数理解析研究所講究録
第 735 巻 1990 年 61-87



# $SO(2n)$ の Robinson-Schensted 対応

名大・理　岡田聡一　(Soichi Okada)

Robinson [R] と Schensted [Sch] は，対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元 $w$ に対して，同じ shape の standard tableau $P(w)$ と $Q(w)$ を対応させるアルゴリズムを構成し，写像

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \coprod_{\lambda\vdash n} \mathrm{STab}(\lambda) & \times & \mathrm{STab}(\lambda) \\ w & \longmapsto & (P(w) & , & Q(w)) \end{array} \tag{0.1}$$

が全単射になることを示した.（定義などは，§1 を参照されたい.）$\mathrm{STab}(\lambda)$ の元の個数 $f^\lambda$ が，$\lambda$ に対応する $\mathfrak{S}_n$ の既約表現 $\lambda_{\mathfrak{S}_n}$ の次数に等しいことに注意すると，(0.1) の全単射は次の等式の証明を与えていることになる.

$$\#\mathfrak{S}_n = \sum_{\lambda\vdash n}(f^\lambda)^2$$

これは，対称群の群環 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ の $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$-module としての分解

$$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \cong \bigoplus_{\lambda\vdash n} \lambda_{\mathfrak{S}_n} \otimes \lambda_{\mathfrak{S}_n}$$

を反映している.

また，(0.1) の全単射の拡張として，次のような全単射も構成されている.

$$\{1,2,\ldots,n\}^k \xrightarrow{\sim} \coprod_{\lambda\vdash k} \mathrm{SSTab}(\lambda : [n]) \times \mathrm{STab}(\lambda) \tag{0.2}$$

この全単射は，$GL(n,\mathbb{C})$ の自然表現 $V = \mathbb{C}^n$ のテンソル積表現 $V^{\otimes k}$ の既約分解

$$V^{\otimes k} \cong \bigoplus_{\lambda\vdash k} V_\lambda^{\oplus f^\lambda}$$

を示している.

(0.1), (0.2) の全単射のことを，Robinson-Schensted 対応と呼ぶが，Robinson-Schensted 対応は，上のようにある種の表現論の事実に bijective な証明を与えている.

ここでは，$SO(2n,\mathbb{C})$ の自然表現のテンソル積表現の分解を示す全単射，つまり (0.2) の $SO(2n,\mathbb{C})$ 版について，述べたい.

## §1. $GL(n,\mathbb{C})$ の Robinson-Schensted 対応.

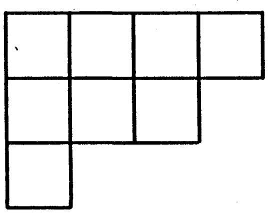
まず，$GL(n,\mathbb{C})$ の Robinson-Schensted 対応 (0.2) について述べる．

その前に，用語と記号の定義をしておく．$\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$, $[n]=\{1,2,\dots,n\}$ とおく．分割とは，非負整数の単調非増加列 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots)$ $(\lambda_1\geq\lambda_2\geq\dots)$ で，$\sum_{i\geq1}\lambda_i<\infty$ となるもののことである．$\sum_{i\geq1}\lambda_i=n$ であるとき，$\lambda$ は $n$ の分割であるといい，$\lambda\vdash n$ と表わす．そして，分割 $\lambda$ に対して，その 0 でない成分の個数 $\#\{i:\lambda_i\neq0\}$ を，$\lambda$ の長さといい，$l(\lambda)$ と表わす．

分割 $\lambda$ に対して，

$$Y(\lambda)=\{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}:1\leq i\leq l(\lambda),1\leq j\leq\lambda_i\}$$

とおき，$\lambda$ の Young 図形と呼ぶ．そして，普通 $Y(\lambda)$ を 1 行目に $\lambda_1$ 個の正方形，2 行目に $\lambda_2$ 個の正方形，3 行目に $\lambda_3$ 個の正方形，$\cdots$を，左端を揃えて並べることによって図示する．たとえば，$\lambda=(4,3,1)$ の Young 図形は



2 つの分割 $\lambda,\mu$ に対して，$Y(\lambda)\supset Y(\mu)$ となるとき，つまり，$\mu$ の Young 図形が（左上隅を揃えておいたとき）$\lambda$ の Young 図形に完全に含まれるとき，$\lambda\supset\mu$ と書く．さらに，$\lambda\supset\mu$ かつ $|\lambda|=|\mu|+1$ であるとき，つまり，$\mu$ の Young 図形に箱を 1 つ付け加えて $\lambda$ の Young 図形ができるとき，$\lambda\triangleright\mu$ と表わす．

$\lambda$ の Young 図形の各正方形に正の整数（またはある全順序集合 $\Gamma$ の元）を書き込んだものを，shape $\lambda$ の tableau と呼ぶ．shape $\lambda$ の tableau $T$ は写像 $T:Y(\lambda)\to\mathbb{N}(\Gamma)$ と思うことができる．shape $\lambda$ の tableau $T$ は，次の条件を満たすとき，semistandard であるという．

(i) $T(i,1)\leq T(i,2)\leq\cdots\leq T(i,\lambda_i)\quad(i=1,2,\dots,l(\lambda))$

(ii) $T(1,j)<T(2,j)<\cdots<T(\lambda'_j,j)\quad(j=1,2,\dots,\lambda_1)$

ここで，$\lambda'_j = \#\{i : \lambda_i \geq j\}$ である．shape が $\lambda$ で，書き込まれている数字が全て $n$ 以下であるような semistandard tableau 全体の集合を $\mathrm{SSTab}(\lambda : [n])$ とおく．例えば，

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 1 & 2 & 3 \\ T = & 2 & 3 & 4 & \\ & 4 & & & \end{array}$$

は，shape $(4,3,1)$ の semistandard tableau である．

$\lambda$ が $n$ の分割であるとき，$1,2,\ldots,n$ の数字がちょうど 1 度ずつ現われるような shape $\lambda$ の semistandard tableau を standard tableau と呼ぶ．そして，shape $\lambda$ の standard tableau 全体の集合を $\mathrm{STab}(\lambda)$ と表わす．

semistandard tableau $T \in \mathrm{SSTab}(\lambda : [n])$ において，$k$ 以下の数字が書き込まれている部分 $T^{(k)}$（これも semistandard tableau になる）の shape を $\lambda^{(k)}$ とすると，$\emptyset = \lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \cdots \subset \lambda^{(n)} = \lambda$ となる．逆に，分割の列 $\emptyset = \lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \cdots \subset \lambda^{(n)} = \lambda$ が与えられれば，$T^{(k)}$ の shape が $\lambda^{(k)}$ となる semistandard tableau $T$ が一意的に定まる．このとき，$T$ が standard tableau であることと，各 $i$ について $\lambda^{(i)} \lhd \lambda^{(i+1)}$ となることは同値である．

standard tableau $T$ に対して，$T$ 中に現われる数字 $i$ の個数を $m_i(T)$ とし，$x^T = x_1^{m_1(T)} \cdots x_n^{m_n(T)}$ と書く．このとき，

定理 1.1. 長さ $n$ 以下の分割 $\lambda$ に対して，

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{T \in \mathrm{SSTab}(\lambda:[n])} x^T$$

は，$\lambda$ に対応する $GL(n, \mathbf{C})$ の既約表現 $(\rho_\lambda, V_\lambda)$ の指標である．

$\lambda = (1,0,0,\ldots)$ のとき，$s_\lambda(x_1,\ldots,x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ は $GL(n,\mathbf{C})$ の自然表現 $V = \mathbf{C}^n$の指標である．

Insertion Algorithm. さて，$GL(n,\mathbf{C})$ の Robinson-Schensted 対応の基礎となる Insertion algorithm を定義しよう．この アルゴリズムは，semistandard tableau $T$ と 数字 $r$ が与えられたとき，新しい semistandard tableau（$T \leftarrow r$ と書き，$T$ に $r$ を insert して得

られる tableau という.) を作り出すアルゴリズムである. まず, $T^{(0)}=T$, $r^{(0)}=r$ とおく. そして, semistandard tableau $T^{(k)}$ と $r^{(k)}\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ $(k=1,2,\ldots)$ を帰納的に構成し, $r^{(k)}=\infty$ となったときの $T^{(k)}$ を $T\leftarrow r$ と定義する. $T^{(k-1)}, r^{(k-1)}$ までできたとき, $T^{(k)}, r^{(k)}$ を次のようにして定める.

