

Title	パラメトリック散逸非線形シュレディンガー方程式の数値解(液体中の非線形波動の数理的側面)
Author(s)	梅木, 誠
Citation	数理解析研究所講究録 (1991), 740: 126-137
Issue Date	1991-01
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/102103">http://hdl.handle.net/2433/102103</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## パラメトリック散逸非線形シュレディンガー方程式の数値解

東大理 梅木 誠 (Makoto Umeki)

§1. はじめに

パラメトリック散逸非線形シュレディンガー方程式

$$i(r_t + \alpha r) + B r_{xx} + (\beta + A|r|^2)r + A_0 r^* = 0 \quad (1)$$

( $\alpha, B, \beta, A, A_0$  は実定数,  $r^*$  は  $r$  の複素共役) は可積分な  
ソリトン方程式に外力 ( $A_0$  の項) と散逸 ( $\alpha$  の項: 線形減衰)  
の加わった系であり, 低自由度カオスや, 空間コヒーレンス  
の欠如した時空カオスが生じると期待される。(1) は Miles  
(1984) が, 鉛直加振をうける細長い長方形容器内の水面波の  
(0,1) モード (短い辺方向にのみ一節のあるモード) の長辺  
方向への modulation を記述する方程式として, 平均ラグラ  
ンジュ法により導いたものである。対応する実験が Wu, et al  
(1984) により行われ, *sech* 型の孤立波や, 2つの孤立波の衝  
突, すりぬけの繰り返しの現象が発見されている。

本研究では(1)の周期境界条件下での解の分岐を, 解析的及  
び数値的に調べ, *pseudospectral* 法により数値計算を行な,

た。特に2つのパラメータ ( $\beta, A_0$ ) に対する依存性を詳細に調べ、定常解の安定性を吟味する。鉛直加振をうける水面波の場合、各パラメータの物理量との対応は次の通りである。

$$\alpha = a_{\min} / a_1 \epsilon^2, \quad \beta = (\omega^2 - \omega_1^2) / 2\epsilon^2 \omega^2, \quad A_0 = a_0 / a_1 \epsilon^2,$$

$a_0(\min)$  : (最小励起) 加振振幅。

$$a_1 = (\kappa_1 \tanh \kappa_1 d)^{-1}, \quad \kappa_1 = \pi / l_y, \quad l_y : \text{容器の幅} (l_y \ll l_x)$$

$d$  : 液体の深さ。  $\omega_1 = \{(1 + \lambda^2 \kappa_1^2) g / a_1\}^{\frac{1}{2}}$  : モード(0,1)の固有振動数

$g$  : 重力加速度。  $\lambda$  : 表面張力。  $2\omega$  : 加振の角振動数

$\epsilon$  : 展開パラメータ ( $\ll 1$ )。  $A, B$  は定数。

$A, B$  は  $\kappa d \rightarrow +\infty$  のときに1に近づく事が知られており、 $A = B = 1$  とする。

## § 2. 定常解の分類

(1)の定常解 ( $\gamma_z = 0$ ) は、零解 ( $r = 0$ )、一様解 ( $r = \text{const}$ )、非一様解に分類され、非一様解には位相  $\text{Arg}(r)$  が一定な、クノイダル波と  $dn$  波が存在する。解析的な表現を以下に示す。

$$\text{一様解: } r = r_{c\pm} = |r_{c\pm}| e^{i\psi_{\pm}}$$

$$|r_{c\pm}| = \{(-\beta \pm \sigma) / A\}^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma = (A_0^2 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\psi_+ = \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{\alpha}{A_0}, \quad \psi_- = \frac{1}{2} (\pi - \sin^{-1} \frac{\alpha}{A_0}) \quad (2)$$

( $\pm$  は 振幅の大小を区別するために用いた。)

