数理解析研究所講究録
740巻 1991年 40-49

ソリトン方程式の保存則の性質

山口大学教養部物理　松野好雅(Yoshimasa Matsuno)

1. 序論

積分可能な非線形発展方程式、いわゆるソリトン方程式は無限個の独立な保存則によって特徴づけられる。ここでは Bäcklund 変換の時間部分を特に積極的に用いることにより、種々のソリトン方程式の保存則を、N-ソリトン解に対して評価するひとつの方法を提案する。さらにこれにより保存則の性質を調べる。取り上げる方程式は、KdV 方程式、Boussinesq 方程式、浅水波のモデル方程式、Sawada-Kotera 方程式、Kaup 方程式、および Ito 方程式である。KdV 方程式以外は、固有値問題が高次となり、逆散乱問題は今だ十分解かれていない。

2. KdV 方程式

最初に、最も典型的なソリトン方程式である、次の KdV

方程式について、ここで提案する方法を説明する。

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad u = u(x,t). \quad (2.1)$$

(2.1)の Bäcklund 変換(BT)は、以下のように書ける。

$$w_t = [-(2u+k^2)(w+\frac{k}{2}) + ku + u_x]_x, \quad (2.2a)$$

$$w_x + w^2 + u - \frac{k^2}{4} = 0. \quad (2.2b)$$

ここでkは任意パラメータである。(2.2a)、および(2.2b)はそれぞれBTの"時間部分"、および"空間部分"を表わす。無限個の保存則は、wを

$$w = -\frac{k}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} w_j k^{-j}, \quad (2.3)$$

のようにkの逆べきに展開し、(2.2b)に代入した後にk^{-j}の各べきの係数を比べると直ちに導かれる。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (w+\frac{k}{2})dx = \sum_{j=1}^{\infty} I_j k^{-j}, \quad (2.4)$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u\,dx, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx, \cdots. \quad (2.5)$$

次に保存則を、(2.1)の1-ソリトン解

$$u_1 = 2a^2 \operatorname{sech}^2 a(x-4a^2t-x_0), \quad (2.6)$$

に対して評価する。このために(2.6)をBTの時間部分、(2.2a)に代入し、$w = w(x-4a^2t-x_0)$となることを使って1回積分すると

$$w + \frac{k}{2} = \frac{u_{1,x} + ku_1}{2u_1 + k^2 - 4a^2}. \quad (2.7)$$

これを積分すると

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}(w+\frac{k}{2})dx = \ln[(1+\frac{2a}{k})/(1-\frac{2a}{k})] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2}{2j+1}(\frac{2a}{k})^{2j+1}. \quad (2.8)$$

(2.4)と(2.8)のk^{-j}の係数を比べると

$$I_{2j+1} = \frac{2}{2j+1}(2a)^{2j+1}, \quad (j=0,1,\cdots), \tag{2.9a}$$

$$I_{2j} = 0, \quad (j=1,2,\cdots). \tag{2.9b}$$

上式より奇数番目の保存則のみが代数的に独立であることがわかる。

N-ソリトン解に対しては、時間が十分経過した後にソリトン解がN個の1-ソリトンに分離することを使うと

$$I_{2j+1} = \frac{2}{2j+1}\sum_{n=1}^{N}(2a_n)^{2j+1}, \quad (j=0,1,\cdots), \tag{2.10a}$$

$$I_{2j} = 0, \quad (j=1,2,\cdots), \tag{2.10b}$$

となる。ここで$2a_n^2$は、n番目のソリトンの振幅を表わす。以下では1-ソリトン解のみを考える。

3. Boussinesq方程式、および浅水波のモデル方程式

3.1 Boussinesq方程式

$$u_{tt} - u_{xx} - 3(u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0. \tag{3.1}$$

BTは次のように書ける。

$$w_t + \alpha\left(w_{xx} + \frac{1}{2}w w_x\right) + \frac{k}{2}w_x + \alpha u_x = 0, \tag{3.2a}$$

$$4w_{xx} - 2\alpha k w_x + 6ww_x + w^3 - \alpha k w^2$$
$$+ (6u+1-k^2)w + 6u_x + 2\alpha\bar{u}_t - 2\alpha k u = 0, \tag{3.2b}$$

$$\left(\bar{u} = \int_{-\infty}^{x} u\,dx, \quad \alpha = \pm\sqrt{3}\,i\right).$$