(1) $T^{(k-1)}(k,l)\leq r^{(k-1)}$ $(l=1,\ldots,\lambda_k)$ または $\lambda_k=0$ のとき,

$$T^{(k)}(i,j)=\begin{cases} T^{(k-1)}(i,j) & (i,j)\neq(k,\lambda_k+1) \\ r^{(k-1)} & (i,j)=(k,\lambda_k+1) \end{cases}$$

$$r^{(k)}=\infty$$

(2) $T^{(k-1)}(k,l-1)\leq r^{(k-1)}<T^{(i-1)}(k,l)$ となる $l$ が存在するとき,

$$T^{(k)}(i,j)=\begin{cases} T^{(k-1)}(i,j) & (i,j)\neq(k,l) \\ r^{(k-1)} & (i,j)=(k,l) \end{cases}$$

$$r^{(k)}=T^{(i-1)}(k,l)$$

このようにして, $T^{(k-1)}$ と $r^{(k-1)}$ からできる tableau $T^{(k)}$ を $\mathrm{Ins}(T^{(k-1)},r^{(k-1)},k)$ ( $T^{(k-1)}$ の $k$ 行目に $r^{(k-1)}$ を insert してできる tableau ), $r^{(k)}$ を $\mathrm{bump}(T^{(k-1)},r^{(k-1)},k)$ と表わす. $T, T\leftarrow r$ の shape をそれぞれ $\lambda,\mu$ とすると, $\lambda\triangleleft\mu$ となっている.

例えば,

$$T=\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & & & \end{matrix}, \qquad r=2$$

のとき，

$$T^{(0)} = \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & & & \end{matrix}, \qquad r^{(0)} = 2$$

$$T^{(1)} = \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & & & \end{matrix}, \qquad r^{(1)} = 3$$

$$T^{(2)} = \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & & & \end{matrix}, \qquad r^{(3)} = 4$$

$$T^{(4)} = \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & & \end{matrix}, \qquad r^{(4)} = \infty$$

従って，

$$T \leftarrow r = \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & & \end{matrix}$$

このアルゴリズムによって

<u>定理 1.2</u>. 次の写像は weight を保つ全単射である．

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{SSTab}(\lambda : [n]) & \times & [n] & \xrightarrow{\sim} & \coprod_{\mu \triangleright \lambda} \mathrm{SSTab}(\mu : [n]) \\ (T & , & r) & \longmapsto & T \leftarrow r \end{array}$$

この母関数を考えると，

<u>系 1.3</u>.

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) \times (x_1 + \cdots + x_n) = \sum_{\mu \triangleright \lambda} s_\mu(x_1, \ldots, x_n)$$

よって，

$$V_\lambda \otimes V \cong \bigoplus_{\mu \triangleright \lambda} V_\mu$$

(0.2) の対応は，insertion algorithm を繰り返すことによって得られる．$w = w_1 w_2 \cdots w_k \in [n]^k$ が与えられたとき，semistandard tableau $P^{(i)}$ を

$$P^{(0)} = \emptyset \qquad P^{(i)} = P^{(i-1)} \leftarrow w_i$$

のように帰納的に定義し，$P(w) = P^{(k)}$ とおく．そして，$P^{(i)}$ の shape を $\lambda^{(i)}$ とするとき，分割の列 $\emptyset = \lambda^{(0)} \triangleleft \lambda^{(1)} \triangleleft \ldots \triangleleft \lambda^{(k)}$ に対応する standard tableau を $Q(w)$ とする．

<u>定理 1.4</u>. 次の写像は weight を保つ全単射である．

$$\begin{array}{ccccc} [n]^k & \xrightarrow{\sim} & \coprod \lambda \vdash k \quad \mathrm{SSTab}(\lambda : [n]) & \times & \mathrm{STab}(\lambda) \\ w & \longmapsto & (P(w) & , & Q(w)) \end{array}$$

この母関数を考えると，

<u>系 1.5</u>. $f^\lambda = \#\mathrm{STab}(\lambda)$ とおくと，

$$(x_1 + \cdots + x_n)^k = \sum_{\lambda \vdash k} f^\lambda \cdot s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$$

よって，

$$V^{\otimes k} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash k} V_\lambda^{\oplus f^\lambda}$$

(0.1) の対応は，$\mathfrak{S}_n$ の元を $1, 2, \ldots, n$ の順列と見て，(0.2) の対応を $\mathfrak{S}_n \subset [n]^n$ に制限することによって得られる．

## §2. $SO(2n)$-tableau.

$SO(2n, \mathbb{C})$ の Robinson-Schensted 対応を構成するためには，$GL(n, \mathbb{C})$ の場合の semistandard tableau に対応するものを，$SO(2n, \mathbb{C})$ の場合に定義しなければならない．

まず，$SO(2n,\mathbb{C})$ の既約表現について復習しておく．ここでは，

$$SO(2n,\mathbb{C})=\{X\in SL(2n,\mathbb{C}):XJ\,{}^tX=J\},\qquad J=\begin{pmatrix} & & & 1\\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

とおく．$SO(2n,\mathbb{C})$ の極大トーラスとして，

$$T=\{\mathrm{diag}(x_1,\dots,x_n,x_n^{-1},\dots,x_1^{-1}):x_i\in\mathbb{C}^\times\}$$

をとり，$e_i:\mathrm{Lie}(T)\to\mathbb{C}$ を

$$e_i(\mathrm{diag}(H_1,\dots,H_n,-H_n,\dots,-H_1))=H_i.$$

によって定義する．すると，$\Delta=\{\pm e_i\pm e_j:i<j\}$ が $SO(2n,\mathbb{C})$ のルート系となり，その基本系として $\Pi=\{e_1-e_2,\dots,e_{n-1}-e_n,e_{n-1}+e_n\}$ がとれる．

<u>定理 2.1</u>. $SO(2n,\mathbb{C})$ の既約表現の同値類の集合は，

$$P^+_{D(n)}=\{\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_ne_n:\lambda_i\in\mathbb{Z},\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_{n-1}\geq|\lambda_n|\}.$$

と 1 対 1 に対応している．

<u>定義</u>. $\lambda$ を長さ $n$ 以下の分割とする．$l(\lambda)\leq n-1$ のとき，最高 weight が $\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_{n-1}e_{n-1}$ である $SO(2n,\mathbb{C})$ の既約表現の指標を $\lambda_{D(n)}$ と表わす．$l(\lambda)=n$ のときは，最高 weight が $\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_{n-1}e_{n-1}+\lambda_ne_n$ の既約表現の指標を $\lambda^+_{D(n)}$，最高 weight が $\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_{n-1}e_{n-1}-\lambda_ne_n$ の既約表現の指標を $\lambda^-_{D(n)}$ と表わす．そして，

$$\lambda_{D(n)}=\lambda^+_{D(n)}+\lambda^-_{D(n)}$$

とおく．

以下では，$SO(2n,\mathbb{C})$ の指標は，極大トーラス $T$ 上の関数と見て，$x_1,\dots,x_n$ の Laurent 多項式であると考える．

$\Gamma_n = \{1, \overline{1}, 2, \overline{2}, \ldots, n, \overline{n}\}$ とおき，$\Gamma_n$ の元の間には

$$1 < \overline{1} < 2 < \overline{2} < \cdots < n < \overline{n}.$$

なる全順序が入っているとする．

定義．$\lambda$ を長さ $n$ 以下の分割とする．shape $\lambda$ の $SO(2n)$-tableau とは，次の条件 (D1)-(D4) を満たす写像 $T : Y(\lambda) \to \Gamma_n$ のことである．

(D1) $T(i,1) \leq T(i,2) \leq \cdots \leq T(i,\lambda_i) \quad (1 \leq i \leq l(\lambda))$.