7 / 1 ダル波解  $r = R^n(x) e^{i\psi_n}$

$$R^n(x) = n \frac{\kappa K}{\kappa_0 K_0} \operatorname{cn}(4nKx/L; \kappa), \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

$$\psi_n = \frac{1}{2} \cos^{-1} \{(\beta_n^c - \beta)/A_0\}$$

$$\text{但し. } A_0 = \{\alpha^2 + (\beta - \beta_n^c)^2\}^{1/2}, \quad \beta_n^c = -An^2 \frac{\kappa^2 K^2}{\kappa_0^2 K_0^2} (1 - \kappa^2/2),$$

$K \equiv K(\kappa)$ ,  $K_0 \equiv K(\kappa_0)$  は第一種完全楕円積分.  $L = 4K_0 K_0 \sqrt{\frac{2B}{A}}$  は空間  $x$  の周期境界のサイズである。

$d_n$  波解  $r = R^n(x) e^{i\psi_n}$

$$R^n(x) = n \frac{\kappa K}{2\kappa_0 K_0} \operatorname{dn}(2nKx/L; \kappa), \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

$$\psi_n = \frac{1}{2} \cos^{-1} \{(\beta_n^d - \beta)/A_0\}$$

$$\text{但し. } A_0 = \{\alpha^2 + (\beta - \beta_n^d)^2\}^{1/2}, \quad \beta_n^d = -An^2 \frac{K^2}{4\kappa_0^2 K_0^2} (1 - \kappa^2/2).$$

図 1, 2 に零解と一様解の線形安定性ダイアグラムを示す。  
 $\kappa \rightarrow 0$  の極限で、7 / 1 ダル波解の  $A_0$  の表式は、 $A_0 = \{\alpha^2 + (\beta - Bk_n^2)^2\}^{1/2}$ ,  $k_n = 2\pi n/L$  に近づき、図 1 の安定性の変化する境界曲線と一致する。ゆえに 7 / 1 ダル波解は零解からの分岐解であり、さらに、 $\beta > (<) Bk_n^2$  ではこの分岐が supercritical (subcritical) であることがわかる。同様に  $\kappa \rightarrow 0$  で  $d_n$  波解の  $A_0$  は  $A_0 = \{\alpha^2 + (\beta + Bk_n^2/2)^2\}^{1/2}$  となり、図 2 の境界線と一致する。よって  $d_n$  波解は一様解からの分岐である。

図 2 において、別のタイプの安定性の境界線が存在し、

$A_0 = \{ \alpha^2 + (Bk_n^2/2)^2 \}^{1/2}$  と表される。この境界線の近傍で Lindstedt の方法を用いることにより、位相の一定でない摂動解が得られる。(Umeki, 1990) また、定常解の方程式は、 $x$  を時間変数と見直すと、中心力場の平面内の粒子の Hamilton 方程式に、非中心力的な摂動と、ハミルトン的でない摂動の加わった系であることが示され、一般には、非周期的な解が存在すると予想される。

### § 3. クノイダル波の安定性.

クノイダル波解と dn 波解は、Fourier 級数表示が知られているため、比較的簡単に安定性が調べられる。ここでは、クノイダル波解について手法を説明する。

$r = \bar{r} + \hat{r}$ ; ( $\bar{r}$ : クノイダル波,  $\hat{r}$ : 摂動) とおいて (1) に代入し、 $\hat{r}$  について 1 次の項のみ残す。

$$\hat{r}_t + \alpha \hat{r} - i (B \hat{r}_{xx} + \beta \hat{r} + 2A|\bar{r}|^2 \hat{r} + 2\bar{r}^2 \hat{r}^* + A_0 \hat{r}^*) = 0 \quad (5)$$

$\bar{r}$  と  $\hat{r}$  を打ち切ったフーリエ級数で表すと

$$(\bar{r}, \hat{r}) = \sum_{m=-N}^N (\bar{r}_m, \hat{r}_m) e^{ik_m x}, \quad (6)$$

