数理解析研究所講究録
739巻 1991年 137-147

乱流散逸のフラクタル構造

電通大　細川　巌
航技研　山本　稀義

1．概　略

最近行った，等方性乱流の数値シミュレーション[1]のデータを利用して fully-developed state ($t = 10$, $R_\lambda \sim 100$) での dissipation cascade を調べ，他の研究と比較する。dissipation cascade を性格ずけるものとして，intermittency exponents, generalized dimensions, f-α spectrum を計算する。これらの量については，すでに Meneveau & Sreenivasan によって実験結果[2]および理論[3]が提出されているので，これらに対比する数値結果が出されることは，大いに興味があろう。著者の知るかぎり，この試みはまだ例を見ない。

2．intermittency exponents と generalized dimensions

Hentschel & Procaccia[4]によれば，dissipation cascade の generalized dimensions D_qは，

$$\Sigma_i{}^N E_{r(i)}{}^q / E_L{}^q = (r/L)^{(q-1)D_q} \qquad (r/L \ll 1) \qquad (1)$$

によって計算される。$E_{r(i)}$はｉ番目の scale r の subbox の中のdissipation を示す。Ｌは macroscale で，ｄ次元空間では$N=L^d/r^d$である。$E_{r(i)}/E_L \equiv p_{r(i)}$はｉ番目の subbox のdissipation measure（散逸確率）であることに注意。従って，D_0，D_1，D_2 はそれぞれdissipation をもつ集合の Hausdorff 次元，情報次元，相関次元である。

われわれの乱流場（$L=4\pi$）から$(\Sigma_i{}^N p_{r(i)}{}^q)^{1/(q-1)}$を計算したものが Fig. 1 である。|q|が大きいと多少のゆれがあるが，ほぼ２decades にわたって線形性が成り立ち，D_qは（少なくとも近似的に）存在すると言える。D_qはグラフの６点を使って最小二乗法により求めた。グラフを比べれば分かるが，対応する Meneveau & Sreenivasan の実験データはゆれがさらに大きく，われわれのデータは相対的に良質である。参考のために，inertial subrange を破線によって示す。

得られたD_qはFig. 2 にプロットされる。実線はMeneveau & Sreenivasanの平均的実験値であり，彼等の提出した p model でもある。点線は

$$D_q = D_{-1.8} - 0.647\ \mathrm{Tan}^{-1} 0.191(q + 1.8) \qquad (2)$$

で，シミュレーションに Fit したものである。いずれにせよ，q = -2 ~ 5 では両結果はそれほど差異はないが，|q| が大きいとかなりの差が出てくる。

intermittency exponents μ_q は

$$\langle \varepsilon_r{}^q \rangle / \varepsilon_L{}^q = (r/L)^{-\mu_q} \qquad (3)$$

で定義される。[5] ここでε_rは scale r の sphere の中の平均dissipatio

n であり，〈 〉はアンサンブル平均である。(1) と関連ずけるために $E_r \sim \varepsilon_r r^d$, $E_L \sim \varepsilon_L L^d$ を考慮すると，

$$-\mu_q = (q-1)(D_q - d) \qquad (4)$$

が得られる。

(3)の変換により，μ_qは Fig. 3(a,b)のようになる。□と×はそれぞれAntonia et al, Anselmet et al の実験値である。Meneveau & Sreenivasan の誤差を含む実験値域は├─┤で示した。○で示したわれわれの数値シミュレーションは，D_qの場合と同様，$|q|$ の大きいところで，それよりかなり外れている。Fig.3(b) でシミュレーションにもっとも近い理論はsquare-root exponential model[6]であることをノートする。

μ_qでもっとも重要なもの，$\mu_2 \equiv \mu$ 及び $\mu_{2/3}$ の値を Fig.3(b) の左上に記した。われわれのシミュレーションは$\mu \fallingdotseq 0.2$ という最近の定説を支持する。$\mu_{2/3}$ は Kolmogorov law の intermittency correction で決定的な役割を果たすが，ＬＮ（lognormal）理論はその面ではわれわれのシミュレーションに近い。図から見て，ＬＮ理論は $|q| < 5$ では相当にいい近似だと考えられる。