(D2) $T(1,j) < T(2,j) < \cdots < T(\lambda'_j, j) \quad (1 \leq j \leq \lambda_1)$.

(D3) $T(i,j) \geq i \quad ((i,j) \in Y(\lambda))$.

(D4) $T(i,1) = i$ かつ $T(i,j) = \overline{i}$ ならば，$T(i-1,j) = i$.

この定義から，$SO(2n)$-tableau には $1$ と $\overline{1}$ を同時に含む行はない．また，$SO(2n)$-tableau $T$ の $(i,1)$ 成分が $i$ ならば，$T$ の $i-1, i$ 行目は次のようになっている．

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & i & i & \cdots & i & & \\ i & i & \cdots & \overline{i} & \overline{i} & \cdots & \overline{i} & i+1 \text{ 以上} \end{array}$$

$SO(2n)$-tableau $T$ に対して，$T$ 中に現われる $i$ の個数を $m_i(T)$，$\overline{i}$ の個数を $m_{\overline{i}}(T)$ とおき，$x^T = x_1^{m_1(T)-m_{\overline{1}}(T)} \cdots x_n^{m_n(T)-m_{\overline{n}}(T)}$ と書く．例えば，

$$T = \begin{array}{cccc} \overline{1} & \overline{1} & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \overline{2} & 3 \\ 4 & \overline{4} & & \\ \overline{4} & & & \end{array}$$

は $SO(8)$-tableau であり，$x^T = x_1^{-2} x_2^3 x_3 x_4^{-1}$ である．

定義．$T$ を shape $\lambda$ の $SO(2n)$-tableau とする．符号列 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ は，次の条件 (S1)-(S4) を満たすとき，$T$ と両立するという．

(S1) $C(T) \cap \{i, \overline{i}\} = \emptyset$ ならば，$\varepsilon_i = 1$.

(S2) $C(T) \cap \{i, \overline{i}\} = \{i\}$ ならば，$\varepsilon_i = 1$.

(S3) $C(T) \cap \{i, \overline{i}\} = \{\overline{i}\}$ ならば，$\varepsilon_i = -1$.

(S4) $C(T) \cap \{i, \overline{i}\} = \{i, \overline{i}\}$ かつ $T(i,1) \neq \overline{i}$ ならば，$\varepsilon_i = 1$.

ここで，$C(T) = \{T(i,1) : i = 1, \ldots, l(\lambda)\}$.

例えば，上の $T$ と両立する符号列は $\varepsilon = (-1,1,1,1)$ と $(-1,1,1,-1)$ である．

<u>定義</u>． 長さ $n$ 以下の分割 $\lambda$ に対して，shape $\lambda$ の $SO(2n)$-tableau $T$ と $T$ と両立する符号列 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ の対 $(T, \varepsilon)$ 全体の集合を $\mathrm{Tab}(\lambda_{D(n)})$ と表わす．$l(\lambda) = n$ のとき，

$$\mathrm{Tab}(\lambda^+_{D(n)}) = \{(T,\varepsilon) \in \mathrm{Tab}(\lambda_{D(n)}) : \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 1\}$$

$$\mathrm{Tab}(\lambda^-_{D(n)}) = \{(T,\varepsilon) \in \mathrm{Tab}(\lambda_{D(n)}) : \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i = -1\}$$

とおく．

たとえば，$n = 2$，$\lambda = (2,2)$ のとき，

$$\mathrm{Tab}(\lambda^+_{D(2)}) = \left\{ (\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}; 1,1), (\tfrac{\overline{1}}{2}\tfrac{\overline{1}}{2}; -1,-1), (\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\tfrac{2}{2}; 1,1), (\tfrac{\overline{1}}{2}\tfrac{2}{2}; -1,-1), (\tfrac{2}{2}\tfrac{2}{2}; 1,1) \right\}$$

$$\mathrm{Tab}(\lambda^-_{D(2)}) = \left\{ (\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}; 1,-1), (\begin{smallmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}; -1,1), (\tfrac{1}{2}\tfrac{2}{2}; 1,-1), (\tfrac{\overline{1}}{2}\tfrac{2}{2}; -1,1), (\tfrac{2}{2}\tfrac{2}{2}; 1,-1), \right\}$$

<u>定理 2.1</u>. 長さ $n$ 以下の分割 $\lambda$ に対して，

$$\lambda_{D(n)} = \sum_{(T,\varepsilon) \in \mathrm{Tab}(\lambda_{D(n)})} x^T$$

さらに，$l(\lambda) = n$ ならば，

$$\lambda^{\pm}_{D(n)} = \sum_{(T,\varepsilon) \in \mathrm{Tab}(\lambda^{\pm}_{D(n)})} x^T \quad \text{（複号同順）}$$

この定理の証明は，$G = SO(2n, \mathbf{C})$ の既約表現を部分群

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{pmatrix} : z \in \mathbf{C}^\times, Y \in SO(2n-2, \mathbf{C}) \right\}$$

$$\cong GL(1, \mathbf{C}) \times SO(2n-2, \mathbf{C}).$$

に制限したときの分解則に基づいている．$SO(2n,\mathbb{C})$ の既約指標 $\chi$ と $SO(2n-2,\mathbb{C})$ の既約指標 $\xi$ に対して，$GL(1,\mathbb{C})$ の指標 $[\chi:\xi]$ を

$$\chi\downarrow^G_H=\sum_{\xi}[\chi:\xi]\times\xi$$

（ここで $\xi$ は $SO(2n-2,\mathbb{C})$ の既約指標全体を走る.）によって定める．すると，$[\chi:\xi]$ は次のような行列式で与えられる．

<u>命題 2.3.</u> $\lambda$ を長さ $n$ 以下の分割，$\mu$ を長さ $n-1$ 以下の分割とする．

(1) $l(\lambda)<n$ かつ $l(\mu)<n-1$ のとき，

$$\begin{aligned}&[\lambda_{D(n)}:\mu_{D(n-1)}](z)\\&\qquad=\det(h_{\lambda^*-\mu_1 1},h_{\lambda^*-(\mu_2-1)1},\dots,h_{\lambda^*-(\mu_{n-1}-n+2)1},\\&\qquad\qquad z^{\lambda^*+(n-1)1}+z^{(-1)\lambda^*-(n-1)1})\end{aligned}$$

(2) $l(\lambda)<n$ かつ $l(\mu)=n-1$ のとき，

$$\begin{aligned}&[\lambda_{D(n)}:\mu^{\pm}_{D(n-1)}](z)\\&\qquad=\det(h_{\lambda^*-\mu_1 1},h_{\lambda^*-(\mu_2-1)1},\dots,h_{\lambda^*-(\mu_{n-1}-n+2)1},\\&\qquad\qquad z^{\lambda^*+(n-1)1}+z^{(-1)\lambda^*-(n-1)1})\end{aligned}$$

(3) $l(\lambda)=n$ かつ $l(\mu)<n-1$ のとき，

$$[\lambda^+_{D(n)}:\mu_{D(n-1)}]=[\lambda^-_{D(n)}:\mu_{D(n-1)}]=\det(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j}(z,z^{-1}))_{1\le i,j\le n}$$

(4) $l(\lambda)=n$ かつ $l(\mu)=n-1$ のとき，

$$\begin{aligned}&[\lambda^+_{D(n)}:\mu^+_{D(n-1)}]=[\lambda^-_{D(n)}:\mu^-_{D(n-1)}]=z^{\mu_{n-1}}\det(h_{\lambda_i-\tilde{\mu}_j-i+j}(z,z^{-1}))\\&[\lambda^+_{D(n)}:\mu^-_{D(n-1)}]=[\lambda^-_{D(n)}:\mu^+_{D(n-1)}]=z^{-\mu_{n-1}}\det(h_{\lambda_i-\tilde{\mu}_j-i+j}(z,z^{-1}))\end{aligned}$$

ただし，$\tilde{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{n-1},\mu_{n-1})$．

ここで,

$$h_k(z,z^{-1}) = \begin{cases} z^k + z^{k-2} + \cdots + z^{-k+2} + z^{-k} & (k>0) \\ 1 & (k=0) \\ 0 & (k<0) \end{cases}$$

である. 整数列 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対して, $h_\alpha(z,z^{-1})$, $z^\alpha$ はそれぞれ列ベクトル ${}^t(h_{\alpha_1}(z,z^{-1}), \ldots, h_{\alpha_n}(z,z^{-1}))$, ${}^t(z^{\alpha_1}, \ldots, z^{\alpha_n})$ を表わす. また, $\alpha^* = (\alpha_1, \alpha_2 - 1, \alpha_3 - 2, \ldots, \alpha_n - n + 1)$, $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ である.

