

Amalgam, Graph, Subgroup Lattice

東大教養 五味健作 (Gomi Kensaku)

東大理 田中康彦 (Tanaka Yasuhiko)

有限単純群論における revisionism の目標は、むっかしく、かつ長い単純群の分類証明を解りやすく書き直すことである。ただし、書き直すといっても、今ある証明の整理、統合をするというだけなら、面白くもないし、価値も乏しい。極端な言い方をすれば、時間さえかければ誰にでもできることである。したがって私達の目標(夢)は全く新しい方法、考え方を見出すことである。

単純群の分類の結論は良く知られているように「単純群は交代群、Lie型の群、散在群のいずれかに同形である」という、明解な、極く当り前のものである。しかし、その証明をちょっとでものぞいて見ると、当り前でないことが目につく。たとえば、2という素数は有限群論全体において非常に特殊性を持っていて、そのことを反映して、分類証明もいわゆる標数2型の群の分類と、そうでない群の分類に分けられる。標数2型の定義は以下の話では特に必要ではないが、一応述

べておく。有限群 G が標数 2 型であるというのは、 G のすべての 2 局所部分群 L が $C_L(O_2(L)) \subseteq O_2(L)$ という条件をみたすことをいう。2 局所部分群というのは、自明でない 2 部分群の正規化群を指す。たとえば、標数 2 の Lie 型の群は標数 2 型の群である。逆に、標数 2 型の単純群の分類の結論は「標数 2 型ならば標数 2 の Lie 型の群である」というものである。ただし例外が少しある。

この標数 2 型の群の分類の最終局面において、持ち上げ (pushing up) なる考え方が浮上して来た。この考え方は非常に有効なので、分類の始めの段階からこれを使って分類証明を書き直すことが提唱され、持ち上げとその応用の研究が開始された。

持ち上げでは次のような状況を問題とする：群 G の有限部分群 X_1, X_2, \dots, X_n ($n \geq 2$) が共通の部分群 S を持ち、 $\bigcap S^{X_i} \neq 1$, $\bigcap S^{\langle X_1, X_2, \dots, X_n \rangle} = 1$ 。ただし一般に、 X, S が群 G の部分群のとき、 $\bigcap S^X$ は S の X 共役すべての共通部分を表す。上のような状況のときに X_i, S の構造を決定せよというのが持ち上げの基本問題である。

ただし、これは一番一般的な形で述べたものであって、実際には必要に応じて X_i, S にいろいろの条件を仮定してこの問題を考えることになる。現在のところ、私達が一番重要だ

と考えているのは、次の三条件がみたされている場合である。

$$(1) \quad S \in \text{Syl}_2(X_i)$$

$$(2) \quad X_i \text{ は } S \text{ 既約 i.e. } X_i \neq \langle Y \mid S \subseteq Y \subseteq X_i \rangle$$

$$(3) \quad C_{X_i}(O_2(X_i)) \subseteq O_2(X_i)$$

この場合、 (X_1, \dots, X_n, S) を放物系、 n をその階数と呼ぶことにする。

この概念が重要である理由は、まず第一に、標数2、階数 n の Lie 型の群においては、BN対から n 階の放物系が作られるということ、第二には、標数2型の群においては、ある n に対して階数 n の放物系が存在することである。ただし、第二の点については例外があるが、この例外を処理する良い理論が存在している。したがって放物系の構造を研究し、それを利用して標数2型の群を分類することが、私達には一番自然な考え方に思える。

ところで、標数2の Lie 型の群にはBN対があり、そのBN対には階数がある。この階数に相当する概念が一般の標数2型の群 G に対して、次のように定義される：

$m_p(X) =$ 群 X の p 階数 i.e. X の基本可換 p 部分群の階数の最大値、

$$e(G) = \max \{ m_p(L) \mid L \text{ は } 2 \text{ 局所部分群, } p \text{ は奇素数} \}$$

G が標数2のLie型の群の場合には、 $e(G)$ は G のBN対の階数の近似値を与える。

標数2型の群 G の分類は $e(G) \leq 2$ の場合と $e(G) \geq 3$ の場合とに分かれる。このように場合分けしなければならない理由は次のように解釈することができる。前に述べたように分類の目標は G が標数2のLie型の群 G^* に同型であることを示すことである。そのためには、 G の中に G^* と同様のBN対を構成しなくてはならない。ところがBN対についてのJ. Tits達の仕事を見ればわかるように、BN対はその階数が2以下の場合と3以上の場合とでは、扱い方を全く変える必要がある。 $e(G) \geq 3$ と $e(G) \leq 2$ とに分けなくてはならないのは、このような事情を反映したものと解釈できる。もっとも実際には signalizer に関する技術的理由が大きいのであろう。いずれにしても、この場合分けは自然なものに思われる。

