

長波 - 短波相互作用による再帰現象およびカオス化

阪大基礎工 吉永隆夫 (Takao Yoshinaga)

若宮 護 (Mamoru Wakamiya)

角谷典彦 (Tsunehiko Kakutani)

§ 1. まえがき

分散媒質中で、波長のスケールが極端に異なる長波と短波の2種類の波が共存する場合、長波の位相速度と短波の群速度が近似的に等しい共鳴条件の下で、強い非線形相互作用が起こることはよく知られている。この'長波 - 短波相互作用'は、これまで水波<sup>1-6)</sup>、プラズマ波<sup>7)</sup>や格子<sup>8)</sup>、伝送線路<sup>9, 10)</sup>中の波等において理論、実験的に調べられてきた。

この相互作用を記述する代表的な方程式として、長波と短波の振幅比により2種類の方程式系が知られているが、適当な規格化を行うことにより2つのパラメータ $\alpha$ 、 $\beta$ を含む以下の方程式系にまとめることができる：

$$\left. \begin{aligned} i \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{sgn}(\rho) \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= SL, \\ \frac{\partial L}{\partial t} + \alpha L \frac{\partial L}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 L}{\partial x^3} &= \frac{\partial |S|^2}{\partial x}. \end{aligned} \right\} (1)$$

ここで、 $L$  は長波を表す実数、 $S$  は短波の包絡部の複素振幅を示し、 $t, x$  は短波の群速度 (または共鳴条件により、長波の位相速度) に乗った座標系における時空間変数を示す。また、符号  $\text{sgn}(p)$  は媒質の特性により決定される。パラメター  $\alpha, \beta$  が共に 0 の場合、(1) は長波の振幅が短波の振幅に比べて十分小さい ( $L \ll |S|$ ) 場合を表す (以下では、この方程式系を  $S H$  (Schrödinger-Hyperbolic) 型と呼ぶ) <sup>2-6, 8, 10)</sup>。この場合、解析的に  $N$ -ソリトン解が求まっている <sup>11, 12)</sup> ことから系は可積分であり、解の素性はかなり明かである。一方、 $\alpha, \beta \sim O(1)$  の場合、(1) は長波の振幅が短波のそれと同程度 ( $L \sim |S|$ ) の場合を示す (以下ではこれを  $S K$  (Schrödinger-Korteweg-de Vries) 型と呼ぶ) <sup>1, 4, 6-10)</sup>。この場合、解析的には孤立波解を含む定常進行波解が求まっているに過ぎず <sup>1, 4, 7, 8)</sup>、逆散乱法に対しては可積分でないことが示されている <sup>13)</sup> ことから、解の長時間にわたる振舞いはカオティックになることが予想される。

ところで、長波 - 短波の振幅比の違いに依るこれら 2 種類の方程式系の有効領域に関する最近の実験的研究から <sup>10)</sup>、 $S K$  型が  $S H$  型の場合をも含む広い領域において成り立つことが示されている。従ってパラメター  $\alpha, \beta$  に適当な値を与えることにより、(1) は  $S H$  型から  $S K$  型に至る広い範囲にわ

たる解の発展を記述することができる。

本報告では、緩やかな正弦変調のかかった短波を初期波形としたとき、'制御パラメター'  $\alpha, \beta$  の種々の値に対する解の長時間にわたる発展の数値計算結果について述べる。特に、 $\alpha, \beta$  が 0 に近い 'near integrable region' における解の振舞いに着目し、カオスへの移行の様子を明らかにする。

## § 2 変調不安定性 (線形理論)

(1) は、次の一定振幅平面波解を持つ：

$$S = S_0 \exp[i(kx - \omega t)], \quad L = L_0. \quad (2)$$

ここで、 $S_0$  は複素定数、 $L_0, k, \omega$  は実定数であり、波数  $k$  と角周波数  $\omega$  との間に  $\omega - \text{sgn}(p) k^2 = L_0$  なる関係がある。以下では、 $k = 0, L_0 = 0$  (従って  $\omega = 0$ ) の場合、即ち一定振幅の短波のみが存在する場合の系の変調不安定性を線形理論により調べる：

$$S = 1 + s_+ e^{i\Theta} + s_- e^{-i\Theta^*}, \quad L = l e^{i\Theta} + l^* e^{-i\Theta^*}, \quad (3)$$

を (1) に用い、微小複素定数  $s_{\pm}, l$  に関する線形化の後、 $K, \Omega$  に対する分散関係を得る：

$$\Omega^3 + \beta k^3 \Omega^2 - k^4 \Omega - \beta k^7 + 2 \text{sgn}(p) k^3 = 0. \quad (4)$$