## §3. $SO(2n,\mathbb{C})$ の Robinson-Schensted 対応.

この節では, 次の定理の全単射を与えるアルゴリズムを構成する.

<u>定理 3.1.</u> $\lambda$ を長さ $n$ 以下の分割とする.

(1) $l(\lambda) < n$ のとき, wight を保つ全単射

$$I(\lambda_{D(n)}) : \mathrm{Tab}(\lambda_{D(n)}) \times \Gamma_n \to \coprod_{\mu \triangleright \lambda \text{ or } \mu \triangleleft \lambda} \mathrm{Tab}(\mu_{D(n)})$$

が存在する.

(2) $l(\lambda) = n$ のとき, weight を保つ全単射

$$I(\lambda^{\pm}_{D(n)}) : \mathrm{Tab}(\lambda^{\pm}_{D(n)}) \times \Gamma_n$$

$$\to \begin{cases} \displaystyle\coprod_{\substack{\mu \triangleright \lambda \text{ or } \mu \triangleleft \lambda \\ l(\mu)=n}} \mathrm{Tab}(\mu^{\pm}_{D(n)}) & (\lambda_n \geq 2) \\ \left( \displaystyle\coprod_{\substack{\mu \triangleright \lambda \text{ or } \mu \triangleleft \lambda \\ l(\mu)=n}} \mathrm{Tab}(\mu^{\pm}_{D(n)}) \right) \coprod \mathrm{Tab}(\widehat{\lambda}_{D(n)}) & (\lambda_n = 1) \end{cases}$$

(ただし, $\widehat{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$) が存在する.

この定理と定理 2.2 から, $SO(2n,\mathbb{C})$ の既約表現と自然表現とのテンソル積の既約分解を示す次の系が得られる.

系 3.2. $\lambda$ を長さ $n$ 以下の分割とする.

(1) $l(\lambda) < n$ のとき,

$$\lambda_{D(n)} \times (x_1 + x_1^{-1} + \cdots + x_n + x_n^{-1}) = \sum_{\mu \triangleright \lambda \text{ or } \mu \triangleleft \lambda} \mu_{D(n)}$$

(2) $l(\lambda) = n$ のとき,

$$\lambda^{\pm}_{D(n)} \times (x_1 + x_1^{-1} + \cdots + x_n + x_n^{-1})$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{\mu \triangleright \lambda \text{ or } \mu \triangleleft \lambda \\ l(\mu)=n}} \mu^{\pm}_{D(n)} & (\lambda_n \geq 2) \\ \left( \displaystyle\sum_{\substack{\mu \triangleright \lambda \text{ or } \mu \triangleleft \lambda \\ l(\mu)=n}} \mu^{\pm}_{D(n)} \right) + \widehat{\lambda}_{D(n)} & (\lambda_n = 1) \end{cases}$$

ただし, $\widehat{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ .

$SO(2n)$-tableau $T$ と $\gamma \in \Gamma_n$ が与えられたとき, §1 のアルゴリズムを用いて, tableau $T \leftarrow \gamma$ を作ると, この tableau は $SO(2n)$-tableau の条件 (D1), (D2) を満たすが, (D3), (D4) を満たすとは限らない. そこで, §1 のアルゴリズムを修正して, 定理 3.1 の全単射 $I(\chi)$ を与えるアルゴリズムを構成する.

Punctured tableau と sliding algorithm. Berele [B] が $Sp(2n, \mathbf{C})$ に対する Robinson-Schensted 対応を構成するのに用いた punctured tableau をここでも用いる. $\lambda$ が分割で, $(k,l) \in Y(\lambda)$ であるとき, 写像 $T : Y(\lambda) - \{(k,l)\} \to \Gamma_n$ のことを $(k,l)$ に穴を持つ shape $\lambda$ の punctured tableau という. ( $T(k,l)$ が穴であるというときもある.) 穴 $(k,l)$ が $Y(\lambda)$ の角にあるとき, つまり, $\lambda_k = l$ かつ $\lambda_{k+1} < l$ であるとき, $T$ は shape が $\mu$ $(Y(\mu) = Y(\lambda) - \{(k,l)\})$ である普通の tableau と見なすことができる.

定義. $(k,l)$ に穴を持つ shape $\lambda$ の punctured tableau $T$ は, 次の条件 (D'1)-(D'6) を満たすとき, punctured $SO(2n)$-tableau であるという.

(D'1) 各行は (穴を無視して) 単調非減少である.

(D'2) 各列は（穴を無視して）単調増加である．

(D'3) $T(i,j) \geq i \quad ((i,j) \in Y(\lambda) - \{(k,l)\})$.

(D'4) $T(i,1) = i$ かつ $T(i,j) = \bar{i}$ ならば，

( a) $T(i-1,j) = i$ または

( b) $T(i-1,j)$ が穴であり，$T(i-1,j+1) \geq i$.

(D'5) $T(k,l-1) = k$ かつ $T(k,l+1) = \bar{k}$ ならば，$T(k-1,l) = k$.

(D'6) $T(k,l+1) = k$ ならば，$\bar{k}$ は $k$ 行目に現われない．

上の条件のうち，(D'1) と (D'2) を満たす punctured tableau を semi-standard punctured tableau という．

以下，穴を $\square$ で表わすことにする．たとえば，

$$\begin{matrix} 1 & \square & 2 \\ 2 & \bar{2} & \end{matrix} \quad \text{and} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & \square & \bar{2} \end{matrix}$$

は，punctured $SO(4)$-tableaux である．

$(k,l)$ に穴を持つ shape $\lambda$ の punctured tableau $T$ に対して，新しい punctured tableau $A(T)$ を次のように定義する．

(1) $(k,l)$ が $Y(\lambda)$ の角にあるとき，つまり，$\lambda_k = l$ かつ $\lambda_{k+1} < l$ であるとき，$A(T)$ は定義しない．

(2) $(k,l)$ が $Y(\lambda)$ の角になく，$T(k,l+1) < T(k+1,l)$ であるとき，$A(T)$ は $T$ の穴と $T(k,l+1)$ を交換したものである．

(3) $(k,l)$ が $Y(\lambda)$ の角になく，$T(k,l+1) \geq T(k+1,l)$ であるとき，$A(T)$ は $T$ の穴と $T(k+1,l)$ を交換したものである．

ここで，$(i,j) \notin Y(\lambda)$ のときは，$T(i,j) = \infty$ であると考える．この定義から明らかなように，$A(T)$ は定義されさえすれば，semistandard である．

たとえば，

$$T_1 = \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & \square & \bar{2} \end{matrix}, \quad T_2 = \begin{matrix} 1 & \square & 2 \\ 2 & \bar{2} & \end{matrix}$$

のとき，

$$A(T_1) = \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & \bar{2} & \square \end{matrix}, \quad A(T_2) = \begin{matrix} 1 & 2 & \square \\ 2 & \bar{2} & \end{matrix}$$

さらに，punctured $SO(2n)$-tableau と両立する符号列を定義する．

定義．$T$ を $(k,l)$ に穴を持つ punctured $SO(2n)$-tableau とする．符号列 $\varepsilon=(\varepsilon_0;\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{\pm1\}^{n+1}$ は，次の条件 (S'1)-(S'7) を満たすとき，$T$ と両立するという．

(S'1) $C(T)\cap\{i,\bar{i}\}=\emptyset$ ならば，$\varepsilon_i=1$.