保存則は、(3.2)を使って以下のように導かれる。

$$w = -2\alpha \sum_{j=1}^{\infty} w_j k^{-j}, \tag{3.3}$$

$$I_j = \int_{-\infty}^{\infty} w_j \, dx, \tag{3.4}$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u \, dx, \quad I_2 = -\int_{-\infty}^{\infty} v \, dx, \quad \left(v = \int_{-\infty}^{x} u_t \, dx \right),$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} u \, dx, \quad I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} (6uv - v) \, dx, \cdots . \tag{3.5}$$

次に保存則を、1-ソリトン解

$$u_1 = 2a^2 \operatorname{sech}^2 a(x - ct - x_0), \quad c = \pm (1 + 4a^2)^{1/2}, \tag{3.6}$$

に対して評価するために、$w = w(y)$, $y = a(x - ct - x_0)$ とおいて(3.2a)へ代入すると

$$\alpha \left(a w_y + \frac{1}{2} w^2 \right) + (k - c) w + 4\alpha a^2 \operatorname{sech}^2 y = 0. \tag{3.7}$$

さらに $w = 2a\, G_y / G$, $z = (1 - \tanh y)/2$ で変数変換すると

$$z(1 - z) G_{zz} + (1 + \sigma - 2z) G_z + 2G = 0, \tag{3.8}$$

$$(\sigma = (c - k)/2\alpha a),$$

となる。(3.8)は、超幾何方程式

$$z(1 - z) G_{zz} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1) z] G_z - \alpha\beta G = 0, \tag{3.9}$$

で、$\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 1 + \sigma$ と置いた方程式と一致する。従って $G(\pm 1) =$ 有限となるような(3.8)の解は

$$G = 1 - \frac{2}{1 + \sigma} z, \tag{3.10}$$

で与えられる。ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} w \, dx = 2 [\ln G]_{z=1}^{z=0} = 2 \ln \frac{c - k + 2\alpha a}{c - k - 2\alpha a} = -2\alpha \sum_{j=1}^{\infty} I_j k^{-j}. \tag{3.11}$$

これから直ちに次が得られる。

$$I_{2n+1} = \frac{4a}{2n+1} \sum_{r=0}^{n} (4a^2)^r \sum_{m=0}^{r} (-3)^m \binom{2n+1}{2m+1} \binom{n-m}{r-m}, \quad (n = 0, 1, \cdots), \tag{3.12a}$$

$$I_{2n}=\frac{2ac}{n}\sum_{r=0}^{n-1}(4a^2)^r\sum_{m=0}^{r}(-3)^m\binom{2n}{2m+1}\binom{n-m-1}{r-m},\ (n=1,2,\cdots). \quad (3.12b)$$

ここで、$\binom{n}{m}=\frac{n!}{(n-m)!\,m!}$ は2項係数を表わす。

(3.12) は次のようにも書きかえることができる。

$$I_j=\frac{4}{\sqrt{3}j}\sum_{r=0}^{[(j-1)/2]}\binom{j}{r}\sin\frac{\pi}{3}(j-2r)\sinh(j-2r)\theta,\quad (j=1,2,\cdots), \quad (3.13)$$

$$\left(a=\frac{1}{2}\sinh\theta\right).$$

(3.13) を用いると、$j=3n$ ($n=1,2,\cdots$) のとき I_j は、I_1, I_2, $\cdots$, I_{3n-1} の一次結合で表わせることが示せる。 従って、I_{3n} ($n=1,2,\cdots$) は他の I_j とは代数的に独立とはならない。 この結果は (3.5) からも予想できる。

3.2 浅水波のモデル方程式

$$u_t+u_x-2uu_t+2u_x\int_x^{\infty}u_t\,dx-u_{txx}=0. \quad (3.14)$$

BT、および保存則は以下のようになる。

BT

$$w_t+\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{x}w_t\,dx-(6k)^{-1}w+2\bar{u}_t-1=0, \quad (3.15a)$$

$$w_{xx}+(w_x+2u-1)w+\frac{1}{9}w^3=6(k-4k^3). \quad (3.15b)$$

保存則

$$w=-6k+\sum_{j=1}^{\infty}w_j k^{-j}, \quad (3.16)$$

$$I_j=\int_{-\infty}^{\infty}w_j\,dx, \quad (3.17)$$

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}u\,dx,\quad I_3=\frac{1}{12}\int_{-\infty}^{\infty}u\,dx,$$

$$I_5=-\frac{1}{108}\int_{-\infty}^{\infty}\left(u^3-\frac{3}{2}u^2-\frac{3}{2}u_x^2-\frac{3}{4}u\right)dx. \quad (3.18)$$