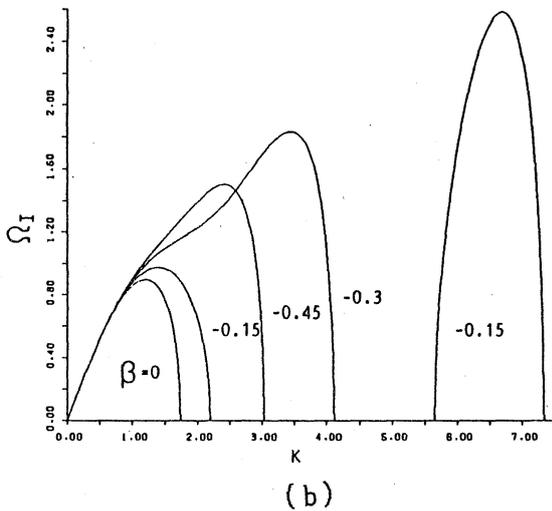
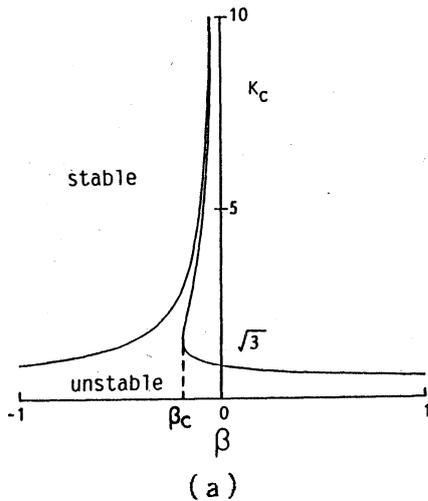


図1. (a)  $\beta$  に対する不安定領域  $K_c$  と  
(b)  $K$  に対する増幅係数  $\Omega_1$  .

但し、 $\Theta \equiv Kx - \Omega t$  において  $K$  は実波数、 $\Omega$  は複素角周波数であり、 $*$  は複素共役を示す。また  $S_0$  は簡単のために 1 となるように規格化した。(4) は  $\Omega$  に関する 3 次式であるので  $\Omega$  は 3 実根を持つ場合 (安定) か、1 実根と

共役複素根を持つ場合 (不安定) の 2 通りに限られる。特に、 $\beta = 0$  の場合、不安定となる  $K$  の領域は簡単に計算できて  $0 < K < K_c = \sqrt{3}$  となる<sup>5)</sup>。図 1 (a) は種々の  $\beta$  に対する不安定領域の境界  $K_c$  を示す。

また図 1 (b) は、 $\beta$  の代表的な値に対する増幅係数  $\Omega_1$  (複素角周波数  $\Omega$  の虚数部分) と  $K$  の関係

を示す (以下では  $\text{sgn}(p)=1$  の場合について考える)。  $\beta (< 0)$  が 0 に近づくにつれて高波数域に強い増幅率を持った '孤立不安定領域' が現れる (この複数の不安定領域は  $0 > \beta > \beta_c \sim -0.2$  の範囲の  $\beta$  に対して存在する)。この孤立不安定領域の最大増幅率  $(\Omega_1)_{\max}$  と対応する波数  $K_s$  及び領域幅  $\Delta$  に関して  $K_s = 1/|\beta|$ ,  $(\Omega_1)_{\max} = 10/\sqrt{|\beta|}$ ,  $\Delta \approx 4.1\sqrt{|\beta|}$ ,

の関係が数値的に得られる。特に、 $\beta \rightarrow 0$  ( $\beta < 0$ ) の極限では孤立不安定領域は無限高波数域に現れ無限小幅で無限強さの増幅率を持つ  $\delta$  関数的な振舞いをする ( $(\Omega_1)_{\max} \times \Delta \approx$  一定に注意)。

### § 3. 数値計算法

周期境界条件の下で空間的に周期的な波の時間発展を考えるので、数値解法としてはフーリエ展開法が有効であろう。そこで、 $S$ 、 $L$  を次のような複素フーリエ級数に展開する：

$$\left. \begin{aligned} S(x,t) &= A_0(t) + \sum_{j=1}^N [A_j(t)e^{ik_j x} + A_{-j}(t)e^{-ik_j x}], \\ L(x,t) &= \sum_{j=1}^N [B_j(t)e^{ik_j x} + B_j^*(t)e^{-ik_j x}]. \end{aligned} \right\} (5)$$

ここで、 $K_j = jK$  であり、打ち切りモード数  $N$  は十分大きく取るものとする。(5) を (1) に用いることにより、 $A_0$ 、 $A_{\pm j}$ 、 $B_j$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ) に関する 1 階 ( $3N+1$ ) 元の連立常微分方程式が得られ、これを以下の初期条件の下で Runge-Kutta-Gill 法を用いて解く：

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 1, \quad A_{\pm 1} = 0.05, \\ A_{\pm j} &= 10^{-(4+|j|)}, \quad (j=2, 3, \dots, N), \\ B_j &= i 10^{-(6+|j|)}, \quad (j=1, 2, \dots, N). \end{aligned} \right\} (6)$$

数値解の精度の目安として、(1) の保存量の内、次の 3 つの量を用いる：

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_0^\lambda L dx, \quad I_2 = \int_0^\lambda |S|^2 dx, \\ I_3 &= \int_0^\lambda \left[ L^2 + i \left( S^* \frac{\partial S}{\partial x} - S \frac{\partial S^*}{\partial x} \right) \right] dx, \end{aligned} \right\} (7)$$