現在のところ、私達は $e(G) \leq 2$ の場合を更に次の二つの場合に分けている：

- (1) 2局所部分群はすべて可解。
- (2) そうでない。

このような場合分けは、実例を観察して見ると、自然なものとは思われないが、現状では技術的な理由で止むを得ない。

最近 (1) の場合の分類が持ち上げの考え方により出来るようになった (愛教大の林誠氏との共同研究). このことについて、やや詳しく述べる. まず、うまく処理できる例外を除いて、 G の中に階数 2 の放物系 (X_1, X_2, S) で $S \in \text{Syl}_2(G)$ なるものが存在する. $e(G)$ と放物系の階数との関係については、一般には何もわからないが、(1) の場合には両者は等しい. もしも X_1, X_2, S の構造が決まれば、単純群の 2-Sylow 群による特徴づけ等を使って G を決定することができる. すなわち、 X_1, X_2, S についての持ち上げ問題を解けば良いことになる. しかしこの問題はむつかしいので次のような方法を用いた. G の中の放物系達の間にある順序 \leq を定義し、この順序に関し $(Y_1, Y_2, T) \leq (X_1, X_2, S)$ かつ (Y_1, Y_2, T) は極小なるものを考える. このとき、 (Y_1, Y_2, T) が決まれば (X_1, X_2, S) も決まる. したがって (Y_1, Y_2, T) に対して持ち上げを考えれば良いことになる. そして実際、極小性を用いてこの問題を解くことが出来て、所期の目標を達成することができた.

この種の持ち上げ問題を扱うための一般論は Goldschmidt により得られた. 持ち上げ問題において $n=2$ とすれば次のようになる: 群 G の有限部分群 X, Y が共通の部分群 S を持ち、

$$\textcircled{1} \quad \cap S^X \neq 1 \neq \cap S^Y$$

$$\textcircled{2} \quad \cap S^{\langle X, Y \rangle} = 1.$$

我々の目標は X, Y, S の構造の決定なので G を $\langle X, Y \rangle$ で置きかえることにより

$$\textcircled{3} \quad G = \langle X, Y \rangle$$

と仮定して良い。さらに X, Y の S 上の amalgam F の中に G を埋め込み、 G を F で置きかえることにより

$$\textcircled{4} \quad X \cap Y = S, \quad G \text{ は } X, Y \text{ の } S \text{ 上の amalgam.}$$

と仮定して良い。

$\textcircled{1} \sim \textcircled{4}$ のもとで X, Y の coset graph Γ を作る。 $V(\Gamma)$ は X あるいは Y の左剰余類から成り、 $E(\Gamma)$ は $\alpha \cap \beta \neq \phi$ なる点 α, β の組から成る。直ちに次のことがわかる。

$\textcircled{5}$ Γ は bipartite graph で、 $\{X_x, Y_y\} \in E(\Gamma)$ なるためには $X_x = X_z, Y_y = Y_z$ なる $z \in G$ が存在することが必要かつ十分。

これから次のことがわかる。

$\textcircled{6}$ Γ は連結 tree.

$\textcircled{7}$ G は Γ 上に忠実、边上可移作用する。しかし点上には可移ではない。

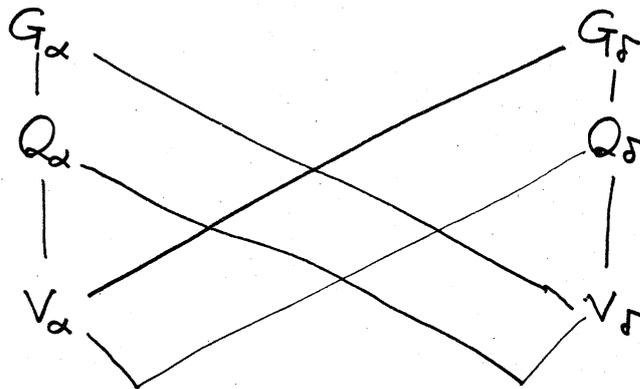
このように amalgam を用いて持ち上げ問題を graph のことに翻訳することができる。 Goldschmidt が扱った場