保存則を、1-ソリトン解

$$u_1 = 3a^2 \operatorname{sech}^2 a(x - ct - x_0), \quad c = (1-4a^2)^{-1}, \qquad (3.19)$$

で評価すると次のようになる。

$$I_{2n+1} = \frac{12^{-(n+1)}}{2\sqrt{3}(2n+1)} \sum_{r=0}^{n} (2a)^{2r+1} \sum_{s=0}^{n-r} \frac{(-1)^s(2r+2s+1)}{2r+2s+1} \binom{2(n-r-s)+1}{n-r-s} \times$$
$$\times \binom{2r+s+1}{s} \cos\frac{\pi}{6}[2(r+s)+1], \quad (n=0,1,\cdots), \qquad (3.20a)$$

$$I_{2n} = 0, \quad (n=1,2,\cdots). \qquad (3.20b)$$

(3.20a)は以下のようにも書きかえられる。

$$I_{2j+1} = \frac{2^{-(2j-1)}\,3^{-(2j-1)/2}}{2j+1} \sum_{r=0}^{j} \binom{2j+1}{r} \cos\frac{\pi}{6}(2j-2r+1) \times$$
$$\times \cos(2j-2r+1)\theta, \quad (a = \cos\theta). \qquad (3.21)$$

(3.21)を用いると、$j = 3(2n+1)$, $(n=0,1,\cdots)$ のとき I_j は他と代数的に独立でないことがわかる。

4. Sawada-Kotera方程式、およびKaup方程式

4.1 Sawada-Kotera方程式

$$u_t + 30(uu_{xxx} + u_x u_{xx}) + 180u^2 u_x + u_{xxxxx} = 0. \qquad (4.1)$$

BT、および保存則は以下のように書ける。

BT

$$w_t = \frac{3}{2}\left[(-12u_x + 6k^3)(w_x + w^2) + (4u_{xx} - 24u^2)w + 24k^3 u\right]_x, \qquad (4.2a)$$

$$w_{xx} + 3ww_x + 6uw + w^3 = k^3. \qquad (4.2b)$$

保存則

$$w = k + \sum_{j=1}^{\infty} w_j k^{-j}, \qquad (4.3)$$

$$I_j = \int_{-\infty}^{\infty} w_j \, dx \, , \tag{4.4}$$

$$I_1 = -2\int_{-\infty}^{\infty} u \, dx \, , \quad I_5 = \frac{8}{3}\int_{-\infty}^{\infty} (u^3 - \frac{1}{2} u_x^2) dx \, ,$$

$$I_7 = \frac{16}{3}\int_{-\infty}^{\infty} (u^4 - \frac{3}{2} u u_x^2 + \frac{1}{12} u_{xx}^2) dx \, . \tag{4.5}$$

保存則を次の1-ソリトン解

$$u_1 = a^2 \operatorname{sech}^2 a(x - 16a^4 t - x_0) \, , \tag{4.6}$$

で評価するために、3.1のBoussinesq方程式のところで用いたのと同じ変換をすると、(4.2a)は以下のようになる。

$$9z(1-z)[16z(1-z)(1-2z) + \kappa^3] G_{zz}$$

$$-\{3\kappa[48z(1-z)(1-2z) + 3\kappa^3] - 96z(1-z)$$

$$-9\kappa^3(1-2z) + 8\} G_z$$

$$+\{-\kappa[288z(1-z)-24] + 36\kappa^2(1-2z) + 36\kappa^3\} G = 0 \, , \tag{4.7}$$

$$(\kappa = k/a) \, .$$

(4.7)の解の漸近形を用いると

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (w - k) \, dx = -\ln [G(1)/G(0)]$$

$$= -\ln \frac{3\kappa^2 + 6\kappa + 4}{3\kappa^2 - 6\kappa + 4} = 4 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{3}(j+1)}{2j+1} \left(\frac{2a}{\sqrt{3}k}\right)^{2j+1} , \tag{4.8}$$