図から得られるもう一つの結論は，$|q| \to \infty$ でμ_qは漸近直線をもつということである。

3. f-α spectrum

dissipation cascade process においては（inertial range を念

頭におき）Euler 方程式が 成り立つとしてよいだろう。Euler 方程式は

$$r' = \lambda r$$

$$v' = \lambda^{\alpha/3} v$$

$$t' = \lambda^{1-\alpha/3} t \qquad (4)$$

のスケール変換で不変であり，従って多くの self-similar solutions をもっている。この時，dissipation ε_r と energy e_r について

$$\varepsilon_r \sim r^{\alpha-1} \qquad (5)$$

$$e_r \equiv v_r^2/2 \sim r^{2\alpha/3} \qquad (6)$$

の scale dependence が成り立つ。

$\alpha = 1$ のときは明らかに Kolmogorov law, $\alpha = D - 2$ のときは β model に帰着する。しかし，lognormal model を含めて，一般に α はある領域内にひろがり，いわゆる multifractal sets が出現する。これらの sets の空間次元が $f(\alpha)$ である。D_q curve が Fig. 2 のように分かっていると，$f-\alpha$ の関係は接触変換として次の様に与えられる [2, 3]

$$\alpha = d/dq\,[(q-1)(D_q - d + 1)]$$

$$f(\alpha) = \alpha q - (q-1)(D_q - d + 1) + d - 1 \qquad (7)$$

これをわれわれの数値シミュレーションについて実行したものが Fig. 4 である。実線が p model であり，簡単なカントル集合を使うモデルの性質上 $|q| \to \infty$ で $f = 2$ に集積する。したがってこのモデルは散逸最大（及び最小）の領域が２次元構造をもっていることを示唆する。一方，シミュレーションは $q \geqq 0$ で $f = 2$ まではほぼ完全に p model に一致する。

書いていないが，lognormal model（with μ = 0.2)も同様である。従って，f-α spectrum のこの領域（0.5 < α < 1.2)の挙動は，まず確定的なものと考えてよい。

しかし，シミュレーションはlognormal modelと同様に，f = 2を越えてずっと下に伸びる。lognormal modelは f = -∞ に伸びるが，シミュレーションはα軸のわずか下で集積しそうである。この結果だけで，f < 0 があるかないかをいうことは差し控えたい。しかし，接触変換（7）において f < 0 が拒絶されるべき数学的根拠はないし，物理的条件も見当らない。Frisch et al[7]のβ model のフラクタル次元Dに対する物理的制限は，そのままマルチフラクタルに適用できないのである。この問題を解決するには，さらにR_λの大きい精密な数値シミュレーションが必要である。

4．コメント

Fig. 4 よりαの domain が分かる。(5)より，散逸はα < 1 で singular になり，一方（6)より，エネルギーは常に non-singular である。したがってintermittency は散逸の方が強烈である。エネルギーの空間的変動は滑らかなエネルギースペクトルと対応する。

参考文献

1) K. Yamamoto and I. Hosokawa, J. P. S. J. 57 (1988) 1532; I. Hosokawa and K. Yamamoto, J. P. S. J. 58 (1989) 20.

2) C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, in Physics of Chaos and Systems far from Equilibrium, eds. M-D. Van and B. Nichols (North-Holland, Amsterdam, 1987).

