数理解析研究所講究録
第741巻 1991年 43-49

スタンダードブラウン運動における停止時刻ゲーム問題の分割

千葉大・教養 安田正実 (Masami YASUDA)

はじめに

時間一様な一次元確率過程，とくに standard Brownian motion にたいする最適停止時刻問題を考える．もし利得も時刻によらないなど適当な仮定があるならば，最適政策は，状態だけの関数で閾値型 (threshold policy, control limit policy) となる．例えば，利得関数が増加関数であるときの最小化問題では，状態の値が小さいうちは継続であるが，大きくなると停止という決定を下すのが自明な最適となる．

一方，ゲーム問題として最適停止時刻問題を変形した停止ゲーム問題の場合においても，具体的な閾値型として最適戦略が定められると予想されよう．本報告では，停止ゲーム問題における最適政策の閾値を定め，さらにゲーム値を2つの最適停止問題に分割することを考える．

1. Introduction

簡単にするため，ここではゼロ和ゲーム問題を対象とする．競争的状態にある2人プレイヤーが混合戦略でなく，単純戦略で均衡していて，2人プレイヤーそれぞれの決定が状態の関数である閾値型となるようなゲーム問題を取り扱う．原点にほぼ対称的様相となるような条件を仮定し，ゲーム問題の停止継続の領域を分割する．分割されたものは，それぞれ通常の最適停止問題となる．つまり，与えられた停止ゲーム問題を，適当な2つの最適停止問題に分離をする．この状況に対応した最適戦略は，数直線上の原点を中心とした部分では

継続で，左右の半無限区間では停止という決定をする．このようなゲームの戦略はごく自然なものと考えられる．

ごく簡単な確率過程として standard Brownian motion:$\{x_t; t \geq 0\}$,

(1.1) $$x_t = \mu dt + \sigma dw_t, \quad x_0 = x$$

（ただし $\mu, \sigma \neq 0$ は定数とする）をあつかうことにする．この system における停止ゲーム問題 ([2],[5]など) の定式化から述べよう．

3つの payoff : $\varphi(x), \psi(x), \chi(x); -\infty < x < \infty$ と2つの stopping time: τ, σ にたいして，プレイヤー1は τ を選んで期待利得の最小化，プレイヤー2は σ を選んで最大化を図るとする．ゼロ和ゲームとしての均衡を考え，

(1.2) $$\begin{aligned} \overline{w}(x) &= \inf_{0 \leq \tau < \infty} \sup_{0 \leq \sigma < \infty} E^x[R(\tau, \sigma)] \\ \underline{w}(x) &= \sup_{0 \leq \sigma < \infty} \inf_{0 \leq \tau < \infty} E^x[R(\tau, \sigma)] \end{aligned}$$

を定義する．ただし

$$R(\tau, \sigma) = e^{-\alpha\tau}\varphi(x_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau<\sigma\}} + e^{-\alpha\sigma}\psi(x_\sigma)\mathbf{1}_{\{\tau>\sigma\}} + e^{-\alpha\tau}\chi(x_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau=\sigma\}}$$

で $\mathbf{1}_{\{A\}}$ は A の indicator, E^x は初期値 $x_0 = x$ とした条件つき期待値とする．

仮定 1. 3つの payoff について

(1.3) $$\varphi(x) < \chi(x) < \psi(x); \quad -\infty < x < \infty.$$

この仮定があれば, (1.2) の2つの値は一致するから，それを $w(x)$ とおけば，$w(x) = \overline{w}(x) = \underline{w}(x)$ が知られている ([12]など)．つまり，ゼロ和行列ゲームが確定し，これらの minmax， maxmin 値 は等しい．このゲーム値を payoff 行列にたいする記号 val をもちいると, 動的計画法の最適方程式に相当する式が得られる:

(1.4) $$\mathrm{val}\begin{bmatrix} \chi - w & \varphi - w \\ \psi - w & Aw - \alpha w \end{bmatrix} = 0$$

