数理解析研究所講究録
740巻 1991年 105-113

「ソリトン」の摂動理論

名大・理　野崎一洋（K. Nozaki）

1．はじめに

ソリトン系は無限自由度の力学系でありながら、分離可能な離散的自由度としてソリトンを持つ。従って、ソリトン系の力学は、ソリトンに着目している限り、ソリトンの個数に対応する有限自由度可積分系に帰着できる。一方、ソリトン系のように厳密に可積分でない系においても、ソリトンのような孤立波解が、厳密に、又は、近似的に存在することがある。このような非可積分系における局所構造の力学も、漸近摂動論の意味で、有限自由度系（一般に可積分でない）に帰着できる場合がある。このような例として、2．で、摂動のあるソリトン系の摂動理論の簡単なレビューをし、3．で、散逸系のパルス間相互作用を取り扱う。

2．摂動のあるソリトン系

一般に、摂動のあるソリトン系においては、ソリトンは分

離可能な基準モードではなくなるが、ソリトンと「輻射」を「基底」とする解の表現空間：「散乱データ空間」で、漸近摂動展開を行うことにより、最低次近似では、ソリトンのみの有限次元系に帰着される‥‥逆散乱法による断熱近似[1]。次の近似では、ソリトンと輻射の結合が起こり、一般には有限次元系に帰着できないが、種々の近似的取り扱いが行われている[2][3]。

特に、保存性摂動に対しては、正準変数を使うハミルトニアン摂動法[4]、摂動項を、可積分項と非可積分項に分離する「正規形」理論[5]がある。

また、逆散乱法を直接には使わない「直接摂動理論」もあるが、線形化演算子のグリーン関数の構成には逆散乱法が必要である[6]。

３．散逸系におけるパルス間相互作用

一般の非可積分系においても、孤立波間の相互作用が弱い場合は、摂動理論的取り扱いが可能となる。弱い相互作用をする場合としては、１．孤立波の伝播速度の差が大きく、相互作用する時間が短い‥‥分散系の孤立波に対する及川・矢嶋の逓減摂動理論[7]、２．孤立波の伝播速度の差が小さく、孤立波間の重なりが小さい‥‥散逸系の孤立波に対する蔵本

の「位相力学」[8]、一般な系に対する Gorshkov-Ostrovsky の「直接摂動法」[9]などがある。

ここでは、2の場合が、自然に実現される散逸系のパルス間相互作用を、G-Oの「直接摂動法」をもとに、若干の改良を加えて議論し、神経パルス・モデルへの応用を試みる。

（３－１）一般論

次のような、時間・空間について１階の微分しか含まない形にした方程式を考える。

$$F(X, X_t, X_x) = 0 , \qquad (1)$$

ここで、Ｆ，Ｘ（x, t）はＮ次元ベクトルであり、定まった伝播速度C_0をもち、Ｌ個の任意パラメータ（Ｌ＜Ｎ/２）：Ｓ，a_1，a_2，…，a_{L-1}をもつ定常伝播孤立波解

$$X(x,t) = X^{(0)}(x - c_0 t - S;\ a_1, a_z, \cdots, a_{L-1}) ,$$

$$X^{(0)} \to 0 (|x| \to \infty) ,$$

の存在を仮定する。パルス巾に比べて十分離れたＭ個のパルスは、小さな「すそ」の重なりによる弱い相互作用をするとして、次の漸近展開を導入する[9]。

$$X = \sum_{m=1}^{N} X_m^{(0)} + \varepsilon X^{(1)}(\xi, \tau) + \cdots , \qquad (2)$$

$$X_m^{(0)} = X^{(0)}(\xi - S_m;\ a_1^m,\ a_2^m,\ \cdots,\ a_{L-1}^m)\ ,$$

$$\xi = x - ct,\ \tau = \varepsilon t,\ S_m = S_m(\tau),\ S_1 < S_2 \cdots < S_M\ ,$$

$$\{a_\ell^m = a_\ell^m(\tau)\}\ (\ell=1,\cdot\cdot,L-1;\ m=1,\cdots,M)\ .$$

ここで、εは、相互作用の小ささを表わす展開パラメータ、τは、パルス・パラメータのゆっくりした変化を記述するために導入した時間変数、Cは、1つのパルスの伝播速度C_0に近い定数で後に決まる $(C-C_0 \equiv \varepsilon\tilde{C})$。