但し、 $\lambda = 2\pi/K$ 。(7)に(5)を用いると、 $I_1$ は常に0となり、 $I_2$ 、 $I_3$ は

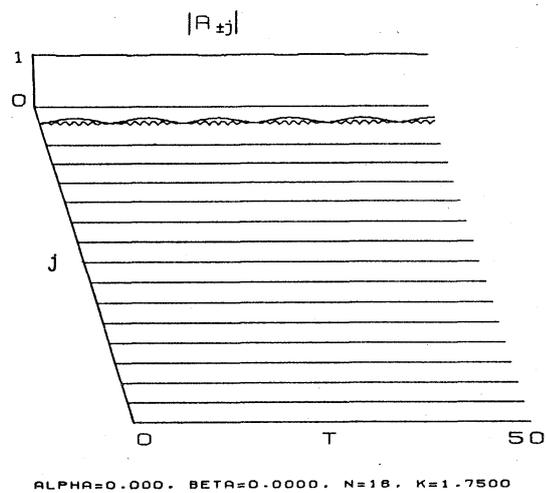
$$\begin{aligned} I_2 &= \lambda \left[ |A_0|^2 + \sum_{j=1}^N (|A_j|^2 + |A_{-j}|^2) \right], \\ I_3 &= 2\lambda \sum_{j=1}^N \left[ |B_j|^2 - jK (|A_j|^2 - |A_{-j}|^2) \right], \end{aligned}$$

で与えられる。数値計算は倍精度で行い、 $I_2$ 、 $I_3$ が常に  $|1 - I_2 / (I_2)_{t=0}|$ 、 $|1 - I_3 / (I_3)_{t=0}| < 10^{-6}$ となるように計算精度を保つ。

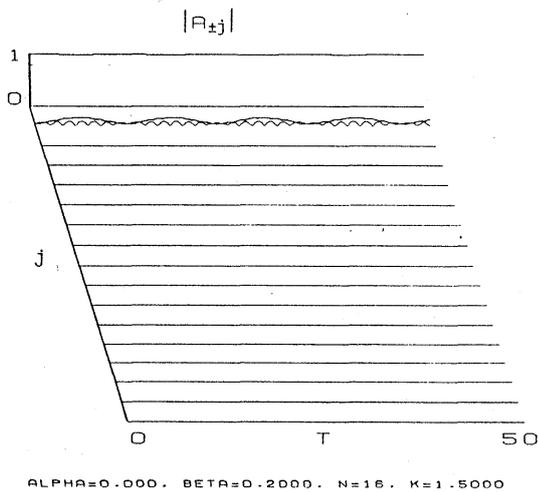
#### § 4. 数値計算結果

パラメター  $\alpha$ 、 $\beta$  及び初期波数  $K$  のいくつかの値に対して、得られた計算結果の代表的な例を以下に示す（計算は展開打ち切りモード  $N=16$  で行った）。図2、図3はそれぞれ  $K$  が安定領域及び不安定領域（図1参照）にある場合の短波の各フーリエモードの時間発展を示している。図2(a) S-H型 ( $\alpha = \beta = 0, K=1.75 > K_c = \sqrt{3}$ ) 及び (b) S-K型 ( $\alpha = 0, \beta = 0.2, K=1.50 > K_c = 1.49$ ) は全モードにわたって安定である。しかし、(c) S-K型 ( $\alpha = 0, \beta = -0.09, K=1.95 > K_c = 1.94$ ) では、 $K$  が安定領域にあるにもかかわらず1次モードが大きく励起される。さらに (d) S-K型 ( $\alpha = 0, \beta = -0.09, K=2.20 > K_c = 1.94$ ) の場合、

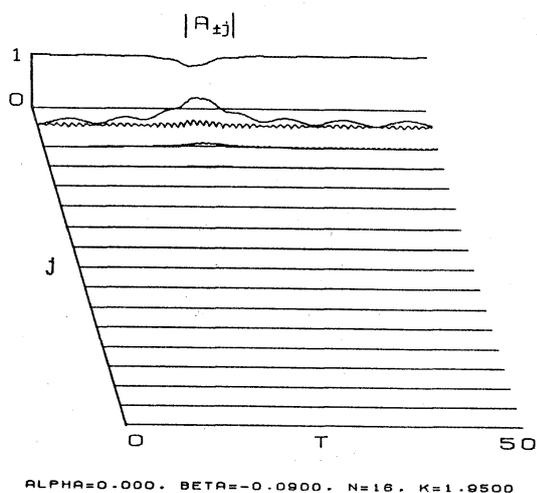
5 K が孤立不安定領域にあるため 5 次モードが強く励起され、



(a)

