下の *partition* とする。このとき次の写像は *bijection* である。

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Sp}_{2m}\,\mathrm{Tab}(\lambda) & \times & 2^{\Gamma} & \longrightarrow & \displaystyle\coprod_{\substack{(\mu,\nu)\ \text{s.t.} \\ \lambda \ll \mu \\ \mu \gg \nu \\ l(\mu) \leq m}} \mathrm{Sp}_{2m}\,\mathrm{Tab}(\nu) \\ (T & , & S) & \longmapsto & (T \overset{\mathcal{B}}{\Longleftarrow} S)^{(\mu)} \end{array}$$

ここで下段の μ は $T \overset{\mathcal{B}}{\Longleftarrow} S$ の操作の過程で最大になったときの *shape* を表す。また、$(T \overset{\mathcal{B}}{\Longleftarrow} S)^{(\mu)}$ は *disjoint union* の中で (μ, ν) に対応するパートの元であることを表す (ν は $T \overset{\mathcal{B}}{\Longleftarrow} S$ の *shape*)。

さらに、$wt(T) + wt(S) = wt(T \overset{\mathcal{B}}{\Longleftarrow} S)$ が成立する。

証明: これは (4.2) と Proposition 1 を組み合わせてすぐ出てくる。∎

Subset-word の P-symbol. さて Γ 上の subset-word $\mathbf{S}$ の P-symbol を定義しよう。

定義 Γ 上の subset-word $\mathbf{S} = (S_1, \ldots, S_n)$ に対し、$\mathbf{S}$ の *P-symbol* を

$$P(\mathbf{S}) = (\emptyset \overset{\mathcal{B}}{\Longleftarrow} S_1) \overset{\mathcal{B}}{\Longleftarrow} \cdots \overset{\mathcal{B}}{\Longleftarrow} S_n$$

で定まる $Sp(2m)$-tableau と定義する。ただし、$\emptyset$ は空の tableau を表す。

5. Q-Symbol の構成

これまでに構成された Robinson-Schensted 型の対応では、tableau の pair の第 2 成分は insertion で変化した第 1 成分の shape の足跡を何らかの形で tableau で表したものになっている。われわれの場合には、その変化を $Sp(2n)$-tableau として記録する方法を考えよう。このとき、$\mathbf{S} = (S_1, \ldots, S_n)$ の Q-symbol の中で k と $\overline{k}$ の占めている部分がちょうど S_k の insertion によって起こった shape の変化を反映するように考える。

相変わらず m を fix し、n に関する induction によって構成する。そのときもっとも本質的な一歩は次の点である。

Lemma 3. 以下に構成する *map* は、次の集合の間の *bijection* を与える:

$$\text{(5.1)} \quad \{ (\lambda, \mu, \nu) \mid \lambda \subset R_{m,n-1},\ \mu, \nu \subset R_{m,n},\ \lambda \ll \mu,\ \mu \gg \nu \} \\ \xrightarrow{\sim} \{ \textit{skew } Sp(2n)/Sp(2n-2)\textit{-tableaux} \subset R_{n,m} \}$$

しかも、$(\lambda, \mu, \nu) \mapsto D$ とすると

(1) D の *shape* は $\nu^{\dagger}/\lambda^{\ddagger}$,

(2) $|\mu/\lambda| + |\mu/\nu| - m = (D$ 中の n の個数$) - (D$ 中の $\overline{n}$ の個数$)$

ここで、‡ は $R_{m,n-1}$ に関する *complement* をとって逆対角線に関して鏡映をとる操作を表す。(† の定義において実は暗黙のうちに m と n が *fix* されていたが、ここでは $R_{m,n}$ に関する操作と $R_{m,n-1}$ に関する操作を区別する必要があるので、それぞれ † と ‡ で表す。)

注意　$\lambda \subset \mu$, $n' < n$ で $l(\lambda) \leq n'$, $l(\mu) \leq n$ のとき、shape μ/λ の skew $Sp(2n)/Sp(2n')$-tableau とは、写像 $D: \mu \setminus \lambda \to \{n'+1, \overline{n'+1}, \ldots, n, \overline{n}\}$ であって (Sp1)-(Sp3) の条件を満たすもののことをいう。詳しくは **[KoT90]** 参照。