新しい独立変数、ξ，τを使うと（1）は

$$F(X,\ -CX_\xi + \varepsilon X_\tau,\ X_\xi) = 0 \qquad (1')$$

となり、（2）を（1）'に代入して、0（ε）の項を集めると、次式を得る。

$$L_M(c)X^{(1)} = -H\ , \qquad (3)$$

$$L_M(c) = \frac{\partial}{\partial\xi} + \{\frac{\partial\hat{F}}{\partial X_\xi}\}_M^{-1}\{\frac{\partial\hat{F}}{\partial X}\}_M\ ,$$

$$H = \{\frac{\partial\hat{F}}{\partial X_\xi}\}_M^{-1}[\{\frac{\partial F}{\partial\phi_t}\}_M \sum_{m=1}^{M}\{(\tilde{c} + S_{m,\tau})X_{m,\xi}^{(0)} + \sum_{\ell=1}^{L-1} a_{\ell,\tau}^m \frac{\partial X_m^{(0)}}{\partial a_\ell^m}\}$$

$$+ \{\delta F\}_M]\ ,$$

$$\widetilde{F}(X,X_\xi) = F(x,-CX_\xi,X_\xi), \quad \{A\}_M = A(\sum_{m=1}^{M} X_m^{(0)}) .$$

ここで、$\det\{\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial X_\xi}\}_M \neq 0$ と仮定し、δF は、$0(\varepsilon)$のパルス間相互作用を表わす項で

$$\varepsilon\delta F = \{\widetilde{F}\}_M - \sum_{m=1}^{M} \widetilde{F}(X_m^{(0)} X_{m,\xi}^{(0)})$$

で定義される。（３）の一般解は斉次方程式 $L_M X = 0$の基本解行列Ｙを使って、

$$X^{(1)} = Y(\alpha + \int^{\xi} Y^{+} H\, d\xi)$$

と書ける。但し、αは任意のＮ次元定数ベクトル、Y^{+}はL_Mの随判演算子L_M^{+}の基本解行列で$YY^{+} = 1$とする。

もし、斉次方程式$L_M(C)X_c = 0$が$|\xi| \to \infty$で$X_c \to 0$となる解（「固有値」Ｃの「固有関数」X_cと呼ぶことにする）を持てば、１．$|\xi| \to \infty$で$|X| \to \infty$となる斉次方程式の解、２．$L_M^{+}(C)$の「固有関数」X_c^{+}、３．$|\xi| \to \infty$で$|X^{+}| \to \infty$となる随判方程式の解の存在が証明される。従って、この時、$|\xi| \to \infty$で $X^{(1)} \to 0$の境界条件を満足する（３）の解が存在するための必要条件として、

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_c^{+} H\, d\xi = 0 , \qquad (4)$$

が得られる。

(4)は、パルス・パラメーターに対する発展方程式を与えるが、「固有関数」X_0^+をパルス・パラメーターの数だけ厳密に求めるのは困難なので、次の近似的方法をとる[10]。

M=1の時、$L_1(C_0)$の「固有関数」は、

$$X_{1,j}=\frac{\partial X_j^{(0)}}{\partial \xi},\ X_{2,j}=\frac{\partial X_j^{(0)}}{\partial a_1^j},\ \cdots,\ X_{L,j}=\frac{\partial X_j^{(0)}}{\partial a_{L-1}^j}$$

で与えられるので、$L_M(c)$の「固有関数」$X_{i,j}^M$を$L_1(C_0)$の「固有関数」の線形結合で近似する(これは、量子力学におけるLCAO近似に対応する)。

$$X_{i,j}^M=\sum_{i'=1}^{L}\sum_{j'=1}^{M}C_{ij,i'j'}X_{i',j'}\quad(i=1,2,\cdot\cdot,L;\ j=1,2,\cdot\cdot,M)\ .$$

この時、「固有値」Cは $L_M(C)X_{i,j}^M=0$ より定まり、対応する随判演算子のL×M個の「固有関数」も、同様に求まり、(4)より、$\tilde{C}+S_{m,\tau}$, $a_{1,\tau}^m$, $\cdots$, $a_{L-1,\tau}^m$ についてのM×L個の方程式が得られる。ここで、$\tilde{C}\tau+S_m\to S_m$と書き直せば、S_mはパルス中心の速度C_0からのずれを表わす位相となる。

(3−2)FitzHugh-Nagumo 方程式

神経パルス伝播のモデル方程式として知られている次のF−N方程式を考える。

$$u_t=u_{xx}-f(u)-w\ ,$$

$w_t = bu$.