ただし $\mathcal{A}w = \dfrac{\sigma^2}{2}w'' + \mu w'$. さらにゲーム問題の最適戦略は, 混合戦略でなく単純戦略の中に存在し,

$$w = \varphi, \qquad w = \psi \qquad \& \qquad \mathcal{A}w - \alpha w = 0$$

しか起らないことが知られている ([18]). これらの等式が成り立つ領域は, それぞれプレイヤー1の stop, プレイヤー2の stop および 両方の continue region を表している. また双方同時に stop することが起らないことも意味している. したがって payoff にある程度の仮定を設ければ, 数直線が3つの区間に分割されることが期待される. このときには, 区間が3つに分れるのであるから, 2つの閾値 z_1, z_2 と関数 w を求める two obstacle problem ([11]) とよばれる自由境界問題である. したがって適当な条件のもとで, 関数 $w = w(x); -\infty < x < \infty$ と値 z_1, z_2 が

$$\begin{aligned} w(x) &= \varphi(x) \quad \text{for} \quad z_1 < x \\ w(x) &= \psi(x) \quad \text{for} \quad x < z_2 \\ \mathcal{A}w(x) - \alpha w(x) &= 0 \quad \text{for} \quad z_2 \le x \le z_1 \end{aligned} \tag{1.5}$$

を満たすように定める問題, 自由境界問題に帰着される.

ここではさらに, この停止ゲーム問題のゲーム値 $w = w(x)$ を分割することを考える. もし上のように解が与えられるならば, その形から分るように数直線上の右の部分はプレイヤー1だけの最小化停止問題であり, 左の部分はプレイヤー2の最大化停止問題とみなせる. したがって, つぎの節では それぞれがこのゲーム問題に対応するような最適停止問題の構成を考えることにする.

2. Two optimal stopping problems

つぎの2つは, いわゆる最適停止問題であるが, 原点で吸収をさせ, 正の部分だけ, あるいは負の部分だけに領域を制限している. あらかじめ, 原点での利得 k と2つの関数 φ, ψ は与えられたとする.

プレイヤー1の利得 φ の最小化問題 (I) :

$$u(x) = u(x;k) = \inf_{0 \le \tau < \infty} E^x[\varphi(x_\tau)e^{-\alpha\tau}\mathbf{1}_{\{\tau < \sigma_0\}} + ke^{-\alpha\sigma_0}\mathbf{1}_{\{\sigma_0 \le \tau\}}], \quad x \ge 0 \tag{2.1}$$

プレイヤー 2 の利得 ψ の最大化問題 (II) :

(2.2) $$v(x) = v(x;k) = \sup_{0\le\sigma<\infty} E^x[\psi(x_\sigma)e^{-\alpha\sigma}\mathbf{1}_{\{\sigma<\tau_0\}} + ke^{-\alpha\tau_0}\mathbf{1}_{\{\tau_0\le\sigma\}}], \quad x \le 0$$

ただし それぞれの問題で $\tau_0 = \inf\{t \ge 0; x_t \le 0\}$, $\sigma_0 = \inf\{t \ge 0; x_t \ge 0\}$ とする.

仮定 2. 2 つの関数 $\varphi(x), \psi(x)$ についてそれぞれの領域について

(2.3) $$\begin{aligned} \mathcal{A}\varphi(x) - \alpha\varphi(x) > 0 \quad &\text{for} \quad x > 0 \\ \mathcal{A}\psi(x) - \alpha\psi(x) < 0 \quad &\text{for} \quad x < 0 \end{aligned}$$

を仮定する.

補題 2.1. (1) 問題 (I),(II) にたいする最適方程式はそれぞれ，つぎで与えられる：

(2.4) $$\begin{aligned} &\min\{\mathcal{A}u(x) - \alpha u(x),\ \varphi(x) - u(x)\} = 0 \quad \text{for} \quad x > 0, \qquad u(0) = k \\ &\max\{\mathcal{A}v(x) - \alpha v(x),\ \psi(x) - v(x)\} = 0 \quad \text{for} \quad x < 0, \qquad v(0) = k \end{aligned}$$

(2) 最小化問題 (I) の stop region は $(0,\infty)$, 最大化問題 (II) の stop region は $(-\infty,0)$ に含まれる.