構成: まず $\lambda \subset R_{m,n-1}$, $\nu \subset R_{m,n}$ とすれば $l(\nu^{\dagger}) \leq n$ かつ $l(\lambda^{\ddagger}) \leq n-1$ であるから、shape $\nu^{\dagger}/\lambda^{\ddagger}$ の skew $Sp(2n)/Sp(2n-2)$-tableau は$\nu^{\dagger}/\kappa$ と $\kappa/\lambda^{\ddagger}$ がともに horizontal strip になるような partition κ と一対一に対応する。(κ が "n と $\overline{n}$ の境目" を表す。) このとき $\kappa \subset R_{n,m}$ であるから、ある partition μ^* を用いて $\kappa = (\mu^*)^{\dagger}$ と書くことができる。また、$R_{n,m}$ に含まれる skew $Sp(2n)/Sp(2n-2)$-tableau の shape は、必ずある $\lambda \subset R_{m,n-1}$ と $\nu \subset R_{m,n}$ を用いて$\nu^{\dagger}/\lambda^{\ddagger}$ と書けることにも注意しよう。従って (5.1) を与えるには、$\lambda \subset R_{m,n-1}$ と $\nu \subset R_{m,n}$ を fix するごとに

$$\{\,\mu \subset R_{m,n} \mid \lambda \ll \mu,\ \mu \gg \nu\,\} \longrightarrow \{\,\mu^* \subset R_{m,n} \mid \widetilde{\lambda} \gg \mu^*,\ \mu^* \gg \nu\,\} \tag{5.2}$$

なる全単射であって $|\mu/\lambda| + |\mu/\nu| - m = |\widetilde{\lambda}/\mu^*| - |\mu^*/\nu|$ を満たすものを作ればよい。ここで $\widetilde{\lambda}$ は λ の各行を一つずつ伸ばしたもの、言い替えれば $(\widetilde{\lambda})^{\dagger} = \lambda^{\ddagger}$ となる partition である。

μ^* を与えるには μ^* の各列の長さ $(\mu^*)'_j$ を与えれば十分である。(λ, μ, ν) に対して μ^* を

$$(\mu^*)'_j = \max\{\lambda'_j, \nu'_j\} + \min\{\lambda'_{j-1}, \nu'_{j-1}\} - \mu'_j \quad (j \in [n]) \tag{5.3}$$

なる partition として定義する。このとき、λ'_0 及び ν'_0 は m とみなす。

証明: (5.2) の左辺の条件は

$$\lambda \ll \mu \Longleftrightarrow \lambda'_j \leq \mu'_j \leq \lambda'_{j-1} \quad (\forall j \in [n])$$
$$\nu \ll \mu \Longleftrightarrow \nu'_j \leq \mu'_j \leq \nu'_{j-1} \quad (\forall j \in [n])$$

より

$$\max\{\lambda'_j, \nu'_j\} \le \mu'_j \le \min\{\lambda'_{j-1}, \nu'_{j-1}\} \tag{5.4}$$

と書き換えられ、また右辺の条件は $\widetilde{\lambda} \gg \mu \Longleftrightarrow \lambda \ll \mu$ に注意すれば

$$\lambda \ll \mu^* \Longleftrightarrow \lambda'_j \le (\mu^*)'_j \le \lambda'_{j-1} \quad (\forall j \in [n])$$
$$\nu \ll \mu^* \Longleftrightarrow \nu'_j \le (\mu^*)'_j \le \nu'_{j-1} \quad (\forall j \in [n])$$

より

$$\max\{\lambda'_j, \nu'_j\} \le (\mu^*)'_j \le \min\{\lambda'_{j-1}, \nu'_{j-1}\} \tag{5.5}$$

と書き換えられる。従って μ が (5.4) の条件を満たすとき、(5.3) で μ^* を定めれば μ^* は (5.5) を満たす。また、(5.3) は逆に解けてμ^* から μ を定めれば、μ^* が (5.5) 満たすとき μ は (5.4) を満たすから、これが逆写像を与える。

