数理解析研究所講究録
742巻 1991年 1-7

青本, Gel'fand の hypergeometric function の determinant について.

千葉大・教 寺杣友秀
マンハイム大.

1 Introduction.

織田氏との共著の論文の中で、構成された、Braid群の表現、及び、その determinant に関する研究は、自然に、一般組紐群 (= generalized braid group) の表現の構成、その determinant に関する研究へと、一般化される。determinant というものは、与えられた表現の Abel 的な部分のみを扱っているので、もちろん、表現に関して、知るには、不十分であるが、いわゆる"一般 Magnus 表現"の determinant 及び その Hodge analogue とも言える、青本－Gel'fand の hypergeometric function の determinant は、Jacobi 和や、Γ-関数、Discriminant 等の重要かつ興味深い invariant を含む。

著者が話した determinant に関する結果は、すでに、独立に、Varchenko 氏により発見されており (1989年) 事実としては、知られていたが、Braid 群の Monodromy 表現として、それを見る時、それは、Galois 表現とも関連づけられる。Varchenko 氏の手法は、Configuration に対して、pencil をつくるという仕方で、これらのものをとらえているが、この考え方は、F. Loeser 氏によって、$\mathbb{Q}_\ell$ sheaf の場合に、analogy がなされた。彼は、これによって、有限体上のあるゼータ関数に関する等式を、Fourier 変換を使い示した。Loeser 氏の証明は、やはり、Configuration

の Pencil を使う、美しい手法でなされる。
さて、少し話は変わるが、Hypergeometric function には、q-analogue が存在する。Γ関数、Beta関数が、自然に q-analogue に拡張される様に、hypergeometric function も q-analogue に拡張される。これについても織田-T.-の類似が存在することが最近示された。(準備中) 最近の青本氏の Selberg integral の q-analogue の論文には、b-関数の q-analogue が現われる。これらのものは、何か新しい configuration space, q-analogue 等の、新古典的対象の存在を、予想させる様に思われる。

2. 青本-Gel'fand の hypergeometric function の determinant

初めに、Configuration に関する Notation を定めよう。
m, n を、$m > n+1$ なる整数とする。$A = (a_{ij})$ を、$M(m \times (n+1))$ の元とする。A が条件

$$(*) \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} & A & \\ 0 & \cdots 0, & 1 \end{pmatrix}$$ のすべての $(n+1)$-小行列式が 0 でない

を満たすとする。$\mathbb{C}^n$ を、$\mathbb{P}^n$ の open set $= \{(x_0 : \cdots : x_n) \mid x_0 \neq 0\}$ と見ると、$\mathbb{C}^n$ 内の hyperplane $H_i^0 = \{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + a_{i,n+1} = 0\}$ $(i = 1, \cdots, m)$ の closure H_i は、$\mathbb{P}^n$ 内の projective hyperplane を定める。$H_\infty = \mathbb{P}^n - \mathbb{C}^n$ とする。
この時、条件(*)は、$H_1 \cup \cdots \cup H_m \cup H_\infty$ が $\mathbb{P}^n$ 内で、normal crossing になることと同値である。
$\tilde{X}$ を、$X = \mathbb{C}^n - \bigcup_{i=1}^m H_i^0$ 上の covering で、
$\exp(w_i) = L_i(x) \quad (i = 1, \cdots, m)$
で定義されたものとする。

<u>Definition</u> (Schur function)

Ωを indexset $\Omega = \{(i_1, \cdots, i_n) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq m-1\}$ とする。Ωの元，Jに対して．$t_1, \cdots, t_n$の関数 t_Jを．$(J = (j_1, \cdots, j_n)$ とする$)$

$$t_J = \det \begin{pmatrix} t_1^{j_1-1}, & \cdots, & t_1^{j_n-1} \\ \\ t_n^{j_1-1}, & \cdots, & t_n^{j_n-1} \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} 1 \cdots\cdots & t_1^{n-1} \\ \\ 1 \cdots\cdots & t_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

で定義すると．$t_1, \cdots t_n$に関する対称式なので，基本対称式の多項式として．uniqueに書き表わされる x_iを．$t_1, \cdots, t_n$の i次基本対称式として，t_Jを．$S_J(x_1, \cdots, x_n)$ と表わす時．S_Jを Schur polynomial と言う．さて．今から．$\tilde{X}$上の differential form 及び，chainを定義しよう．$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in \mathbb{C}^m$を．$Re(\alpha_i) > 0$を満たすベクトルとする。