となる。(5) において非線形項 ( $|\bar{r}|^2 \hat{r}$ ) のフーリエ係数  $u_m$  は、

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{1}{L} \int_0^L |\bar{r}|^2 \hat{r} e^{-ik_m x} dx \\ &= \sum_{m_1, m_3} \bar{r}_{m_1} \bar{r}_{m_1+m_3-n}^* \hat{r}_{m_3} \equiv \sum_{m_3} I_{m, m_3} \hat{r}_{m_3} \quad (7) \end{aligned}$$

である。但し、

$$I_{m,m_3} \equiv I(m-m_3) = \sum_{m_1} \bar{r}_{m_1} r_{m_1+m_3-m}^* \quad (8)$$

もう一つの非線形項 ( $\bar{r}^2 \hat{r}^*$ ) のフーリエ係数  $v_m$  も同様:

$$v_m = \sum_{m_1, m_3} \bar{r}_{m_1} \bar{r}_{m_3+m-m_1} \bar{r}_{m_3}^* \equiv \sum_{m_3} J_{m,m_3} \hat{r}_{m_3}^* \quad (9)$$

となる。楕円関数  $cn$  のフーリエ級数表示

$$cn(x) = \frac{\pi}{\kappa K} \sum_{l=0}^{\infty} \operatorname{sech} \left\{ (l + \frac{1}{2}) \pi K' / K \right\} \cos \left\{ (l + \frac{1}{2}) \pi x / K \right\} \quad (10)$$

( $K' = K(\sqrt{1-\kappa^2})$ )

を用いて、クワイダル波解  $r = \exp(i\psi) \cdot R^n$  のフーリエ係数は

$$r_m = e^{i\psi} R_m^n,$$

$$R_m^n = \begin{cases} \frac{n\pi}{2\kappa_0 K_0} \operatorname{sech} \frac{|m|\pi K'}{2K} & , \quad m = \pm n, \pm 3n, \pm 5n, \dots \\ 0 & , \quad m \neq \pm n, \pm 3n, \pm 5n, \dots \end{cases} \quad (11)$$

で与えられる。相関係数  $I_{m,m_3}$  は実数であり、 $J_{m,m_3}$  は

$$J_{m,m_3} = I(m+m_3) e^{2i\psi} \quad \text{で与えられる。}$$

以上より、擾動のフーリエ係数の時間発展は  $r_m = p_m + i q_m$  とし

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_m \\ q_m \end{pmatrix} = \tilde{A}_m \begin{pmatrix} p_m \\ q_m \end{pmatrix} + \sum_{m_3} \tilde{B}_{m,m_3} \begin{pmatrix} p_{m_3} \\ q_{m_3} \end{pmatrix} + \tilde{C}_m \begin{pmatrix} p_{-m} \\ q_{-m} \end{pmatrix}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, 2N \quad (12)$$

となる。ここで  $\tilde{A}_m, \tilde{B}_{m,m_3}, \tilde{C}_m$  は  $2 \times 2$  の行列であり

$$A_m = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta + B\kappa_m^2 \\ \beta - B\kappa_m^2 & -\alpha \end{pmatrix} \quad B_{m,m_3} = A \begin{pmatrix} -J_{m,m_3}^2 & -2I_{m,m_3} + J'_{m,m_3} \\ 2I_{m,m_3} + J'_{m,m_3} & J_{m,m_3}^2 \end{pmatrix}$$

$$C_m = \begin{pmatrix} 0 & A_0 \\ A_0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{である。} \quad (J', J^2 \text{ は } J \text{ の実部と虚部})$$

(12) の右辺の行列を数値的に解いた結果、クワイダル波があるパラメータで不安定となり、複素数の固有値を生ずることがわかった。(図3) 即ち、ホップ分岐が生じている。