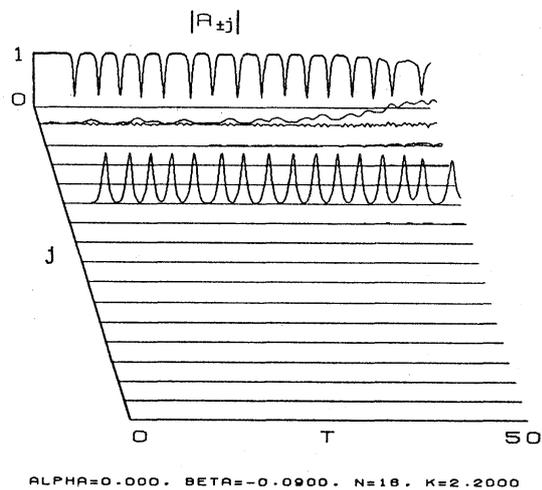


(b)



(c)

0 次モードとの間で周期的なエネルギー交換を行い再帰現象が見られる。しかし安定な 1 次モードが非線形効果により次第に強く励起されてくるため再帰現象は崩れだす。一方、図 3 (a) S H 型 ( $\alpha = \beta = 0, K = 1.26 < K_c = \sqrt{3} < 2 K$ ) では、0 次モードと不安定な 1 次モードの間での周期的なエネルギー交換を伴う再帰現象が見られ、また同時に他の安定モ



(d)

図 2. 安定領域における短波のフーリエ振幅  
 (a) S H 型 ( $\alpha = \beta = 0, K = 1.75 > K_c = \sqrt{3}$ ),  
 (b) S K 型 ( $\alpha = 0, \beta = 0.2, K = 1.50 > K_c = 1.49$ ),  
 (c) S K 型 ( $\alpha = 0, \beta = -0.09, K = 1.95 > K_c = 1.94$ ),  
 (d) S K 型 ( $\alpha = 0, \beta = -0.09, K = 2.20 > K_c = 1.94$ ).

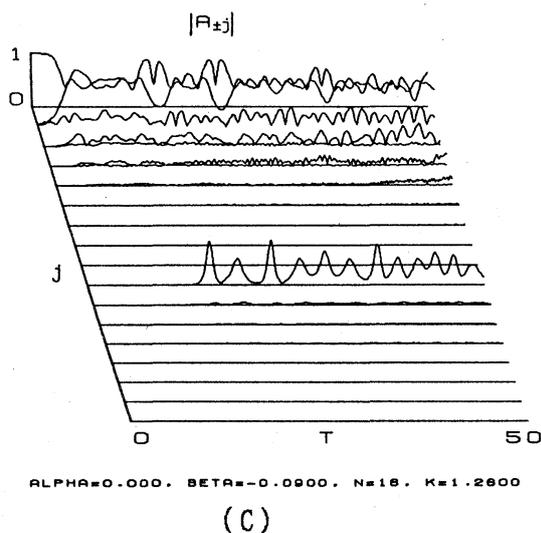
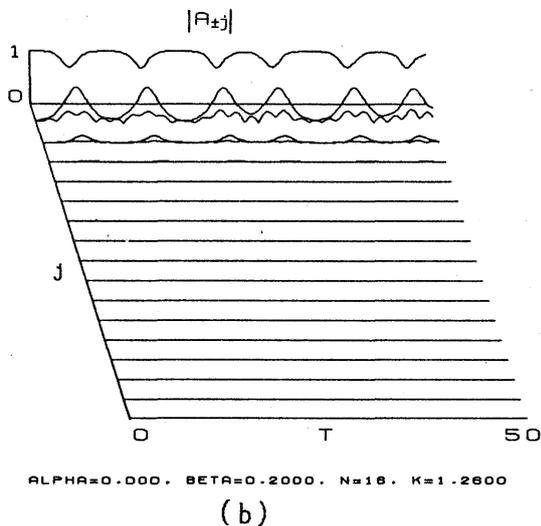
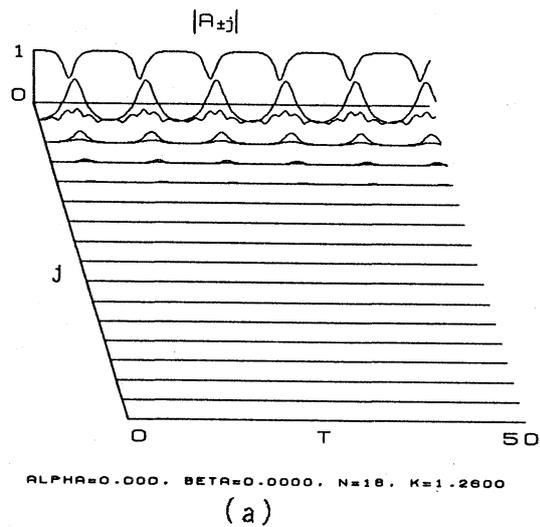
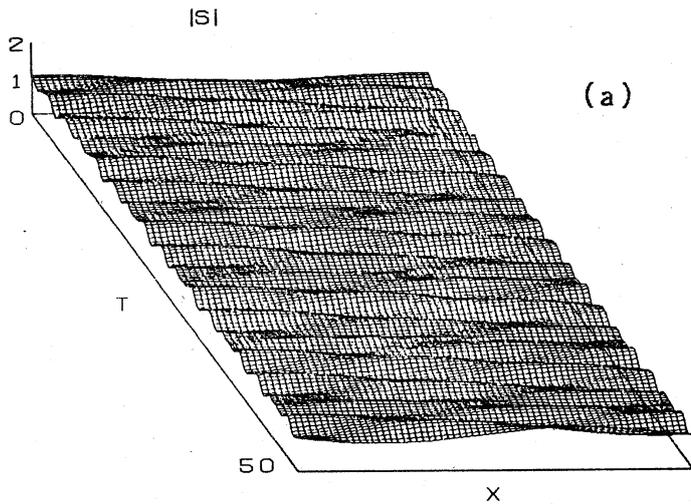