<u>Definition of differential form ω_J on $\tilde{X}$</u>

$\tilde{X}$を $\exp(w_i) = L_i(x_1, \cdots, x_n)$とする。Jを．$\Omega$の元とする時．$\tilde{X}$上の differential form ω_Jを．

$$\omega_J = \prod_{j=1}^{m} \exp\{(\alpha_i - 1) w_j\} \underbrace{S_J(x_1, \cdots, x_n)}_{dx_n \wedge \cdots \wedge dx_1}$$

とおく。

Definition of Chain $\tilde{D}_I$

I を $\mathcal{O}$ の元とする。$M(m\times(n+1),\mathbb{C})$ 内の (*) を満たす元からなる集合を、$M^\circ(m\times(n+1),\mathbb{C})$, $M^\circ(m\times(n+1),\mathbb{C})\cap M(m\times(n+1),\mathbb{R}) = M^\circ(m\times(n+1),\mathbb{R})$ とおく。

$M_S^\circ = \{(\lambda_1,\cdots,\lambda_m) \mid \lambda_i \neq \lambda_j,\ \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ の元、

$(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ は、$M^\circ(m\times(n+1),\mathbb{R})$ の元、

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \lambda_1^n \\ & & \\ 1 & \cdots & \lambda_m^n \end{pmatrix}$$ を定める。

これにより定まる写像 $M_S^\circ \longrightarrow M^\circ(m\times(n+1),\mathbb{R})$ の chamber $\{(\lambda_1,\cdots,\lambda_m) \mid \lambda_1<\cdots<\lambda_m\}$ の像を含む $M^\circ(m\times(n+1),\mathbb{R})$ の connected component を M_0 と書く。

$A\in M_0$ とする。$I\in\mathcal{O}$ の元とすると、$\mathbb{R}^n$ 内の領域

$$D_I = \{(x_1,\cdots,x_n) \mid (-1)^{p-1}L_{i_p}(x_1,\cdots,x_n)>0,\quad (-1)^p L_{i_p+1}(x_1,\cdots,x_n)>0 \quad \text{for all } p=1,\cdots,n\}$$

は、relatively compact である。又、Covering $\tilde{X}\longrightarrow X=\mathbb{C}^n-\bigcup_{i=1}^m H_i$ を考えた時、D_I の $\tilde{X}$ への lifting $\tilde{D}_I$ は、

(1) $(x_1,\cdots,x_n)\in D_I$

(2) $\omega_j \in \mathbb{R}-\mu\pi i$、ここで、$\mu=\#\{k \mid j_k<j\}$

なる条件で unique に定まる。

又、$\tilde{X}$ 上の differential form ω_J 及び、chain $\tilde{D}_I$ が $\mathcal{O}$ の元 I, J に対して定義されたので、その行列式

$\det\left(\int_{\tilde{D}_I}\omega_J\right)$ が考えられる。

Main Theorem を述べる前に、いくつかの小行列式の定義をしよう。 Index set $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_\infty$ をそれぞれ、

$$\mathcal{C} = \{(i_1, \cdots, i_{n+1}) \mid 1 \leqq i_1 < \cdots < i_{n+1} \leqq m\}$$

$$\mathcal{C}_\infty = \{(i_1, \cdots, i_n) \mid 1 \leqq i_1 < \cdots < i_n \leqq m\}$$

とする。$\mathcal{C}$ の元 I 及び $\mathcal{C}_\infty$ の元 I' に対して、D_I, $D_{I'}$ をそれぞれ、

$$D_I = \det \begin{pmatrix} a_{i_1,1} \cdots & a_{i_1,n+1} \\ \vdots & \\ a_{i_{n+1},1}, \cdots, & a_{i_{n+1},n+1} \end{pmatrix}$$

$$D_{I'} = \det \begin{pmatrix} a_{i_1,1}, \cdots & a_{i_1,n} \\ \vdots & \\ a_{i_n,1}, \cdots, & a_{i_n,n} \end{pmatrix}$$

と定義する。また、$I \in \mathcal{C}$, $I' \in \mathcal{C}_\infty$ として、α_∞, α_I, $\alpha_{I'}$ をそれぞれ、 $\alpha_\infty = -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i$, $\alpha_I = \sum_{i \in I} \alpha_i$, $\alpha_{I'} = \sum_{i \in I'} \alpha_i + \alpha_\infty$ で定義する。

<u>Theorem</u> 周期行列 $\left(\int_{\tilde{D}_I} \omega_J\right)$ の行列式は、

$$\det\left(\int_{\tilde{D}_I} \omega_J\right) = \frac{\prod_{I \in \mathcal{C}} D_I^{\alpha_I} \cdot \prod_{I' \in \mathcal{C}_\infty} D_{I'}^{\alpha_{I'}}}{\prod_{I \in \mathcal{C}} D_I} \times$$

$$\prod_{i=1}^{m} \exp\left(N(1-i)\alpha_i \pi\sqrt{-1}\right) \times \left(\frac{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}\right)^N$$

で与えられる。ここで $N = {}_{m-2}C_{n-1}$.