(*proof*) (1) はよく知られた最適方程式で, 原点では吸収が起こるから，利得 k を得る関係式が加わる. (2) は Dynkin formula を用いた Infinitesimal Looking Ahead policy([14]) を考えてみると，続ければ続けるほど期待利得が減少あるいは増加をするから，これらの領域は最大化, 最小化を考えると stop region になる. しかし Process の変動が単調ではないから, ILA policy での意味で closed になっていない. したがってそれぞれの領域のなかで, ある部分領域が最適な stop region である.

記号. λ_1, λ_2 と関数 $C_1(x;f), C_2(x;f), C(x;f)$ の定義

(i) 実数 λ_1, λ_2 とは $\lambda_1 \ge \lambda_2$ で$\sigma^2\lambda^2 + 2\mu\lambda - 2\alpha = 0$ の 2 実数解とする.

(ii) 関数 $f = f(x), -\infty < x < \infty$ にたいし,

(2.5) $$\begin{aligned} C_1(x;f) &= \frac{e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}\{f'(x) - \lambda_2 f(x)\} \\ C_2(x;f) &= \frac{e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}\{\lambda_1 f(x) - f'(x)\} \\ C(x;f) &= C_1(x;f) + C_2(x;f) \end{aligned}$$

を定める.

この関数を用いると, 最適停止問題 (I),(II) の最適値を表現できる.

補題 2.2.

$$u(x;k)=\begin{cases} C_1(z_1;\varphi)e^{\lambda_1 x}+C_2(z_1;\varphi)e^{\lambda_2 x} & 0\le x\le z_1 \\ \varphi(x) & x\ge z_1 \end{cases} \tag{2.6i}$$

ここで z_1 は k に依存して $k=C(z_1;\varphi)$. 同様に

$$v(x;k)=\begin{cases} C_1(z_2;\psi)e^{\lambda_1 x}+C_2(z_2;\psi)e^{\lambda_2 x} & z_2\le x\le 0 \\ \psi(x) & x\le z_2 \end{cases} \tag{2.6ii}$$

また z_2 は k に依存して $k=C(z_2;\psi)$.

(*proof*) この standard Brownian motion は regular であるから, 最適値が連続微分可能. したがって smooth fit([17]) が成り立っているから, $u(x)=\varphi(x)|_{x=z_1}, u'(x)=\varphi'(x)|_{x=z_1}$ を解いて (2.6i) を得る. 同様に (2.6ii) は $v(x)=\psi(x)|_{x=z_2}, v'(x)=\psi'(x)|_{x=z_2}$ から得られる.

3. Separation of the stopping game problem

2つの最適停止問題を合併させ, 2つを分けている原点での整合性をもたせなければならない. ゆえに, k の値をうまく定める必要が生じる. そのためにある非線形連立方程式を考える. 状態空間を正と負の部分に分割したから, 方程式では $\{(z_1,z_2);z_1>0,z_2<0\}$ における解に注目する.

補題 3.1. 関数 φ,ψ が (2.3) を満たすよう与えられたとき, つぎの $\{(z_1,z_2);z_1>0,z_2<0\}$ に関する連立方程式;

$$C_1(z_1;\varphi)=C_1(z_2;\psi),\qquad C_2(z_1;\varphi)=C_2(z_2;\psi) \tag{3.1}$$

は高々一つの解をもつ.

(*proof*) まず (2.5) を微分すると, それぞれ

$$C_1'(x;f)=\frac{2e^{-\lambda_1 x}}{(\lambda_1-\lambda_2)\sigma^2}\{\mathcal{A}f(x)-\alpha f(x)\}$$
$$C_2'(x;f)=\frac{-2e^{-\lambda_2 x}}{(\lambda_1-\lambda_2)\sigma^2}\{\mathcal{A}f(x)-\alpha f(x)\}$$

となる. これから φ, ψ の仮定 1 より, $C_1(x;\varphi)$ は strictly increasing, $C_1(x;\psi)$ は strictly decreasing. したがって曲線 $\{(x,y); C_1(x;\varphi) - C_1(y;\psi) = 0\}$ は $\{x > 0, y < 0\}$ で x が増加すると y は減少する. 同様に $C_2(x;\varphi)$ は strictly decreasing, $C_2(x;\psi)$ は strictly increasing であるから, 曲線 $\{(x,y); C_2(x;\varphi) - C_2(y;\psi) = 0\}$ は x が増加すると y も増加する. 単調性により, 2 点で交わることは起らない.