図4に  $(\beta, A_0)$  平面で詳細に安定性を調べた結果を示す。

#### §4. 数値計算

(1)の非定常解を調べるために、pseudospectral法を用いた数値計算を行なった。Aliasingの誤差をとり除くために、モード数  $N$  の2倍の配列を用意し、高波数側半分は0を入れておく。時間ステップは4次のRunge-Kuttaを用いた。

$$(\alpha, \beta, A_0) = (0.2, -0.3, 0.5), \quad (x_0, L) = (0.97, 15.73\dots)$$

で初期条件をクノイダル波+数%の擾動で計算したところ、初期の5万ステップ ( $T=250$ )までは周期的であるが、その解が不安定となり、一時的な不規則状態をすぎ、2重周期状態が現れた。  $\alpha$  と  $\beta$  はそのまま  $A_0 = 1.0$  とすると最初からカオス的な状態が続く。  $A_0 = 0.37$  の場合は周期状態が計算時間の範囲で続いた。図5に数値計算例を示す。

$(\alpha, \beta) = (0.2, -0.3)$  で  $A_0$  を  $0.208 \sim 1.0$  まで100通りの計算を上記の初期条件で行なったところ、次の事がわかった。

1. ホップ分岐 (510-3) は、  $A_0$  が小さい方では *supercritical*,  $A_0$  の大きい方で *subcritical* である。

2. カオス的な状態と  $dn$  波の  $n=2, 3$  や一様解の状態が安定に共存する範囲がある。

また、  $A_0 = 0.37, 0.5$  で現れた周期解は実空間での波形を

見ると、2つの山<sup>衝突</sup> → 1つの山<sup>すり抜け</sup> → 2つの山 → ... と解釈でき、  
Wu, et. al の実験を説明するものである。

### § 5 まとめ

鉛直加振を受けた水面波のダイナミクスを、弱非線形理論で導かれた、パラメトリック散逸非線形シュレディンガー方程式によって解析し、孤立波や、2つの山の衝突、すり抜け現象を再現した。

### § 6. 参考文献

Miles, J. W. (1984) *J. Fluid Mech.* 148 pp 451-460

Wu, J., Keolian, R & Rudnick, I (1984) *Phys. Rev. Lett.* 52

pp. 1421-1424

Umeki (1990) preprint.