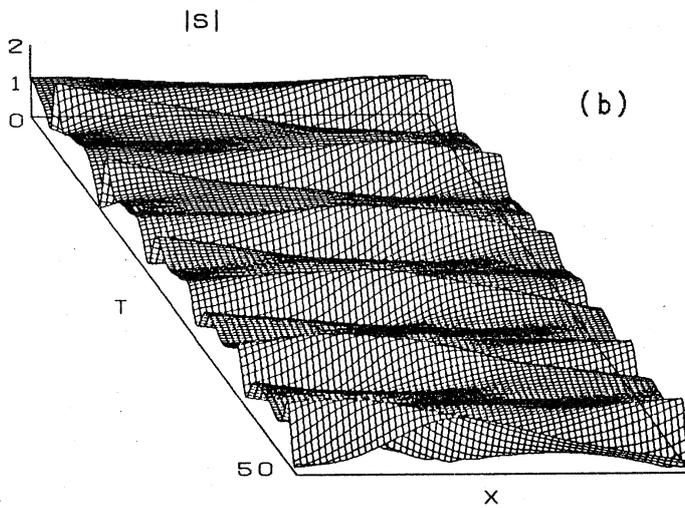
図3. 不安定領域における短波のフーリエ振幅  
 (a) SH型 ( $\alpha = \beta = 0, K = 1.26 < K_c = \sqrt{3} < 2K$ ),  
 (b) SK型 ( $\alpha = 0, \beta = 0.2, K = 1.26 < K_c = 1.49 < 2K$ ),  
 (c) SK型 ( $\alpha = 0, \beta = -0.09, K = 1.26 < K_c = 1.94 < 2K$ )

一ドも1次モードに同期して励起される。(b)  $\beta > 0$  の場合のSK型 ( $\alpha = 0, \beta = 0.2, K = 1.26 < K_c = 1.49 < 2K$ ) では、再帰現象の周期性は僅かに崩れ、(c)  $\beta < 0$  の場合のSK型 ( $\alpha = 0, \beta = -0.09, K = 1.26 < K_c = 1.94$ ) では0次モードと不安定な1次モードの間で不規則なエネルギー交換が見られる。この場合、9Kが孤立不安定領域に入るため9次モードも励起され、波の時間発展は更に複雑な様相を呈する。以上は  $\alpha = 0$  の場合に限ったが、実は  $\alpha$  が波の時間発展に与える影響は  $\beta$  に比べて遙かに小さいことが示せる。図4は各フーリエモードにより合成された  $|S|$  の時間発展を示している。図4(a), (b), (c)はそれぞれ図2(a)図3(a), (c)に対応し、安定、再起現象か

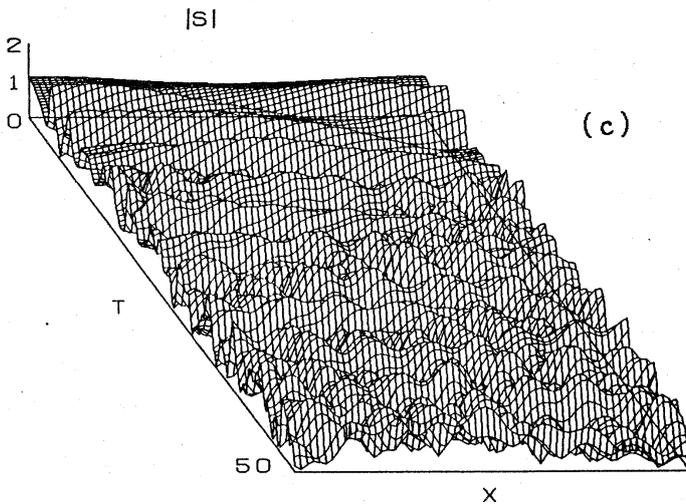
らカオス化に至る振舞いが見られ



ALPHA=0.000. BETA=0.0000. N=16. K=1.7500



ALPHA=0.000. BETA=0.0000. N=16. K=1.2600



ALPHA=0.000. BETA=-0.0900. N=16. K=1.2600

図4. |S|の時間発展 (a)SH型 ( $\alpha = \beta = 0, K=1.75 > K_c = \sqrt{3}$ ), (b)SH型 ( $\alpha = \beta = 0, K=1.26 < K_c = \sqrt{3} < 2K$ ), (c)SK型 ( $\alpha = 0, \beta = -0.09, K=1.26 < K_c = 1.94 < 2K$ ).