(S'2) $C(T)\cap\{i,\bar{i}\}=\{i\}$ ならば，$\varepsilon_i=1$.

(S'3) $C(T)\cap\{i,\bar{i}\}=\{\bar{i}\}$ ならば，$\varepsilon_i=-1$.

(S'4) $C(T)\cap\{i,\bar{i}\}=\{i,\bar{i}\}$ かつ $T(i,1)\neq\bar{i}$ ならば，$\varepsilon_i=1$.

(S'5) $l=1$ かつ $T(k-1,1)\le\overline{k-1}$ のとき，$T(k,2)=k$ であるかまたは $T(k,2)=\bar{k}$ であるかに応じて，$\varepsilon_0=1$ または $\varepsilon_0=-1$ である．

(S'6) $l=1$ かつ $T(k-1,1)\ge k+1$ ならば，$\varepsilon_0=1$.

(S'7) $l\ge2$ ならば，$\varepsilon_0=1$.

$\varepsilon_0$ を穴の符号と呼ぶ．

例えば，

$$\begin{array}{cc}\bar{1} & 2\\ 4 & \bar{4}\\ \square & \\ \bar{4} & \end{array}$$

と両立する符号列は，$\varepsilon=(1;-1,1,1,1)$ と $(1;-1,1,1,-1)$ である．

(punctured) $SO(2n)$-tableau $T$ と $1\le k\le n$ に対して，

$$\varepsilon_k(T)=\begin{cases}1 & \text{if } C(T)\cap\{k,\bar{k}\}=\emptyset\\ 1 & \text{if } C(T)\cap\{k,\bar{k}\}=\{k\}\\ -1 & \text{if } C(T)\cap\{k,\bar{k}\}=\{\bar{k}\}\\ 1 & \text{if } C(T)\cap\{k,\bar{k}\}=\{k,\bar{k}\} \text{ and } T(k,1)\neq\bar{k}\end{cases}$$

と書く．$C(T)\cap\{k,\bar{k}\}=\{k,\bar{k}\}$ かつ $T(k,1)=\bar{k}$ のときは，$\varepsilon_k(T)$ を定義しない．つまり，$T$ と両立する符号列の定義から決まる符号を $\varepsilon_k(T)$ とする．

$SO(2n)$ の Robinson-Schensted 対応．さて，$SO(2n,\mathbb{C})$ の Robinson-Schensted 対応を記述しよう．そのために，次のような集合 $\mathfrak{X}_t(\lambda),\mathfrak{X}_\infty(\lambda)$, $\mathfrak{X}_p(\lambda)$, $\mathfrak{X}(\lambda)$ ($\lambda$ は長さ $n$ 以下の分

割）を考える．

$$\mathfrak{X}_t(\lambda) = \left\{ (T,\varepsilon,\gamma,k) : \begin{array}{l} (T,\varepsilon) \in \mathrm{Tab}(\lambda_{D(n)}) \\ \gamma \in \Gamma_n \\ k \in \mathbf{N} \\ \mathrm{Ins}(T,\gamma,k) \text{ は semistandard} \\ \gamma \geq k \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{X}_\infty(\lambda) = \left\{ (T,\varepsilon,\infty,k) : \begin{array}{l} (T,\varepsilon) \in \mathrm{Tab}(\mu_{D(n)}), \quad \mu \rhd \lambda \\ k \in \mathbf{N} \\ Y(\mu) - Y(\lambda) \text{ の箱は } k \text{ 行目にある} \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{X}_p(\lambda) = \left\{ (T,\varepsilon) : \begin{array}{l} T \text{ は shape } \lambda \text{ の punctured tableau} \\ \varepsilon \text{ は } T \text{ と両立する符号列} \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{X}(\lambda) = \mathfrak{X}_t(\lambda) \coprod \mathfrak{X}_\infty(\lambda) \coprod \mathfrak{X}_p(\lambda)$$

shape $\lambda$ の符号つき $SO(2n)$-tableau $(T,\varepsilon) \in \mathrm{Tab}(\chi)$ $(\chi = \lambda_{D(n)}, \lambda^{\pm}_{D(n)})$ と $\gamma \in \Gamma_n$ が与えられたとする．この $(T,\varepsilon)$ と $\gamma$ に対して，$\mathfrak{X}(\lambda)$ の元の列 $X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(N)}$ を

(a) $X^{(N)} \in \mathfrak{X}_\infty(\lambda)$ または

(b) $X^{(N)} = (T^{(N)}, \varepsilon^{(N)}) \in \mathfrak{X}_p(\lambda)$ で，$T^{(i)}$ の穴が $Y(\lambda)$ の角にあり，さらに $l(\lambda) < n$ のときは穴の符号が $\varepsilon_0^{(N)} = 1$ となっている．

となるまで帰納的に構成し，$I(\chi)(T,\varepsilon,\gamma)$ を次のように定義する．

(a) $X^{(N)} = (T^{(N)}, \varepsilon^{(N)}, \infty, k^{(N)}) \in \mathfrak{X}_\infty(\lambda)$ のときは，$I(\chi)(T,\varepsilon,\gamma) = (T^{(N)}, \varepsilon^{(N)})$ とおく．

(b) $X^{(N)} = (T^{(N)}, \varepsilon^{(N)}) \in \mathfrak{X}_p(\lambda)$ $(\varepsilon^{(N)} = (\varepsilon_0^{(N)}; \varepsilon_1^{(N)}, \ldots, \varepsilon_n^{(N)}))$ のときは，$T^{(N)}$ から穴を取り除いた tableau を $S$，$\delta = (\varepsilon_1^{(N)}, \ldots, \varepsilon_n^{(N)})$ とし，$I(\chi)(T,\varepsilon,\gamma) = (S,\delta)$ とおく．

最初に

$$X^{(0)} = (T,\varepsilon,\gamma,1).$$

とおく．次に，$X^{(0)}, \ldots, X^{(i-1)}$ が定義されたとき，$T^{(i)}$ を定義する．

$X^{(i-1)} = (T^{(i-1)}, \varepsilon^{(i-1)}, \gamma^{(i-1)}, k^{(i-1)}) \in \mathfrak{X}_t(\lambda)$ のときは，$k = k^{(i-1)}$, $T' = \mathrm{Ins}(T^{(i-1)}, \gamma^{(i-1)}, k)$, $\gamma' = \mathrm{bump}(T^{(i-1)}, \gamma^{(i-1)}, k)$ とおくと，次の 3 つの場合が考えられる．

(I) $T'$ は $SO(2n)$-tableau であり，$\gamma' \geq k+1$.

(II) $T'$ は $SO(2n)$-tableau だが，$\gamma' \leq \overline{k}$.

(III) $T'$ は $SO(2n)$-tableau ではない．

(I) の場合，

$$T^{(i)} = T', \quad \gamma^{(i)} = \gamma', \quad k^{(i)} = k+1$$

とおく．$\gamma^{(i-1)} = a$, or$\overline{a}$ and $\gamma' = b$, or$\overline{b}$ とするとき，

$$\varepsilon_j^{(i)} = \begin{cases} \varepsilon_b(T^{(i)}) & \text{if } j = b \\ \varepsilon_j^{(i-1)} & \text{if } j \neq a, b \end{cases}$$

とおく．符号 $\varepsilon_a^{(i)}$ は，次の場合を除いて，$T^{(i)}$ と両立することから一意的に定まり，

$$T^{(i)}(k-1,1) = T^{(i-1)}(k-1,1) = k, \quad T^{(i)}(k,1) = \gamma^{(i-1)} = \overline{k}$$

のときは $\varepsilon_k^{(i)} = 1$ と定める．

(II) の場合，

$$\gamma^{(i-1)} = k, \quad \gamma' = \overline{k}, \quad T^{(i-1)}(k,1) = \overline{k}.$$