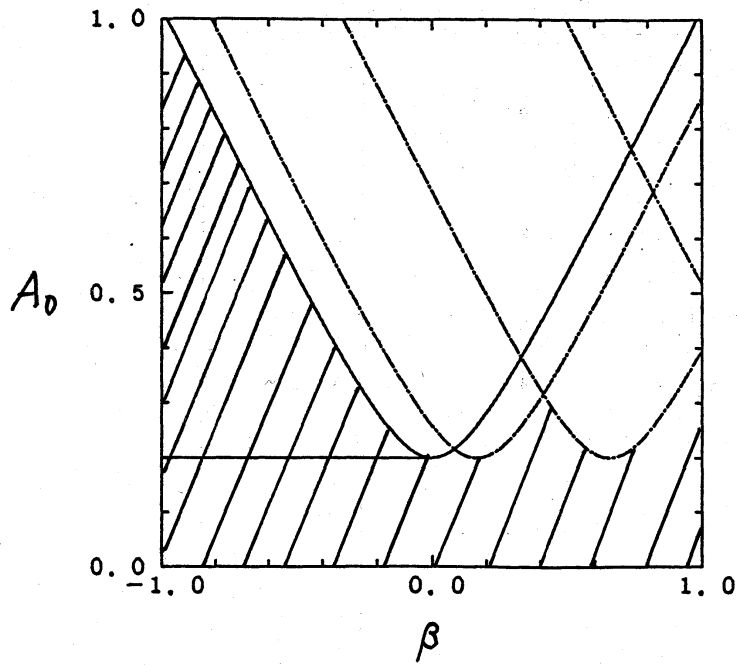


図1 零解の安定性ダイアグラム  
斜線部が安定領域

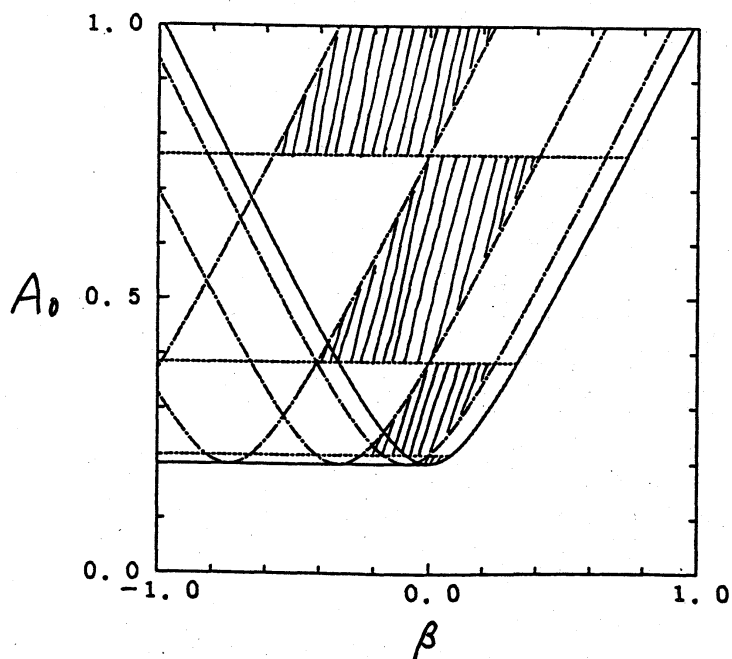


図2 一様解 ( $\gamma_+$ ) の安定性ダイアグラム  
斜線部が安定領域

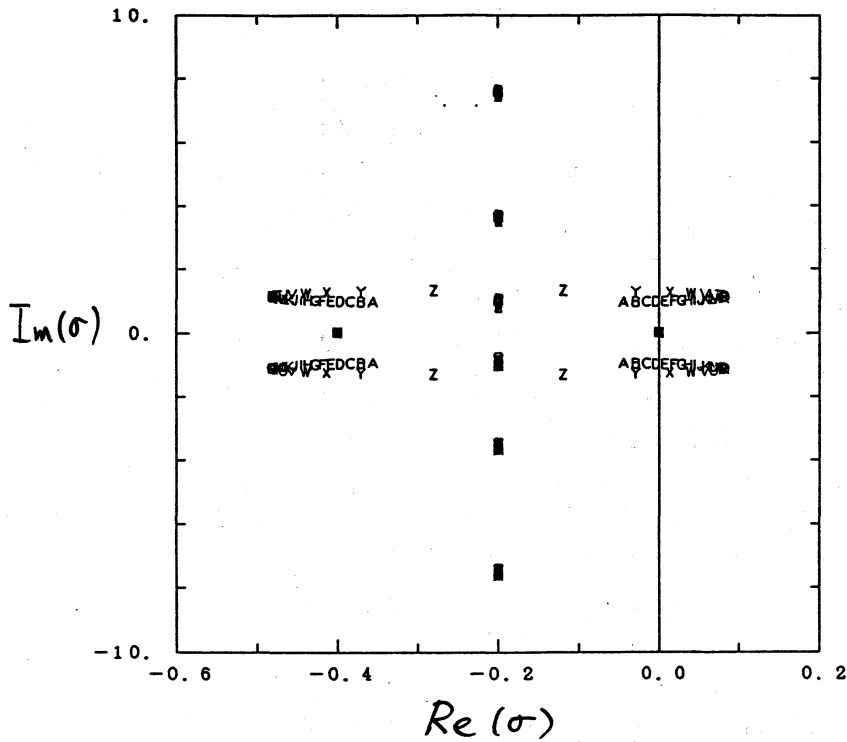


図3 安定性解析による固有値  $\sigma$  の変化  
 $A \rightarrow Z$  に従い、 $A_0$  を大きく変化させた。  
 2度 Hopf 分岐が起きている。