が得られる。従って

$$I_{2j+1} = \frac{4}{2j+1} \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^{2j+1} \sin \frac{\pi}{3}(j-1) \, , \; (j = 0, 1, \cdots) \, , \tag{4.9a}$$

$$I_{2j} = 0 \, , \; (j = 1, 2, \cdots) \, . \tag{4.9b}$$

(4.9)より、I_{2j} $(j=1,2,\cdots)$、および $I_{3(2j+1)}$, $(j=0,1,\cdots)$ は恒等的に零となる。

4.2 Kaup方程式

$$u_t + 30\left(u u_{xxx} + \frac{5}{2} u_x u_{xx}\right) + 180 u^2 u_x + u_{xxxxx} = 0. \quad (4.10)$$

BTは次のように書ける。

$$u_t = [9k^3(w_x + w^2) - 3(u_{xx} + 12u^2)w$$

$$+ 3(u_{xxx} + 12k^3 u + 12 u u_x)]_x, \quad (4.11a)$$

$$w_{xx} + 3ww_x + w^3 + 6uw + 3u_x = k^3. \quad (4.11b)$$

1-ソリトン解

$$u_1 = \frac{2a^2(2\cosh 2y + 1)}{(\cosh 2y + 2)^2}, \quad (y = a(x - 16a^4 t - x_0)), \quad (4.12)$$

を、BTの時間部分に代入して計算すると、Sawada-Kotera方程式の場合と全く同じ保存則の評価式、(4.9)が得られる。

5. Ito方程式

$$u_{tt} + u_{txxx} + 3(2u_t u_x + u u_{tx}) + 3u_{xx}\int_{-\infty}^{x} u_t\, dx = 0. \quad (5.1)$$

BT、および保存則は以下のように書ける。

BT

$$w_t + \left(\int_{-\infty}^{x} w_t\, dx\right) w + \bar{u}_t = 0, \quad \left(\bar{u} = \int_{-\infty}^{x} u\, dx\right), \quad (5.2a)$$

$$\int_{-\infty}^{x} w_t\, dx + w_{xx} + 3ww_x + 3uw + w^3 = k^3. \quad (5.2b)$$

保存則

$$w = k - \sum_{j=1}^{\infty} w_j k^{-j}, \quad (5.3)$$

$$I_j = \int_{-\infty}^{\infty} w_j\, dx, \quad (5.4)$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u\, dx, \quad I_3 = -\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} v\, dx,$$

$$I_5 = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} (u^3 - u_x^2 + 2uv) dx, \quad (v = \int_{-\infty}^{x} u_t \, dx). \tag{5.5}$$

1-ソリトン解

$$u_1 = 2a^2 \operatorname{sech}^2 a(x - 4a^2 t - x_0), \tag{5.6}$$

で保存則を評価すると

$$I = -\ln \frac{1-2(a/k)}{1+2(a/k)} = 2\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2a)^{2j+1}}{2j+1} k^{-j}, \tag{5.7}$$

$$I_{2j+1} = \frac{2}{2j+1}(2a)^{2j+1}, \quad (j=0,1,\cdots) \tag{5.8a}$$

$$I_{2j} = 0, \quad (j=1,2,\cdots). \tag{5.8b}$$

従って、奇数番目の保存則のみが代数的に独立である。

6．議　論

ここでは、ソリトン方程式の保存量をN-ソリトン解に対して評価するひとつの方法を提案し、これにより保存則の性質、特に代数的独立性を論じた。保存則は本来、任意の初期条件に対応する一般解に対して成立するので、保存則の独立性に関するここでの議論は十分ではない。しかしながら、種々のソリトン方程式の低次の保存則を調べてみると、ここで得られた結論は一般解に対しても成立しているように思われる。

ソリトン方程式の構造を保存則からの情報を用いて調べる場合、特に注意を要することは、構造の異なるKdV方程式とI士o方程式の保存則の評価式が一致することからもうかが

える((2.9)、および(5.8)参照)。しかしこの事実はKP方程式系の一般論(W. Strampp et al RIMS Kokyuroku 684 (1989) 160)から次のようにして説明される。KdV方程式は、KP方程式系の2-reductionで得られ、それに対しては、$I_{2j} \equiv 0$ ($j=1,2,\cdots$)。他方Ito方程式は、BKP方程式系の6-reductionから導かれ、この場合$I_{2j} \equiv 0$, $I_{6j} \equiv 0$ ($j=1,2,\cdots$)となる。従って、いずれの場合も偶数番目の保存則が恒等的に零となる。

なお、ここでの議論の詳細については

Y. Matsuno : J. Phys. Soc. Japan 59 (1990) No. 9

を参照して下さい。