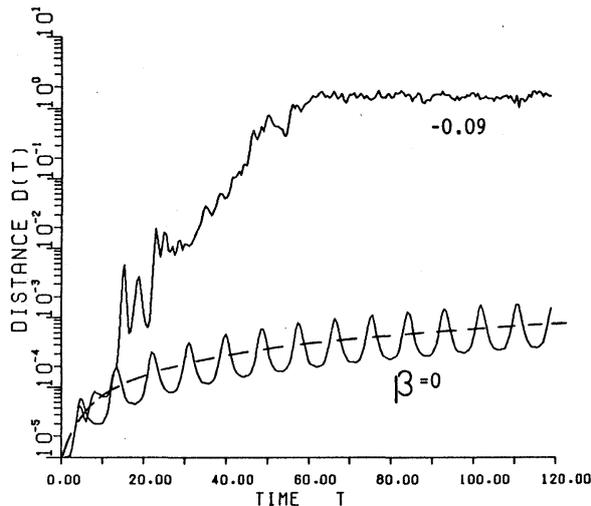
る。

系がカオスかどうかを判定するために、次のようなセパレーションディスタンス<sup>14-16)</sup>を調べると便利である:

$$D(t)$$

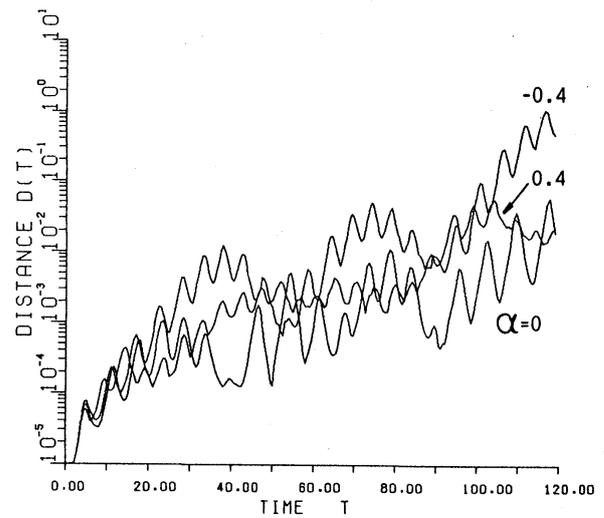
$$= \sqrt{\sum_{j=-N}^N |A_j - A_j'|^2}$$

ここで、'をつけた量は初期値を  $A_0'(0) = A_0(0) + \epsilon$ ,  $A_{\pm j}'(0) = A_{\pm j}(0)$ ,  $B_j'(0) = B_j(0)$  ( $j=1, 2, \dots, N$ )とした場合に対応している (ここでは  $\epsilon = 10^{-5}$ と選ばれている)。図5は  $\alpha = 0$ として  $\beta$ の値を変化させた場合を示す。(a)では、 $\beta (> 0)$ が大きくなるにつれて  $D(t)$ が線形的から指数的に増大していく様子が見られる ( $\beta$



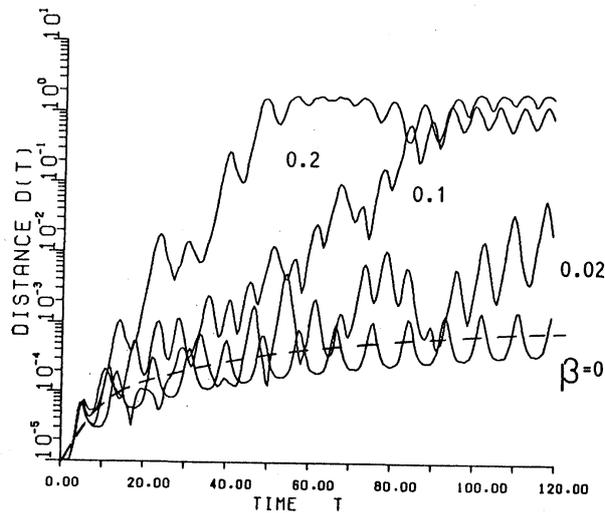
ALPHA=0.000, N=16, K=1.2600, EPS=0.00001

(b)



BETA=0.0200, N=16, K=1.2600, EPS=0.00001

図6. セパレーションディスタンス  $\beta = 0.02$   
 $\alpha = -0.4, 0, 0.4$



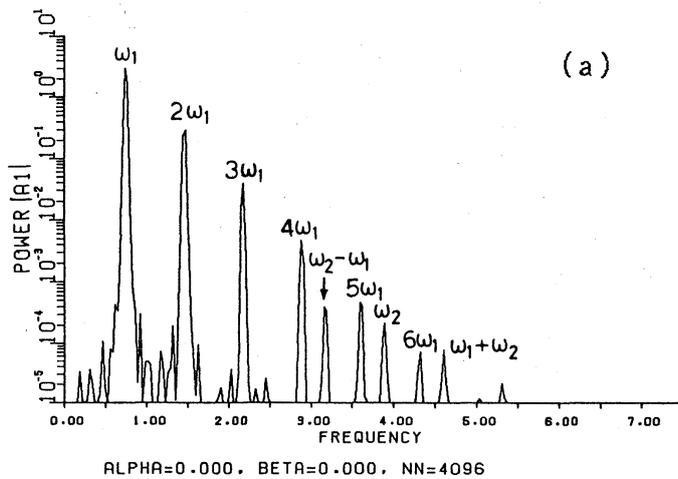
ALPHA=0.000, N=16, K=1.2600, EPS=0.00001