Weight については、(5.3) をすべての j について加えると $|\mu^*| = |\lambda| + |\nu| + m - |\mu|$ を得ることと、$|\widetilde{\lambda}/\mu^*| = m - |\mu^*/\lambda|$ に注意すれば、$|\mu/\lambda| + |\mu/\nu| - m = 2|\mu| - |\lambda| - |\nu| - m = m + |\lambda| + |\nu| - 2|\mu^*| = m - |\mu^*/\lambda| - |\mu^*/\nu| = |\widetilde{\lambda}/\mu^*| - |\mu^*/\nu|$ となって、要求された条件を満たしている。∎

定義　$\mathrm{S} = (S_1, \ldots, S_n)$ を Γ 上の長さ n の subset-word とする。$\overline{\mathrm{S}} = (S_1, \ldots, S_{n-1})$ とおき、$Q(\overline{\mathrm{S}})$ を、帰納法の仮定によりすでに構成されている $\overline{\mathrm{S}}$ の Q-symbol とする。このとき $Q(\mathrm{S})$ を、$Sp(2n-2)$-tableau $Q(\overline{\mathrm{S}})$ と、Lemma 3 の全単射で (λ, μ, ν) に対応する skew $Sp(2n)/Sp(2n-2)$-tableau を組み合わせてできる $Sp(2n)$-tableau として定める。(ここで λ は $P(\overline{\mathrm{S}})$ の shape, μ は $P(\overline{\mathrm{S}}) \xLeftarrow{\mathcal{B}} S_n$ の操作の過程で最大になったときの shape, また ν は $P(\mathrm{S})$ の shape である。)

THEOREM 1. 上で n に関して帰納的に定義した写像 $\mathrm{S} \mapsto (P(\mathrm{S}), Q(\mathrm{S}))$ は、(3.3) で求めている *weight-preserving* な *bijection* である。

証明: 帰納法の仮定により、$wt(\overline{\mathrm{S}}) = (wt(P(\overline{\mathrm{S}})); wt(Q(\overline{\mathrm{S}})))$ である。

長さ $n-1$ の subset-word 全体の集合 $\overline{\mathcal{S}} = (2^\Gamma)^{n-1}$ は、その Q-symbol $\overline{Q}$ に従って subset $\overline{\mathcal{S}}_{\overline{Q}}$ の disjoint union に分けることができる:

$$\overline{\mathcal{S}} = \coprod_{\overline{Q}:\ Sp(2n-2)\text{-tableau}} \overline{\mathcal{S}}_{\overline{Q}}, \qquad \overline{\mathcal{S}}_{\overline{Q}} = \{\, \overline{\mathrm{S}} \mid Q(\overline{\mathrm{S}}) = \overline{Q} \,\}$$

帰納法の仮定により、各 subset $\overline{\mathcal{S}}_{\overline{Q}}$ は P-symbol をとることにより $\mathrm{Sp}_{2m}\,\mathrm{Tab}(\lambda)$ と bijective に対応している(ここで λ は、$\overline{Q}$ の shape が $\lambda^\ddagger$ と表されるような partition である)。(4.1) によって、各 $\overline{Q}$ に対して$\mathrm{Sp}_{2m}\,\mathrm{Tab}(\lambda) \times 2^\Gamma$ は$\coprod_\nu (\mathrm{Sp}_{2m}\,\mathrm{Tab}(\nu) \times \{\, \mu \mid \lambda \ll \mu, \mu \gg \nu \,\})$ と bijective に対応している。またこの partition の列 (λ, μ, ν) はすぐ上で見たように shape が $\nu^\dagger/\lambda^\ddagger$ の skew tableau D と bijective に対応している。

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathcal{S}}_{\overline{Q}} \times 2^\Gamma \\
&\qquad \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sp}_{2m}\,\mathrm{Tab}(\lambda) \times 2^\Gamma \\
&\qquad \xrightarrow{\sim} \coprod_\nu (\mathrm{Sp}_{2m}\,\mathrm{Tab}(\nu) \times \{\, \mu \mid \lambda \ll \mu, \mu \gg \nu \,\}) \\
&\qquad \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sp}_{2m}\,\mathrm{Tab}(\nu) \times \{\, \text{shape } \nu^\dagger/\lambda^\ddagger \text{ の skew } Sp(2n)/Sp(2n-2)\text{-tableaux} \,\}
\end{aligned}$$