さて、定理の Braid 群の表現論的な意味であるが、それは、次の様に解釈できる。

$\mathcal{M}_{\mathbb{C}} = M^{\circ}(m\times(n+1), \mathbb{C})$ 上に、各 $A\in\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ に対して、$\tilde{X}$ を対応させることにより、$\tilde{X}$ の family $\tilde{\mathfrak{X}}$ ができる。具体的に、

$$\tilde{\mathfrak{X}} = \{(w_i, x_j, A) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \times \mathcal{M}_{\mathbb{C}} \mid \exp(w_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j + a_{i,n+1},\ i=1,\cdots,m\}$$

で与えられる。Structure morphism を $\varphi : \tilde{\mathfrak{X}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ とする。この時、$R^n\varphi_*\mathbb{Z}$ は、$\pi_1(\mathcal{M}_{\mathbb{C}})$-module となる。また、$\tilde{\mathfrak{X}}$ には、$\sigma_j : w_i \longmapsto w_i + \delta_{ij}$ $(j=1,\cdots,m)$ によって、$\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ 上の $G = \bigoplus_{i=1}^{m}\mathbb{Z}\sigma_i$ action が存在する。かくして、$\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ の点 $\eta = [A]$ を1つ fix すれば、$H^n(\tilde{\mathfrak{X}}_\eta, \mathbb{Z})$ は、$G\times\pi_1(\mathcal{M}_{\mathbb{C}}, \eta)$ module の構造をもつ。よって、G の群環 $\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}[\sigma_1^{\pm1}, \cdots, \sigma_m^{\pm1}]$ を A、その商体を K と書く。

<u>Proposition</u> $H^n(\tilde{\mathfrak{X}}_\eta, \mathbb{Z}) \otimes_A K$ は、K 上 $b = (-1)^n\chi(\mathbb{C}^n - \bigcup_{i=1}^{m} H_i)$ 次元である

この Proposition から、$\pi_1(\mathcal{M}_{\mathbb{C}}, \eta)$ は、K 上の1次元 vector space $\bigwedge^b_K H^n(\tilde{\mathfrak{X}}_\eta, \mathbb{Z})\otimes_A K$ に act する。これから、

$$\Phi : \pi_1(\mathcal{M}_{\mathbb{C}}, \eta) \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(K) = K^\times$$

を得る。これは、$\pi_1(\mathcal{M}_{\mathbb{C}}, \eta)^{ab}$ を経由してゆくが、$\pi_1(\mathcal{M}_{\mathbb{C}}, \eta)^{ab}$ の構造を、記述することにしよう。

$\chi_I : \pi_1(\mathcal{M}_{\mathbb{C}}, \eta) \longrightarrow \mathbb{Z}$ (resp $\chi_{I'}$) を、D_I, (resp $D_{I'}$) に関する exponential-Kummer character、すなわち、$\sigma \longmapsto \sigma(\log D_I) - \log D_I$ (resp $\sigma(\log D_{I'}) - \log D_{I'}$) とする。この時、

<u>Proposition</u> $\bigoplus_{I\in\mathcal{C}} \chi_I \oplus \bigoplus_{I'\in\mathcal{C}_\infty} \chi_{I'} : \pi_1^{ab}(\mathcal{M}_{\mathbb{C}}, \eta) \longrightarrow \bigoplus_{I, I'} \mathbb{Z}$

は、Isomorphism.

この等式において、右辺の対応するgenerator を、ξ_I, $\xi_{I'}$ と書く。 $\sigma_\infty = (\sigma_1 \cdots\cdots \sigma_m)^{-1}$ とおく

<u>Corollary to main theorem</u>

$$\Phi(\xi_I) = \prod_{i\in I} \sigma_i \quad \in K^\times$$

$$\Phi(\xi_{I'}) = \prod_{i\in I'} \sigma_i \times \sigma_\infty \quad \in K^\times$$

<u>Rem</u> この Corollary と比較定理を使って、generalized Braid group に関する、Oda-T. の定理の Analogy ができる。