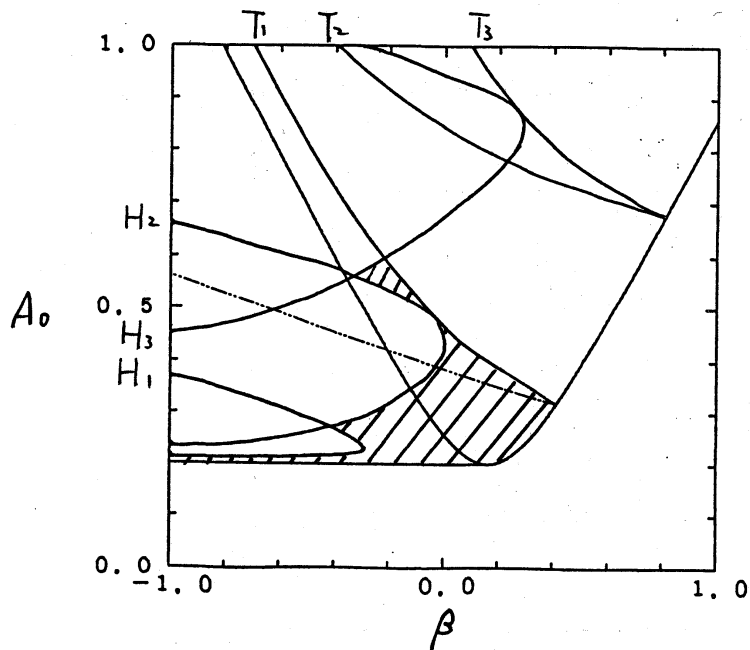
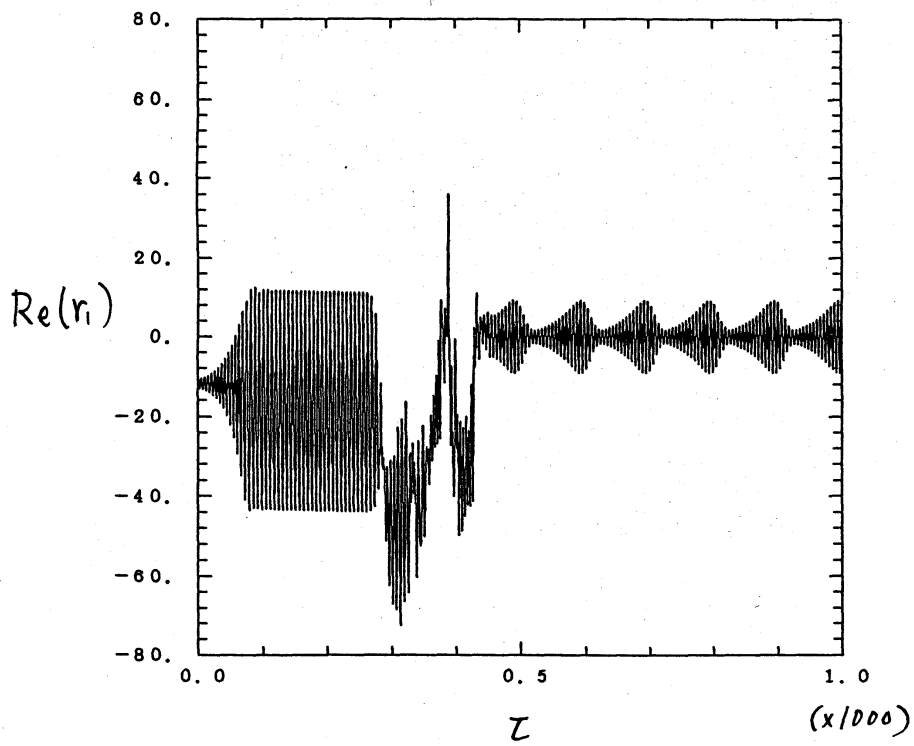