合には $|X:S| = |Y:S| = 3$ となっていた. この場合には Γ は connected, trivalent tree になり, $\text{Aut } \Gamma$ の辺可移だけれども点可移でない部分群 G を考察することになる. 逆に, connected, trivalent tree Γ の辺可移だけれども点可移でない部分群から持ち上げ問題を再現することができる. したがって, Goldschmidt が取り上げた状況では, 持ち上げ問題は graph のことに完全に翻訳される. しかし我々の扱ったような, より一般的情况では graph への翻訳の過程で群論的信息が失われて, 完全な翻訳ではなくなる. そのような状況では graph は脇役となり, かわりに G の subgroup lattice が主役となる.

$\alpha \in V(\Gamma)$ に対して次のように記号を定める.

$$Q_\alpha := \bigcap_{\beta \sim \alpha} G_{\alpha\beta}, \quad V_\alpha := \langle \Omega_1(Z(G_{\alpha\beta})) \mid \beta \sim \alpha \rangle$$

そして次のような絵を考える: $\alpha \in V(\Gamma)$, $\delta \in V(\Gamma)$, $d(\alpha, \delta)$ は偶数, $V_\alpha \subseteq G_\delta$, $V_\alpha \not\subseteq Q_\delta$, $V_\delta \subseteq G_\alpha$, $V_\delta \not\subseteq Z(G_\alpha)$.



G_α が 2 既約であることから $Q_\alpha \in \text{Syl}_2(C_{G_\alpha}(V_\alpha))$ がわかり、同様に $Q_\delta \in \text{Syl}_2(C_{G_\delta}(V_\delta))$. したがって $[V_\alpha, V_\delta] \neq 1$, 故に $V_\delta \not\subseteq Q_\alpha$ となる. すなわち条件は α, δ につき全く対称になる. そこで $|V_\alpha : V_\alpha \cap Q_\delta| \leq |V_\delta : V_\delta \cap Q_\alpha|$ と仮定すると $|V_\alpha : C_{V_\alpha}(V_\delta)| \leq |V_\delta : C_{V_\delta}(V_\alpha)|$ となる. すなわち、 $\bar{G}_\alpha = G_\alpha / C_{G_\alpha}(V_\alpha)$ を V_α に忠実に作用させれば $|V_\alpha : C_{V_\alpha}(\bar{V}_\delta)| \leq |\bar{V}_\delta|$ となる. これは非常に特殊な状況であることが知られている. 実際、 \bar{G}_α の正規部分群 \bar{N}_α で $\bar{N}_\alpha \cong \text{GL}_2(2)$ 又は $\text{GL}_2(2) \times \text{GL}_2(2)$ なるものがあり、 V_α は \bar{N}_α の自然な表現を与える. これが G_α の構造を決めるための大きな手がかりとなる. もっと複雑ではあるが、本質的にはこれと同様な考え方を押し進めることにより我々の持ち上げ問題が解決された.

今までの有限単純群論はその大きな部分を J. Thompson が N-group paper の中で発明した数々の方法に負っている. 上記の私達の得た結果は N-group paper の大きな部分を異なる (そしてたぶん解りやすい) 方法で処理できることを示している. この新しい方法がより広い範囲に使えるかどうかは、まだわからない. 使えない可能性ももちろんあるが、それはこれから試してみないとわからないことである.

N-group paper を理解しようとして、あまりの複雑さと長

さに断念した経験は多くの人がお持ちだろう。かくいう私もその一人で、私にとって Thompson は天の上の人であった。しかし、N-group paper のたとえ一部ではあっても、こうして別証明ができてみると、それ程手の届かぬ人ではないのかも知れない、雲の上ぐらゝまでは降りて来てくれたような気もする。いずれにしても、N-group paper のような難物を理解しようと苦勞するよりは、自前の証明を考える方が楽しい生産的だから、もっと多くの人々が挑戦してみしてほしい。こういうことに私の目を開かせてくれたのは林誠氏であり、この場を借りて心から氏にお礼を申し上げます。(文責 五味)