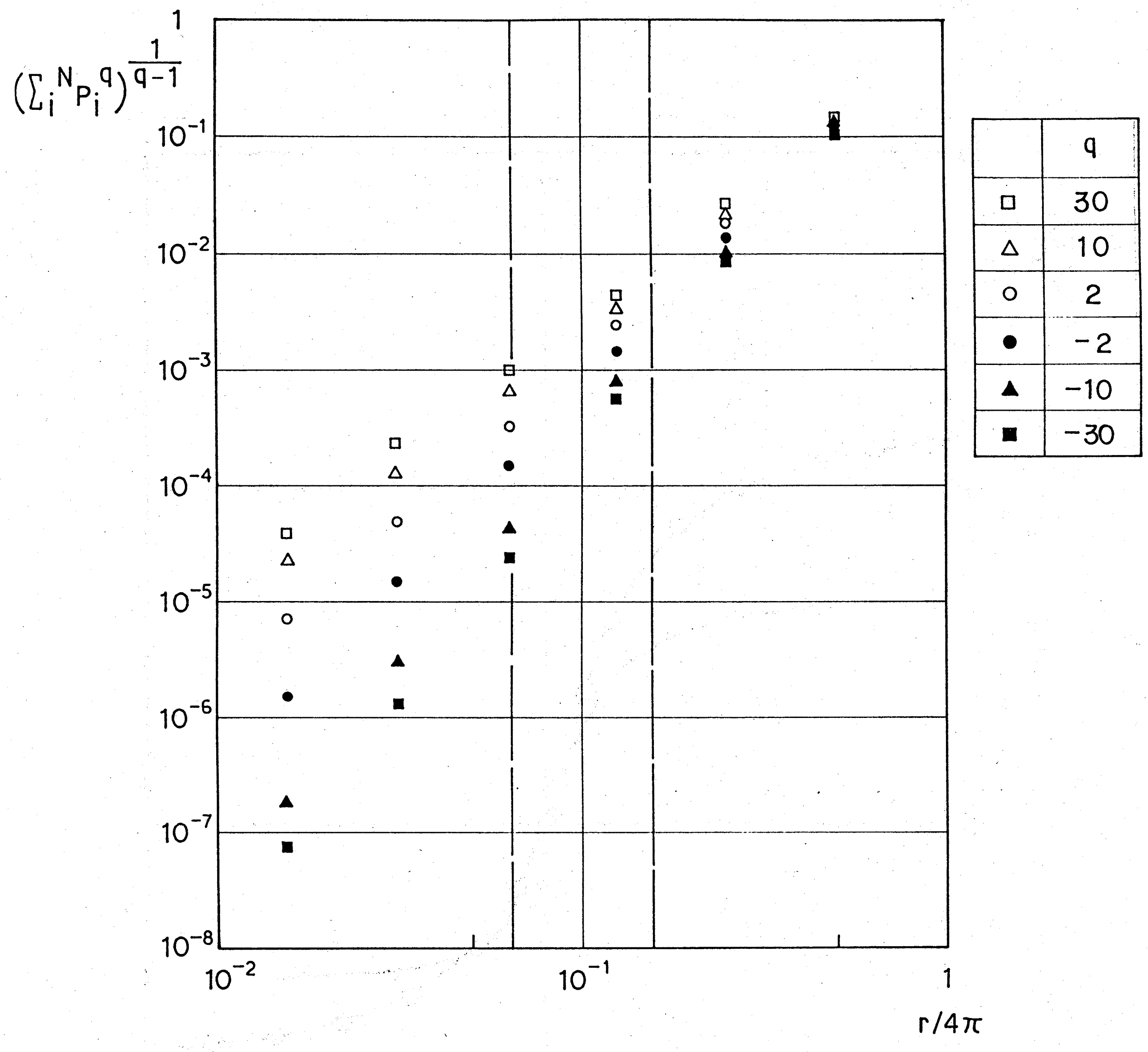
3) C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 1424.

4) H. G. E. Hentschel and I. Procaccia, Physica 8D (1983) 435.

5) A. S. Monin and A. M. Yaglom, Statistical Fluid Mechanics (MIT Press, Massachusetts, 1987), Vol. 2.

6) I. Hosokawa, Phys. Fluids A1 (1989) 186.

7) U. Frisch, P. Sulem, and M. Nelkin, J. Fluid Mech. 87 (1978) 719.