となるので，次の 2 つの場合に分ける．

(II-1) $\prod_{j=1}^{k} \varepsilon_j = \prod_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j^{(i-1)}$ であり，$T^{(i-2)}$ $(i \geq 2)$ の $k-1, k$ 行目が

$$T^{(i-2)}(k-1,1) = k, \quad T^{(i-2)}(k,1) = T^{(i-2)}(k,2) = \overline{k}$$

のようになっているとき，

(II-2) その他のとき，

(II-1) の場合，$T^{(i-2)}, T^{(i-1)}, T'$ の $k, k+1$ 行目は次のようになっている．

$$T^{(i-2)} = \begin{matrix} k & k \\ \overline{k} & \overline{k} \end{matrix}, \quad T^{(i-1)} = \begin{matrix} * & k \\ \overline{k} & \overline{k} \end{matrix}, \quad T' = \begin{matrix} * & k \\ k & \overline{k} \end{matrix}$$

そこで，$T'$ の $(k-1,2)$ 成分を穴にした punctured tableau を $T^{(i)}$ とする．

$$T^{(i)}=\begin{array}{cc} * & \square \\ k & \overline{k} \end{array}$$

そして，符号列は，

$$\varepsilon_j^{(i)}=\begin{cases} 1 & \text{if } j=0 \\ 1 & \text{if } j=k \\ \varepsilon_j^{(i-1)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定める．

(II-2) の場合は，$T'$ の $(k,1)$ 成分を穴にした punctured tableau を $T^{(i)}$ とし，

$$\varepsilon_j^{(i)}=\begin{cases} \prod_{j=1}^{k}\varepsilon_j \big/ \prod_{j=1}^{k-1}\varepsilon_j^{(i-1)} & \text{if } j=0 \\ 1 & \text{if } j=k \\ \varepsilon_j^{(i-1)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく．

(III) の場合，次の 3 つの場合に分けて考える．

(III-1) $T^{(i-1)}$ の $k,k+1$ 行目がある $l\geq 2$ に対して，

$$T^{(i-1)}(k+1,1)=\cdots=T^{(i-1)}(k+1,l-1)=k+1,$$
$$T^{(i-1)}(k+1,l)=T^{(i-1)}(k+1,l+1)=\overline{k+1},$$
$$T^{(i-1)}(k,l)=k+1$$

を満たし，次のいずれかが成り立つ．

(a) $\gamma^{(i-1)}=k$.

(b) $\gamma^{(i-1)}=\overline{k}$ and $T^{(i-1)}(k-1,l)=k$.

(III-2) $T^{(i-1)}$ の $k,k+1$ 行目がある $l\geq 2$ に対して，

$$T^{(i-1)}(k+1,1)=\cdots=T^{(i-1)}(k+1,l-1)=k+1,$$
$$T^{(i-1)}(k+1,l)=\overline{k+1},\quad T^{(i-1)}(k+1,l+1)\geq k+2,$$
$$T^{(i-1)}(k,l)=k+1$$

を満たし，次のいずれかが成り立つ．

(a) $\gamma^{(i-1)} = k$.

(b) $\gamma^{(i-1)} = \overline{k}$ and $T^{(i-1)}(k-1, l) = k$.

(III-3) $\gamma^{(i-1)} = \overline{k}$ であり，$T^{(i-1)}$ の $k-1, k$ 行目はある $l \geq 2$ に対して，

$$T^{(i-1)}(k,1) = \cdots = T^{(i-1)}(k, l-1) = k,$$
$$T^{(i-1)}(k,l) \geq k+1,$$
$$T^{(i-1)}(k-1,l) \leq \overline{k-1} \quad (\text{or } k=1).$$

を満たす．

(III-1) の場合，$T^{(i-1)}, T'$ の $k, (k+1)$ 行目は，次のようになっている．

$$T^{(i-1)} = \begin{array}{ccccc} & & & k+1 & k+1 \\ k+1 & \cdots & k+1 & \overline{k+1} & \overline{k+1} \end{array}$$

$$T' = \begin{array}{ccccc} & \cdots & & \gamma^{(i-1)} & k+1 \\ k+1 & \cdots & k+1 & \overline{k+1} & \overline{k+1} \end{array}$$

そこで，$T'$ の $(k, l+1)$ 成分を穴にし，$(k+1, l)$ 成分を $k+1$ にした punctured tableau を $T^{(i)}$ とする．

$$T^{(i)} = \begin{array}{ccccc} & & & \gamma^{(i-1)} & \square \\ k+1 & \cdots & k+1 & k+1 & \overline{k+1} \end{array}$$

そして，

$$\varepsilon_j^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 0 \\ \varepsilon_j^{(i-1)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく．

(III-2) の場合は，$T^{(i-1)}$ の $k, (k+1)$ 行目は，次のようになっている．

$$T^{(i-1)} = \begin{array}{ccccc} & & & k+1 & T^{(i-1)}(k, l+1) \\ k+1 & \cdots & k+1 & \overline{k+1} & T^{(i-1)}(k+1, l+1) \end{array}$$

$$T' = \begin{array}{ccccc} & & & \gamma^{(i-1)} & T^{(i-1)}(k, l+1) \\ k+1 & \cdots & k+1 & \overline{k+1} & T^{(i-1)}(k+1, l+1) \end{array}$$

そこで，$T'$ の $(k+1,1)$ 成分を穴にし，$(k+1,l)$ 成分を $k+1$ にした punctured tableau を $T^{(i)}$ とする．

$$T^{(i)} = \begin{array}{cccccc} & & & & \gamma^{(i-1)} & T^{(i-1)}(k,l+1) \\ \square & k+1 & \cdots & k+1 & k+1 & T^{(i-1)}(k+1,l+1) \end{array}$$

そして，

$$\varepsilon_j^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 0 \\ \varepsilon_j^{(i-1)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく．

(III-3) の場合は，$T^{(i-1)}$ と $T'$ の $k-1, k$行目は，次のようになっている．

$$T^{(i-1)} = \begin{array}{cccc} & & & T^{(i-1)}(k-1,l) \\ k & \cdots & k & T^{(i-1)}(k,l) \end{array}$$

$$T' = \begin{array}{cccc} & & & T^{(i-1)}(k-1,l) \\ k & \cdots & k & \overline{k} \end{array}$$

そこで，$T^{(i-1)}$ の $(k,1)$ 成分を穴にした punctured tableau を $T^{(i)}$ とする．

$$T^{(i)} = \begin{array}{ccccc} & & & & T^{(i-1)}(k-1,l) \\ \square & k & \cdots & k & T^{(i-1)}(k,l) \end{array}$$

そして，

$$\varepsilon_j^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 0 \\ \varepsilon_j^{(i-1)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく．

これから，$X^{(i-1)} = (T^{(i-1)}, \varepsilon^{(i-1)}) \in \mathfrak{X}_p(\lambda)$ の場合を考える．$T^{(i-1)}$ が $(k,l)$ に穴を持つとする．このとき，次の 3 つの場合が考えられる．

(IV) $l = 1$ であり，$X^{(i-1)}$ に対して次のいずれかが成り立つ．

(a) $T^{(i-1)}(k-1,1) \leq \overline{k}$, $T^{(i-1)}(k,2) < T^{(i-1)}(k+1,1)$ であり，$T^{(i-1)}(k,2) = a$, or$\overline{a}$ とするとき，$\varepsilon_0^{(i-1)}\varepsilon_a^{(i-1)} = -\varepsilon_a(A(T^{(i-1)}))$

(b) $\varepsilon_0^{(i-1)} = -1$ であり，$T^{(i-1)}(k,2) \geq T^{(i-1)}(k+1,1) \geq k+2$.