(a)

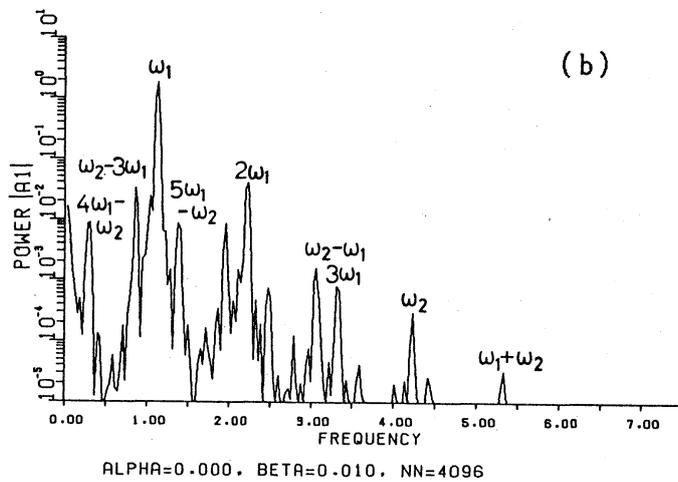
図5. セパレーションディスタンス (a)  $\alpha = 0$ ,  
 $\beta \geq 0$ , (b)  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0, -0.09$ , ..... ;  
 $D(t) = (1 + 0.658t) \times 10^{-5}$ .

= 0 の場合、比較のために図に  $D(t) = (1 + 0.658t) \times 10^{-5}$  が併せて描かれている。また (b) から  $\beta < 0$  の場合でも指数的に増大していることがわかる。従って、 $|\beta|$  が大きい場合系は強くカオス化される。

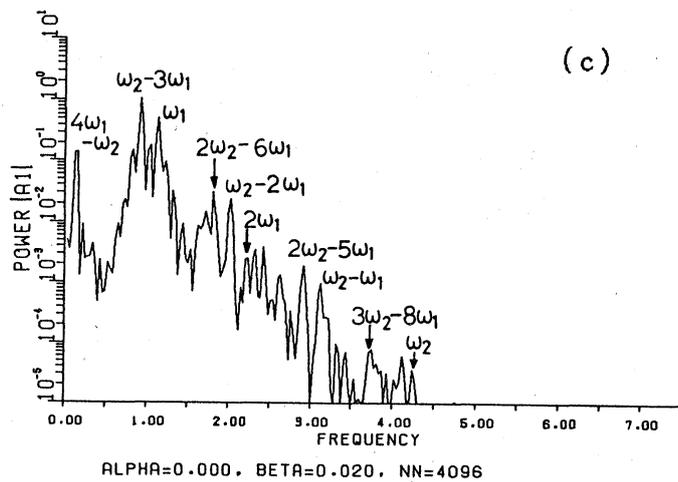
一方、図6では  $\beta = 0.02$  とし  $\alpha$  の値を変化させた場合を示す。これより  $\alpha$  のカオス化への影響は  $\beta$  に比べて非常に小さく、カオス化に強く関与するパラメータは  $\beta$  であることが分かる。ShenとNicholson<sup>16)</sup>により指摘されているように、正確なセパレーションディスタンス (又はリャプノフ数) を得る為には、打ち切りモード数



(a)



(b)



(c)

図7. フーリエ振幅  $|A_1|$  のスペクトル分布  
 $\alpha = 0$  (a)  $\beta = 0$ , (b)  $\beta = 0.01$ , (c)  $\beta = 0.02$ .

を十分大きく取る必要がある。しかし、それは不安定領域に含まれるモード数に比べてであり、本計算の場合、不安定モード数は1または2であるため、打ち切りモード数  $N = 16$  としても十分な精度が得られる。

再起現象からカオスへの移行が、 $\beta$  の値によってどの様に行われるかという問題に対して、フー

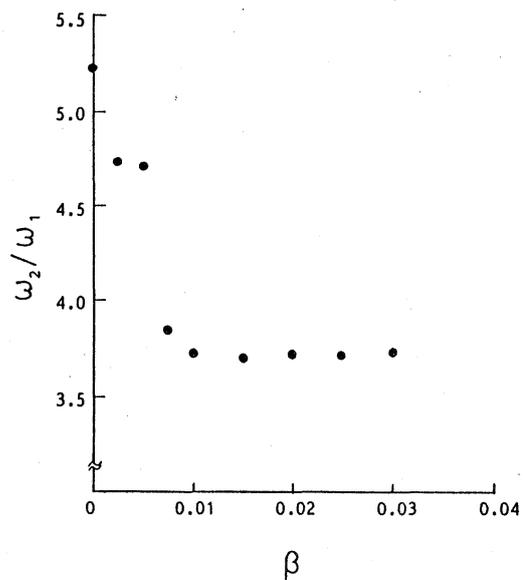


図8.  $\beta$  に対する  $\omega_2 / \omega_1$  .