$(\sum_i^N p_i^q)^{\frac{1}{q-1}}$
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-2}
10^{-1}
1
r/4π
q
□ 30
△ 10
○ 2
● −2
▲ −10
■ −30

FIG. 1

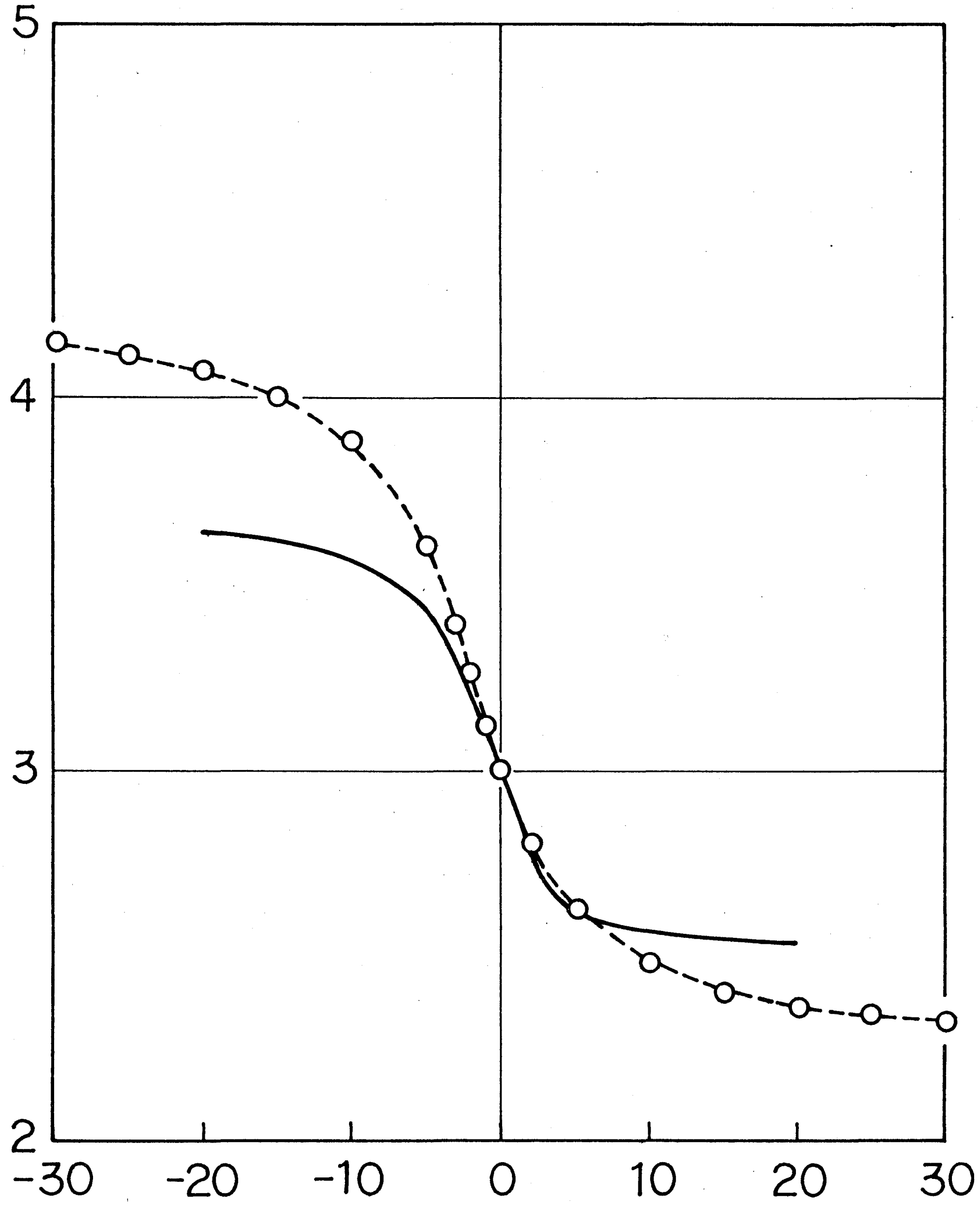


FIG. 2

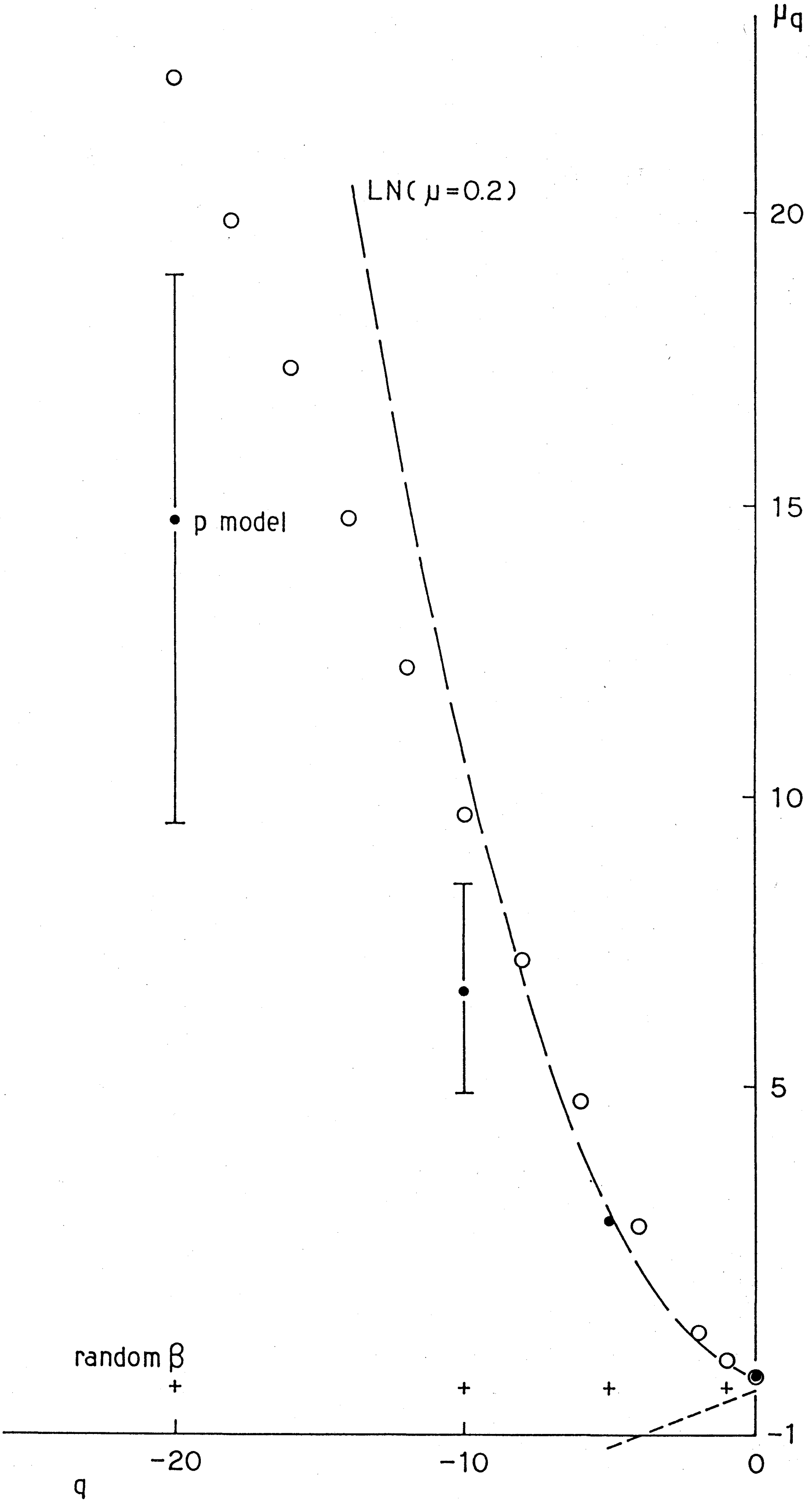


FIG. 3(A)