(V) $l=1$ であり，$X^{(i-1)}$ は次の条件をすべて満たしている．

(a) $T^{(i-1)}(m-1,1) = m$, $T^{(i-1)}(m,1) = \overline{m}$ となる $m \geq k+2$ が存在する．

(b) $T^{(i-1)}(k-1,1) \geq k+1$ であり，$T^{(i-1)}(k,2) < T^{(i-1)}(k+1,1)$

(c) $T^{(i-1)}(k,2) = a$, or$\overline{a}$ とするとき，$\varepsilon_0^{(i-1)}\varepsilon_a^{(i-1)} = -\varepsilon_a(A(T^{(i-1)}))$

(VI) その他のとき，

(IV) のとき，$\mathfrak{X}_l(\lambda) \cup \mathfrak{X}_\infty(\lambda)$ の元 $X^{(i)} = (T^{(i)}, \varepsilon^{(i)}, \gamma^{(i)}, k^{(i)})$ を次のように構成する．

$$T^{(i)}(p,q) = \begin{cases} k+1 & \text{if } (p,q) = (k,1) \\ \overline{k+1} & \text{if } (p,q) = (k+1,1) \\ T^{(i-1)}(p,q) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\varepsilon_j^{(i)} = \begin{cases} -1 & \text{if } j = k+1 \\ \varepsilon_b(T^{(i)}) & \text{if } j = b \\ \varepsilon_j^{(i-1)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\gamma^{(i)} = T^{(i-1)}(k+1,1)$$

$$k^{(i)} = k^{(i-1)} + 2$$

ただし，$T^{(i-1)}(k+1,1) = b$, or$\overline{b}$.

(V) の場合は，$T^{(i-1)}(m-1,1) = m$, $T^{(i-1)}(m,1) = \overline{m}$ となる最小の $m \geq k+2$ をとり，

$$T^{(i)} = A(T^{(i-1)})$$

$$\varepsilon_j^{(i)} = \begin{cases} \varepsilon_a(T^{(i)}) & \text{if } j = a \\ -\varepsilon_m^{(i-1)} & \text{if } j = m \\ \varepsilon_j^{(i-1)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく．ただし，$T^{(i-1)}(k,2) = a$, or$\overline{a}$

(VI) の場合は，

$$T^{(i)} = A(T^{(i-1)})$$

とおき，$\varepsilon^{(i)}$ を次のように場合に分けて定める．

(VI-1) $T^{(i-1)}$ の穴が 1 列目にないときは，$\varepsilon^{(i)} = \varepsilon^{(i-1)}$ とおく．

(VI-2) $T^{(i-1)}(k,1)$ と $T^{(i)}(k,2)$ が穴であるときは，$T^{(i-1)}(k,2) = T^{(i)}(k,1) = a$, or $\overline{a}$ とし，

$$\varepsilon_j^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 0 \\ \varepsilon_j^{(i-1)} & \text{if } j \neq 0, a \end{cases}$$

とする．残りの符号 $\varepsilon_a^{(i)}$ は，次の 2 つの場合を除いて，$T^{(i)}$ と両立することから一意的に定まる．

(1) $T^{(i-1)}(k-1,1) = k$, $T^{(i-1)}(k,2) = \overline{k}$

(2) $T^{(i-1)}(k,2) = k+1$, $T^{(i-1)}(k+1,1) = \overline{k+1}$

この 2 つの場合には，それぞれ，

(1) $\varepsilon_k^{(i)} = \varepsilon_k^{(i-1)} \cdot \varepsilon_0^{(i-1)}$

(2) $\varepsilon_{k+1}^{(i)} = \varepsilon_{k+1}^{(i-1)} \cdot \varepsilon_0^{(i-1)}$

と定める．

(VI-3) $T^{(i-1)}(k,1)$ と $T^{(i)}(k+1,1)$ が穴であるときは，次の場合を除いて，$\varepsilon^{(i)} = \varepsilon^{(i-1)}$ とおく．

$$T^{(i-1)}(k-1,1) = k+1, \quad T^{(i-1)}(k+1,1) = \overline{k+1}$$
$$\varepsilon_0^{(i-1)} = 1, \quad \varepsilon_{k+1}^{(i-1)} = -1$$

この除いた場合には，

$$\varepsilon_j^{(i)} = \begin{cases} -1 & \text{if } j = 0 \\ 1 & \text{if } j = k+1 \\ \varepsilon_j^{(i-1)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定める．

以上で，$SO(2n,\mathbb{C})$ に対する insertion algorithm と写像 $I(\lambda_{D(n)})$, $I(\lambda_{D(n)}^{\pm})$ の定義が終わった．

例をいくつかあげる．

<u>例 1</u>. $\lambda = (2,2,1)$, $n \geq 3$ とし,

$$T = \begin{array}{cc} \overline{1} & 2 \\ 3 & 3 \\ \overline{3} & \end{array}, \quad \varepsilon = (-1, 1, \varepsilon_3), \quad \gamma = 1$$

を考える.(ここでは, 符号 $\varepsilon_4 = \cdots = \varepsilon_n = 1$ を省いている.) このとき, 上のアルゴリズムによってできる列は, 次のようになる.

$$X^{(0)} = \left( \begin{array}{cc} \overline{1} & 2 \\ 3 & 3 \\ \overline{3} & \end{array}, \quad (-1, 1, \varepsilon_3), \quad 1, \quad 1 \right) \qquad \text{(II-2)}$$

$$X^{(1)} = \left( \begin{array}{cc} \square & 2 \\ 3 & 3 \\ \overline{3} & \end{array}, \quad (-1; 1, 1, \varepsilon_3) \right) \qquad \text{(V)}$$

$$X^{(2)} = \left( \begin{array}{cc} 2 & \square \\ 3 & 3 \\ \overline{3} & \end{array}, \quad (1; 1, 1, -\varepsilon_3) \right) \qquad \text{(VI)}$$

$$X^{(3)} = \left( \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 3 & \square \\ \overline{3} & \end{array}, \quad (1; 1, 1, -\varepsilon_3) \right)$$

よって, $\chi = \lambda_{D(n)}$ または $\lambda^{\pm}_{D(n)}$ のとき,

$$I(\chi)(T, \varepsilon, \gamma) = \left( \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 3 & \\ \overline{3} & \end{array}, \quad (1, 1, -\varepsilon_3) \right)$$

<u>例 2</u>. $\lambda, n, T, \varepsilon$ は，例 1 と同じものとする．今度は，$\gamma = \bar{1}$ にとる．すると，

$$X^{(0)} = \left( \begin{array}{cc} \bar{1} & 2 \\ 3 & 3 \\ \bar{3} & \end{array}, \quad (-1,1,\varepsilon_3), \quad \bar{1}, \quad 1 \right) \qquad \text{(I)}$$

$$X^{(1)} = \left( \begin{array}{cc} \bar{1} & \bar{1} \\ 3 & 3 \\ \bar{3} & \end{array}, \quad (-1,1,\varepsilon_3), \quad 2, \quad 2 \right) \qquad \text{(I)}$$

$$X^{(2)} = \left( \begin{array}{cc} \bar{1} & \bar{1} \\ 2 & 3 \\ \bar{3} & \end{array}, \quad (-1,1,\varepsilon_3), \quad 3, \quad 3 \right) \qquad \text{(II-2)}$$

$$X^{(3)} = \left( \begin{array}{cc} \bar{1} & \bar{1} \\ 2 & 3 \\ \square & \end{array}, \quad (\varepsilon_3; -1,1,1) \right)$$

$n = 3$ ならば，

$$I(\lambda^{\pm}_{D(3)})(T,\varepsilon,\gamma) = \left( \begin{array}{cc} \bar{1} & \bar{1} \\ 2 & 3 \end{array}, \quad (-1,1,1) \right)$$

となり，$n \geq 4$ ならば，(V) にしたがって

$$I(\chi)(T,\varepsilon,\gamma) = \begin{cases} \left( \begin{array}{cc} \bar{1} & \bar{1} \\ 2 & 3 \end{array}, \quad (-1,1,1,1) \right) & \text{if } \varepsilon_3 = 1 \\[2em] \left( \begin{array}{cc} \bar{1} & \bar{1} \\ 2 & 3 \\ 4 & \\ \bar{4} & \end{array}, \quad (-1,1,1,-1) \right) & \text{if } \varepsilon_3 = -1 \end{cases}$$

<u>例 3.</u> $\lambda = (2,2,2)$, $n \geq 3$ とし，

$$T = \begin{array}{cc} \bar{1} & \bar{2} \\ 3 & 3 \\ \bar{3} & \bar{3} \end{array}, \quad \varepsilon = (-1, 1, \varepsilon_3), \quad \gamma = \bar{1}$$