定理 3.2. 連立方程式 (3.1) の解 z_1, z_2 が存在すれば, 停止ゲーム問題のゲーム値 $w(x)$ は 2 つの最適停止問題の最適値に分離することができる. すなわち

$$w(x) = \begin{cases} u(x;k) & x \geq 0 \\ v(x;k) & x \leq 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

ただし $k = C(z_1;\varphi) = C(z_2;\psi)$.

(*proof*) 仮定 (1.3) と仮定 (2.3) により, $w = w(x); -\infty < x < \infty$ は stop region では

$$w(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \geq z_1 \\ \psi(x) & x \leq z_2 \end{cases}$$

また continue region では $\mathcal{A}w(x) - \alpha w(x) = 0;\ z_2 < x < z_1$ の形で, 境界の点では smooth fit が成り立っている. もし z_1 と z_2 が上の連立方程式の解であれば, 補題 2.2 により, 2 回連続微分可能で接続することができる. したがって原点での k の値の定め方から, (3.2) の表現を得る.

参考文献

[1] Bather, J.; *Optimal stopping problems for Brownian motion*, Adv. Appl. Prob.,**2** (1970) 259-286.

[2] Bismut, J. M.; *Sur un probleme de Dynkin*, Z. Wahr. Verw Gebiete **39** (1977) 31-53.

[3] Benes, V. E., Shepp, L. A. and Witsenhausen, H. S.; *Some solvable stochastic control problems*, Stochastics **4** (1980) 39-83.

[4] Bensoussan, A. and Lions, J. L.;*Nouvelles Methodes en Control Impulsionnel*, Appl. Math. Optim. **1** (1975) 289-312.

[5] Dynkin, E. B.;*Game variant of a problem on optimal stopping*, Soviet Math. Dokl. **10**(1969) 270-274.

[6] Harrison, J. M.;Brownian motion and stochastic flow systems, John Wiley, New York, 1985.

[7] Harrison, J. M., Selleke, T. M. and Taylor, A. J.; *Impulse Conrtol of Brownian Motion*, Math. Oper. Res. **8** (1983) 454-466.

[8] Heyman, D. P. and Sobel, M.;Stochastic Models in Operations research, II: *Stochastic Optimization*, McGraw-Hill, 1982.

[9] Karatzas, I. and Shreve, S. E.;*Equivalent models for finite-fuel stochastic control*, Stochastics **18** (1986) 245-276.

[10] Karatzas, I.;*Gittens indices in the dynamic allocation problem for diffusion processes*, Ann. Prob. **12** (1984) 173-192.

[11] Kinderlehrer, D.,Stanpacchia, G;An Introduction to Variational Ineqalities and their Applications, Academic Press, 1980, New York.

[12] Neveu, J.;Discrete-Parameter Martingales, North-Holland, 1975, Amsterdam.

[13] Ohtsubo, Y.;*Neveu's martingale conditions and closedness in Dynkin stopping problem with a finite constraint*, Stoch. Proc. Appli. **22**(1986) 333-342.

[14] Ross, S. M.;Applied Probability Models with Optimization Applications, Holden Day, 1970, San Francisco.

[15] Stanerfozo, R.;*Monotone optimal policies for Markov decision processes*, Math. Prog. Study **6** (1976) 202-215.

[16] Stettner, L.;*On closedness of general zero-sum stopping game*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **32**(1984) 351-361.

[17] Van Moerbeke, P.;*On optimal stopping and free boundary problems*, Arch. Rat. Mech. Anal. **60** (1976) 101-148.

[18] Yasuda, M.;*On a randomized strategy in Neveu's stopping problem*, Stoch. Proc. Appli. **21**(1985) 159-166.