これをすべての $\overline{Q}$ について集め、また $\overline{Q}$ と skew tableau D を組み合わせて $Sp(2n)$-tableau を作れば、shape ν の $Sp(2m)$-tableau P と shape $\nu^\dagger$ の $Sp(2n)$-tableau Q の pair (ν は $R_{m,n}$ に含まれる partition をすべて動く) が全部現れる。

Weight の保存は、P-symbol については明らかである。Q のパートについては、subset-word のほうでは b_k $(k \le n-1)$ は$\overline{\mathrm{S}}$ と S とで変わらない。Q-symbol も、$\overline{n-1}$ 以下の部分は変わらない。従って $|S_n| - m = (Q(\mathrm{S})$ 中の n の個数$) - (Q(\mathrm{S})$ 中の $\overline{n}$ の個数$)$ だけ確かめればよいが、$|S_n| = |\mu/\lambda| - |\mu/\nu|$ であるから、これは既に Lemma 3 で確かめられている。∎

References

[Be] A. Berele, *A Schensted-type correspondence for the symplectic group*, J. Combin. Theory A **43** (1986), 320–328.

[DaJiM] E. Date, M. Jimbo and T. Miwa, *Representations of $U_q(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}))$ at $q=0$ and the Robinson-Schensted correspondence*, in "Physics and Mathematics of Strings," Memorial Volume of Vadim Knizhnik, ed. L. Brink, D. Friedan and A. M. Polyakov, World Scientific (to appear).

[DeEP] C. DeConcini, D. Eisenbud and C. Procesi, *Young diagrams and determinantal varieties*, Inv. Math. **56** (1980), 129–165.

[Ha] K. Hasegawa, *Spin module versions of Weyl's reciprocity theorem for classical Kac-Moody Lie algebras—an application to branching rule duality—*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **25** (1989), 741–828.

[I] N. Iwahori, "対称群と一般線型群の表現論," 岩波講座基礎数学, 岩波書店, 東京.

[JaKe] G. D. James and A. Kerber, "The representation theory of the symmetric group," Encycropedia of Math., vol. 16, Addison-Wesley, Reading, 1981.

[Ka] M. Kashiwara, *Crystalizing the q-analogue of universal enveloping algebras*, RIMS preprint, 676.

[Ki] R. C. King, *Weight multiplicities for the classical groups*, in "Group theoretical methods in phisics, 4th international colloquium, Nijmegen 1975," Lecture Notes in Physics, vol. 50, Springer-Verlag, New York, pp. 490–499.

[KoT90] K. Koike and I. Terada, *Young-diagrammatic methods for the restriction of representations of complex classical Lie groups to reductive subgroups of maximal rank*, Adv. in Math. **79** (1990), 104–135.

[R] G. de B. Robinson, *On the representations of the symmetric group*, Amer. J. Math. **60** (1938), 745–760.

[Sc] C. Schensted, *Longest increasing and decreasing subsequences*, Canad. J. Math. **13** (1961), 179–191.

[Su86] S. Sundaram, *On the combinatorics of representations of* $Sp(2n,\mathbb{C})$, Ph. D. Thesis, M.I.T., 1986.

[T89] I. Terada, *Robinson-Schensted* 対応とその一族, (survey), in "量子群と Robinson-Schensted 対応," 数理解析研究所講究録 705, 京都大学.

[T90] I. Terada, *A Robinson-Schensted-type correspondence for a dual pair on spinors*, in preparation.

[W] H. Weyl, "The Classical Groups, their invariants and representations," 2nd ed., Princeton University Press, Princeton, 1946.

[Z] D. P. Zhelobenko, *On Gelfand-Zetlin bases for classical Lie algebras*, in "Representations of Lie groups and Lie algebras," A. A. Kirillov, ed., Akadémiai Kiadó, Budapest, 1985.