図4 クリスタル波 ( $n=1$ ) の安定性ダイアグラム  
 斜線部が安定領域。

$H_1, H_2, H_3$  は  $Re(\sigma) = 0, Im(\sigma) \neq 0$  の曲線。  
 $T_1, T_2, T_3$  は  $Re(\sigma) = Im(\sigma) = 0$  の曲線。



☒ 5.1.  $(\alpha, \beta, A_1) = (0.2, -0.3, 0.5)$   
 でのフーリエ係数  $r_1(\tau)$  の実部の  
 時間発展

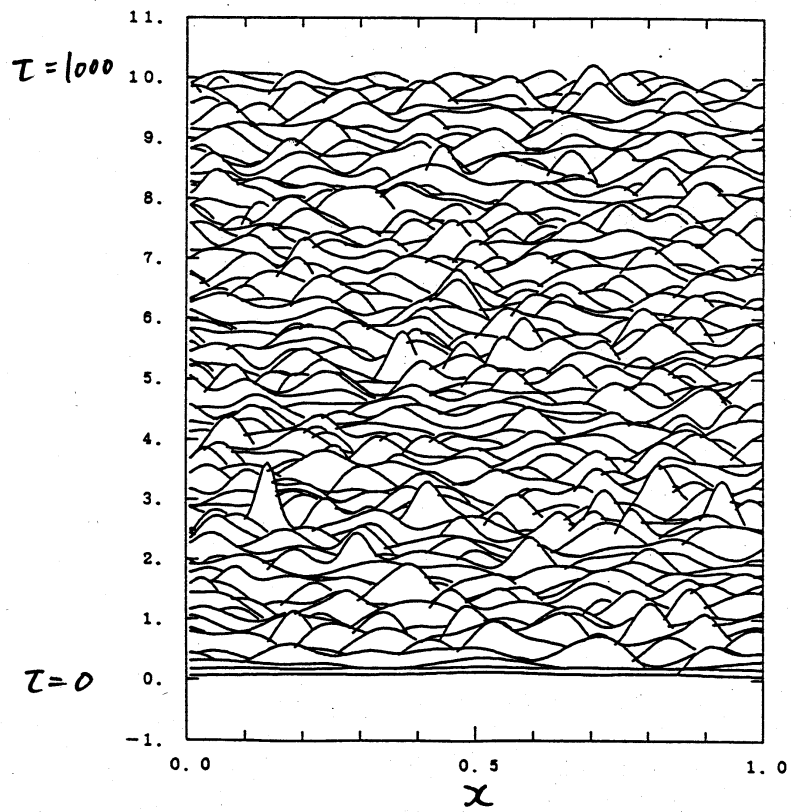
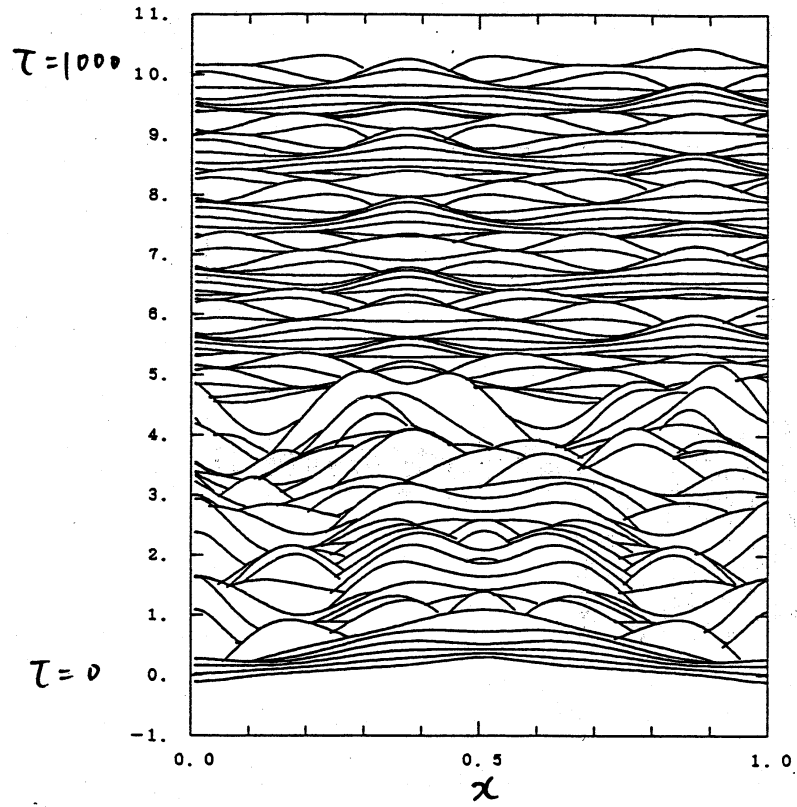