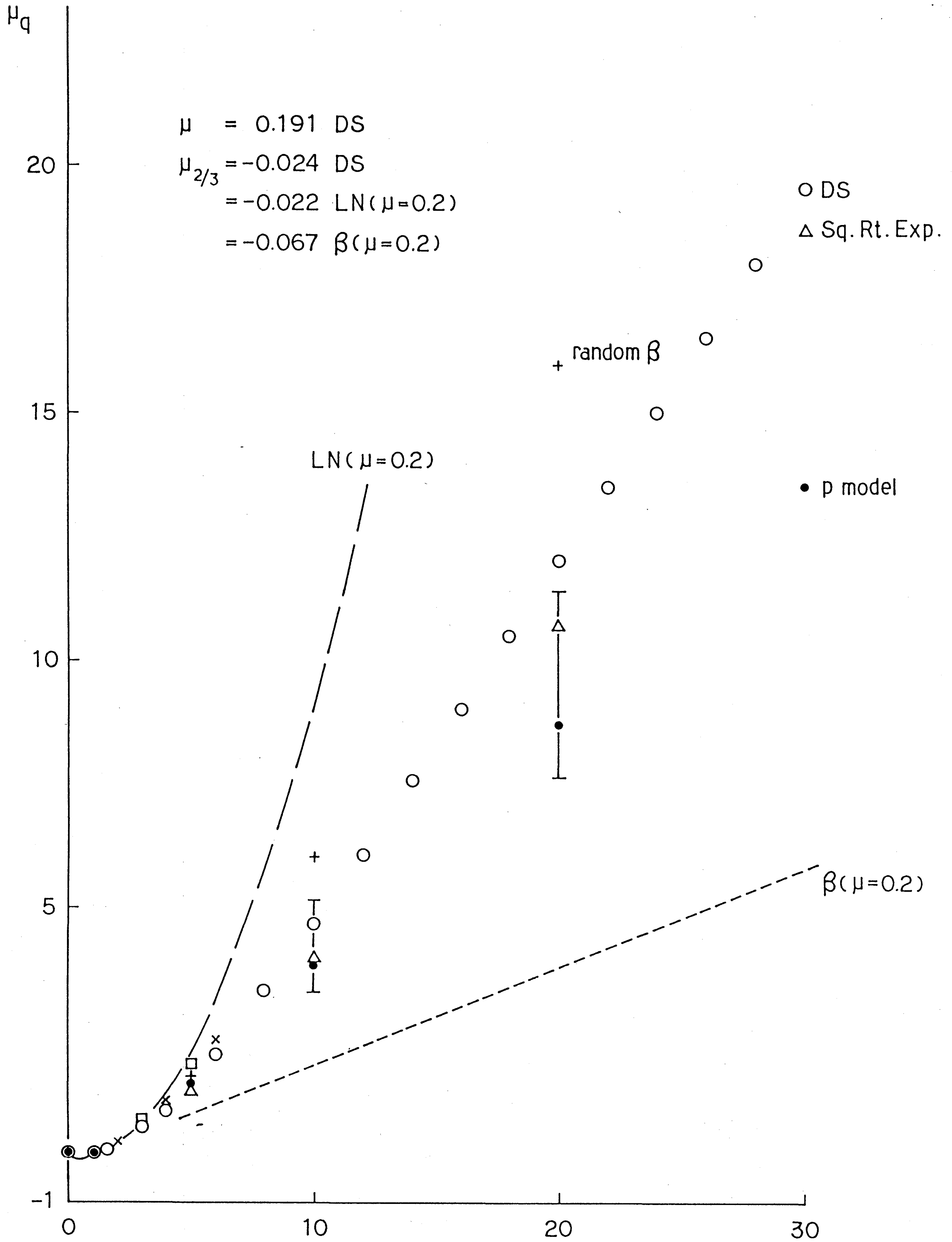

μq
μ = 0.191 DS
μ2/3 = -0.024 DS
= -0.022 LN(μ=0.2)
= -0.067 β(μ=0.2)
○ DS
△ Sq. Rt. Exp.
random β
• p model
LN(μ=0.2)
β(μ=0.2)
20
15
10
5
-1
0
10
20
30
q