リエ振幅のスペクトル分布を調べることによりかなり明らかになる。サンプルデータ数  $NN=4096$  として  $0 < T < 409.6$  で  $|A_1|$  の時系列のスペクトル分布を調べた結果、図 7 に示すように周波数  $\omega_1$  と  $\omega_2$  の 2 つの成分の線形結合から構成されていることがわかる。特に SH 型の場合、主な  $\omega_1$  成分と微小な  $\omega_2$  成分とで構成されるが、その比が簡単な有理比ではないことから ( $\omega_2 / \omega_1 \sim 5.23$ )、再起現象は周期的ではなくむしろ準周期的である可能性が高い。図 7 (a)、(b)、(c) では、 $\beta$  が 0 から次第に大きくなるにつれてスペクトル分布は線スペクトルに近い状態 (SH 型) から連続的に広がっていくカオス状態 (SK 型) に近づく様子が示されている。更に、 $\beta$  の値に対する  $\omega_2 / \omega_1$  が図 8 に示されており、 $\beta \sim 0.01$  付近から周波数ロックが見られる。従ってカオスへの移行のルートとしては、準周期から周波数ロックを経てカオス状態へ移行することが示唆される。

#### § 4. あとがき

前節で示した SK 型方程式で見られるカオス状態は、有限フーリエモード内で起こる 'confined chaos' と呼ばれるものである。ここでは特に、不安定性により励起されるモードが一つの場合でも (0 次モードとのエネルギー交換を伴いながら) カオス化する例を示した。このような例は、高調波領

域が安定であれば熱平衡化（カオス化）は起こらないとする Yuenと Ferguson<sup>17)</sup>の推測や、カオス化は不安定性に依り励起される複数モード間での相互作用の結果である（従って不安定モードが一つだけの場合には、0次モードとの間で再起現象がみられるだけである（図2(d)や図3(a)参照））とする Caponi等<sup>18)</sup>の主張が常に成り立つとは限らないことを示している。また、§2で示された（ $\delta$ 関数的）孤立不安定領域は、方程式（1）の最高階の微係数が微小パラメータ $\beta$ であることに依る境界層型特異性と深く関係がある。従って $\beta \rightarrow 0$ （ $< 0$ ）の場合、数値計算における展開モード数を増してもこの特異性を回避することはできない。しかし、実際この孤立不安定領域で励起されたモードの不安定低モードへの影響は、 $\beta$ が0に近づくとつれて十分時間が経過した後でないと現れないことが予想される。この意味で、 $\beta \rightarrow 0$ の極限では、波の時間発展は孤立不安定領域のないSH型の場合に漸近すると考えられる。

## 参考文献

- 1) T. Kawahara, N. Sugimoto and T. Kakutani: J. Phys. Soc. Jpn. **39**(1975)1379.
- 2) V. D. Djordjevic and L. G. Redekopp: J. Fluid Mech. **79**  
(1977)703.
- 3) R. H. J. Grimshaw: Studies Appl. Math. **56**(1977)241.
- 4) Y. Hashizume: J. Phys. Soc. Jpn. **48**(1980)631.
- 5) C. G. Koop and L. G. Redekopp: J. Fluid Mech. **111**(1981)367.
- 6) M. Funakoshi and M. Oikawa: J. Phys. Soc. Jpn. **52**(1983)1982
- 7) K. Nishikawa, H. Hojo, K. Mima and H. Ikeji: Phys. Rev. Lett. **33**(1974)148.
- 8) N. Yajima and J. Satsuma: Prog. Theor. Phys. **56**(1976)1719.
- 9) T. Yoshinaga, N. Sugimoto and T. Kakutani: J. Phys. Soc. Jpn. **50**(1981)2122.
- 10) T. Yoshinaga, T. Yamamoto and T. Kakutani: Nonlinear Wave Motion (Ed. A. Jeffrey Longman 1989)p.229.
- 11) N. Yajima and M. Oikawa: Prog. Theor. Phys. **56**(1976)1719.
- 12) Y. C. Ma: Studies Appl. Math. **59**(1978)201, see also  
Y. C. Ma and L. G. Redekopp: Phys. Fluids **22**(1979)1872.
- 13) E. S. Benilov and S. P. Burtsev: Phys. Lett. **98A**(1983)256.
- 14) H. Nagashima: Phys. Lett. **105A**(1984)439.

15) K. Yoshimura and S. Watanabe: J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982)

3028.

16) M. M. Shen and D. R. Nicholson: Phys. Fluids 30 (1987) 3150

17) H. C. Yuen and W. E. Ferguson: Phys. Fluids 21 (1978) 1275.

18) E. C. Caponi, P. G. Saffman and H. C. Yuen: Phys. Fluids 25

(1982) 2159.