図 5.2, 5.3,  $Re(\gamma)$  の時間発展.  $\alpha=0.2, \beta=-0.3$   
 (上)  $A_0=0.5$ , (下)  $A_0=1.0$

//

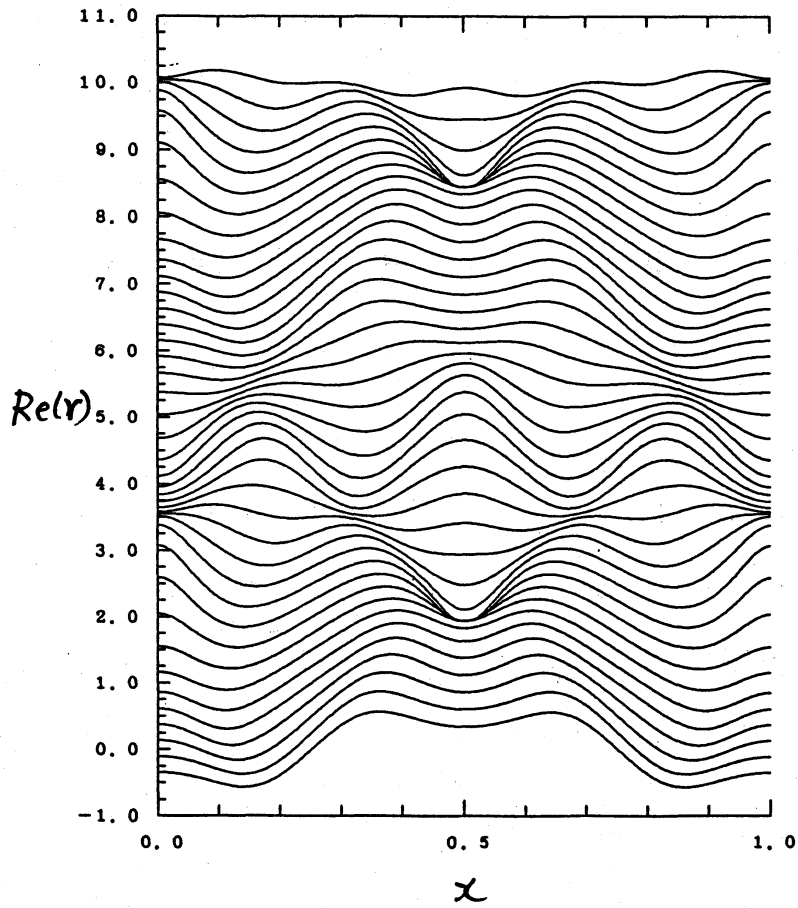


図 5.4 孤立波の衝突すり抜け現象。(x=0.25~0.75を実際の容器のサイズとみなす。)  $A_0=0.5, \alpha=0.2, \beta=-0.3$