FIG. 3(B)

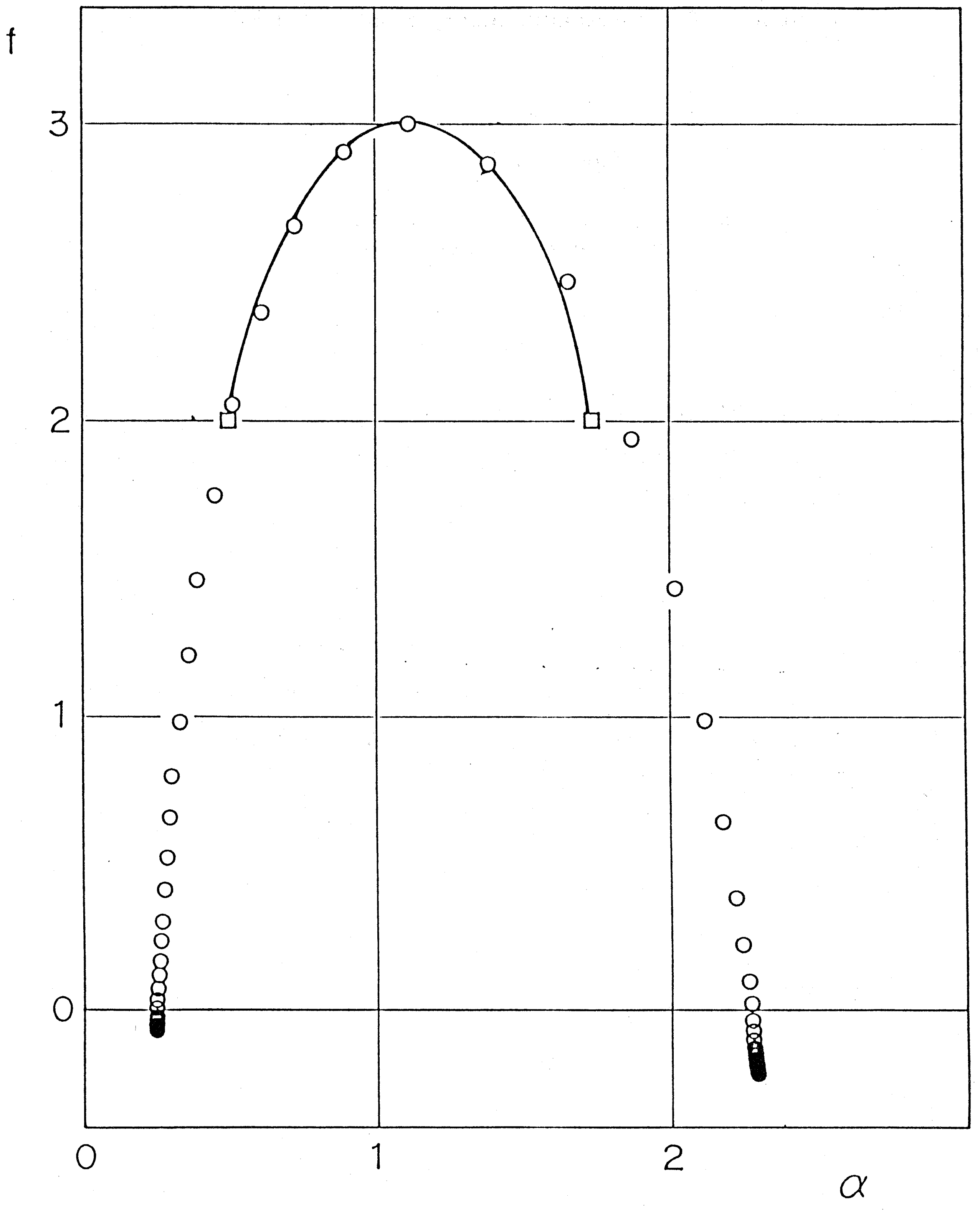


FIG. 4