ここでｂは正の定数、$f(u)=u(u-1)(u-a)$, $0<a<1/2$ 。$v = u_x$とおき、$X=(u,v,w)$とすれば、（１）の形の式となる。この方程式には、位相ｓのみを任意パラメーターとするパルス解$X^{(0)}(x+c_0t+s)$の存在が知られている。パルスの漸近形はＸ＝０のまわりの線形化方程式より定まる。ここでは、最も興味ある場合として、$e^{-\gamma|x|}$ 及び $e^{-\mu|x|}\cos(\nu x+\delta')$ の形の漸近形をもつパルス間の相互作用を考える。但し、γ, μ, ν はａ，ｂより定まる正の定数。パルス間隔が十分離れている時、（４）の積分が評価でき、次のような、パルス間隔$r_m = S_{m+1} - S_m$（S_m はｍ番目のパルスの位相）に対する発展方程式を得る。

$$r_{m,\tau} = -f_-(r_{m-1})+f_-(r_m)+f_+(r_m)-f_-(r_{m+1}) , \qquad (5)$$

$$f_-(r) = A_-e^{-\mu r}\cos(\gamma r+\delta)$$

$$f_+(r) = A_+e^{-\gamma r} .$$

ここで $m=1,2,\cdot\cdot,M-1$, $r_{-1}=r_M=\infty$, A_+,A_-, δ は線形化方程式L_Mの「固有関数」による定数。

パルスの数が少数（Ｍ＝２，３）の場合は、（５）の安定な固定点（一般に無限個ある）が求まり、パルスの結合状態が得られる。また、$M\to\infty$とし、r_mを連続近似すれば（５）

は漸近摂動の意味で、バーガース方程式で近似される[10]。ここでは、$\mu>\gamma$として、f_{-}項が無視できる時、厳密なNーショック解が得られることを示す。(5)でf_{-}項を無視し、$\gamma r_m \to r_m$, $\gamma A\tau \to \tau$と置き代えると、

$$r_{m,\tau} = e^{-r_m} - e^{-r_{m+1}}, \qquad (6)$$

を得る。$r_m=-\ell n p_m, p_m=\frac{\partial}{\partial\tau}\ell n q_m+A$（A：定数）とすると、(6)は線形化されて

$$q_{m,\tau} = A(q_{m+1} - q_m)$$

を得る。これより、Nーショック解

$$q_m = 1 + \sum_{j=1}^{N} \exp(-\alpha_j m + \beta_j \tau + \delta_j),$$

$$\beta_j = A(e^{-\alpha_j} - 1) \quad (A>0),$$

を得る。この意味で(6)は「離散的バーガース方程式」と呼べるかも知れない。

参考文献

(1) D.J. Kaup and A.C. Newell, Proc. R. Soc. Lond. A361(1978)413; V.I. Karpman and E.M. Maslov, Sov.

Phys. JETP 46(1977)281.

(2) E.M. Maslov, Theor. Math. Phys. 42(1980)237.

(3) K. Nozaki and N. Bekki, Physica 21D(1986)381.

(4) K. Nozaki, Physica 23D(1986)369.

(5) Y. Kodama, Physica 16D(1985)14; T. Kanou, J. Phys. Soc. Jpn. 58(1989)4322.

(6) J.P. Keener and D.W. McLaughlin, Phys. Rev. A16 (1977)777.
最近のソリトン摂動理論の応用については、
Y.S. Kivshar and B.A. Malomed, Rev. Mod. Phys. 61 (1989)763 が詳しい。

(7) M. Oikawa and N. Yajima, Suppl. Prog. Theor. Phys. 55(1974)36.

(8) Y. Kuramoto, 物性研究 49-3(1987)289.

(9) K.A. Gorshkov and L.A. Ostrovsky, Physica 3D (1981)428.

(10) H. Yamada and K. Nozaki, Preprint DPNU-90-23 (1990).