を考える．すると，

$$X^{(0)} = \left( \begin{array}{cc} \bar{1} & \bar{2} \\ 3 & 3 \\ \bar{3} & \bar{3} \end{array}, \quad (-1, 1, \varepsilon_3), \quad \bar{1}, \quad 1 \right) \qquad \text{(I)}$$

$$X^{(1)} = \left( \begin{array}{cc} \bar{1} & \bar{1} \\ 3 & 3 \\ \bar{3} & \bar{3} \end{array}, \quad (-1, 1, \varepsilon_3), \quad \bar{2}, \quad 2 \right) \qquad \text{(I)}$$

$$X^{(2)} = \left( \begin{array}{cc} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{2} & 3 \\ \bar{3} & \bar{3} \end{array}, \quad (-1, -1, \varepsilon_3), \quad 3, \quad 3 \right) \qquad \text{(II)}$$

$\varepsilon_3 = 1$ ならば，(II-2) により，

$$X^{(3)} = \left( \begin{array}{cc} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{2} & 3 \\ \square & \bar{3} \end{array}, \quad (-1; -1, -1, 1) \right)$$

$$X^{(4)} = \left( \begin{array}{cc} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{2} & 3 \\ \bar{3} & \square \end{array}, \quad (1; -1, -1, -1) \right)$$

となるから，

$$I(\chi)(T, \varepsilon, \gamma) = \left( \begin{array}{cc} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{2} & 3 \\ \bar{3} & \end{array}, \quad (-1, -1, -1) \right)$$

$\varepsilon_3 = -1$ ならば，(II-1) により，

$$X^{(3)} = \left(\begin{array}{cc} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{2} & \square \\ 3 & \overline{3} \end{array},\quad (1;-1,-1,1)\right)$$

$$X^{(4)} = \left(\begin{array}{cc} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{3} \\ 3 & \square \end{array},\quad (1;-1,-1,1)\right)$$

となるから，

$$I(\chi)(T,\varepsilon,\gamma) = \left(\begin{array}{cc} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{3} \\ 3 & \end{array},\quad (-1,-1,1)\right)$$

最後に，$SO(2n,\mathbb{C})$ の自然表現 $W = \mathbb{C}^{2n}$ のテンソル積表現の既約分解について述べる．そのために，$SO(2n,\mathbb{C})$ の既約指標 $\chi$ に対して，集合 $S(\chi)$ を次のように定める．(定理 3.1 の右辺を参照)

(1) $\chi = \lambda_{D(n)}$ $(l(\lambda) \leq n-2)$ のとき，

$$S(\lambda_{D(n)}) = \{\mu_{D(n)} : \mu \triangleright \lambda\} \cup \{\mu_{D(n)} : \mu \triangleleft \lambda\}$$

(2) $\chi = \lambda_{D(n)}$ $(l(\lambda) = n-1)$ のとき，

$$\begin{aligned} S(\lambda_{D(n)}) = \{\mu_{D(n)} : \mu \triangleright \lambda, l(\mu) = n-1\} \cup \{\mu_{D(n)} : \mu \triangleleft \lambda\} \\ \cup \{\nu^+_{D(n)}, \nu^-_{D(n)} : \nu = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 1)\} \end{aligned}$$

(3) $\chi = \lambda^{\pm}_{D(n)}$ $(l(\lambda) = n)$ かつ $\lambda_n = 1$ のとき，

$$S(\lambda^{\pm}_{D(n)}) = \{\mu^{\pm}_{D(n)} : \mu \triangleright \lambda\} \cup \{\mu^{\pm}_{D(n)} : \mu \triangleleft \lambda, l(\mu) = n\} \cup \{\nu_{D(n)} : \nu = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})\}$$

(4) $\chi = \lambda^{\pm}_{D(n)}$ $(l(\lambda) = n)$ かつ $\lambda_n \geq 2$ のとき，

$$S(\lambda^{\pm}_{D(n)}) = \{\mu^{\pm}_{D(n)} : \mu \triangleright \lambda\} \cup \{\mu^{\pm}_{D(n)} : \mu \triangleleft \lambda\} \quad \text{(複号同順)}$$

<u>定義</u>. $SO(2n,\mathbb{C})$ の既約指標 $\chi$ と 非負整数 $k$ に対して，次の条件を満たす $SO(2n,\mathbb{C})$ の既約指標 $\chi_i$ の列 $(\chi_0,\chi_1,\ldots,\chi_k)$ 全体の集合を $\mathcal{M}^k(\chi)$ とする．

(1) $\chi_0 = \emptyset_{D(n)}$ (trivial character).

(2) $\chi_k = \chi$.

(3) $\chi_i \in S(\chi_{i-1})$ $(1 \le i \le k)$.

$|\lambda| \equiv k \pmod 2$ かつ $|\lambda| \le k$ でなければ，$\mathcal{M}^k(\lambda_{D(n)})$ や $\mathcal{M}^k(\lambda^{\pm}_{D(n)})$ は空集合である．

$GL(n,\mathbb{C})$ の場合と同様に，全単射 $I(\chi)$ を繰り返し用いることによって，$W^{\otimes 2n}$ の既約分解を示す全単射が得られる．$w = \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_k \in {\Gamma_n}^k$ に対して，$(P_i,Q_i) \in \coprod_\chi \mathrm{Tab}(\chi)\times\mathcal{M}^i(\chi)$ を帰納的に定義する．まず，$(P_0,Q_0) = (\emptyset,\emptyset_{D(n)})$（$\emptyset$ は $\mathrm{Tab}(\emptyset_{D(n)})$ のただ 1 つの元である.）とおく．$P_{i-1} \in \mathrm{Tab}(\chi_{i-1})$, $Q_{i-1} = (\chi_0,\ldots,\chi_{i-1})$ のとき，

$$P_i = I(\chi_{i-1})(P_{i-1},\gamma_i)$$
$$Q_i = (\chi_0,\ldots,\chi_{i-1},\chi_i)$$

（ここで，$Q_i \in \mathrm{Tab}(\chi_i)$）とおく．そして，

$$P(w) = P_k, \quad Q(w) = Q_k$$

と定義する．

<u>定理 3.3</u>. 次の写像は，weight を保つ全単射である．

$$\begin{array}{ccccc} {\Gamma_n}^k & \longrightarrow & \coprod_\chi \mathrm{Tab}(\chi) & \times & \mathcal{M}^k(\chi) \\ w & \longmapsto & (P(w) & , & Q(w)) \end{array}$$

<u>系 3.4</u>.

$$(x_1 + x_1^{-1} + \cdots + x_n + x_n^{-1})^k = \sum_\chi \#\mathcal{M}^k(\chi)\cdot\chi$$

ここで，$\chi$ は $SO(2n,\mathbb{C})$ の既約表現全体を走る．

## References

[RIMS] "量子群と Robinson-Schensted 対応," 数理解析研究所講究録 705.

[B] A. Berele, *A Schensted-type correspondence for the symplectic group*, J. Combin. Theory Ser. A **43** (1986), 320–328.

[DJM] E.Date, M.Jimbo and T.Miwa, *Representations of* $U_q(\mathfrak{gl}(n,\mathbf{C})$ *at* $q=0$ *and the Robinson-Schensted correspondence*, in "Physics and Mathematics and Strings" (to appear).

[O] S. Okada, *A Robinson-Schensted-type algorithm for* $SO(2n,\mathbf{C})$, preprint.

[P] R. A. Proctor, *A Schensted algorithm which models tensor representations of the orthogonal group*, Canad. J. Math. **42** (1990), 28–49.

[R] G. de B. Robinson, *On the representations of the symmetric group*, Amer. J. Math. **60** (1938), 745–760.

[Sch] C. Schensted, *Longest increasing and decreasing subsequences*, Canad. J. Math. **13** (1961), 179–191.

[Su] S. Sundaram, *Orthogonal tableaux and an insertion algorithm for* $SO(2n+1)$, J. Comin. Theory Ser. A **53** (1990), 239-256.

[T] I.Terada, *A Robinson-Schensted type correspondence for a dual pair on spinors*, (to appear).