数理解析研究所講究録
743巻 1991年 211-219



# Deformed Sierpinski Gaskets について

関口健　東北学院大学 教養学部

## §0. 序

本稿では、Okada-Sekiguchi-Shiota [8] から Deformed Sierpinski Gasket に関する部分を中心に報告する。我々の目的は infinite graph network $N$ 上の heat kernel $p_t(x,y)$ の decay order $\alpha$, 即ち

$$p_t(0,0) = O(t^{-\alpha}) \quad \text{as } t \to \infty,$$

を求めることである。ここで $0 \in N$。$2\alpha$ はいわゆる spectral dimension である。$N$ が周期性をもっているときは、Gavau-Okada-Okada [3] の方法で、多くの場合に Green 関数を直接計算できるので、それから $\alpha$ が求められる。以下では $N$ が非周期的な場合、例として Deformed Sierpinski Gasket, の decay order $\alpha$ の計算方法についての試みを述べる。

## §1. decay order の考察

一般の infinite graph network $N$ について、次の結果がある。

**Th.** ( Carlen-Kusoka-Stroock [2] )

$$\sup_{x,y\in N} p_t(x,y) = O(t^{-\beta}) \quad \text{as } t\to\infty$$

ここで、

$$(*) \quad \beta = \inf_{\substack{u\in L^2(N)\\ \mathcal{E}(u,u)<\infty}} \frac{\log\left(\frac{\|u\|_1}{\|u\|_2}\right)^2}{\log \frac{\|u\|_2^2}{\mathcal{E}(u,u)}}$$

$$\mathcal{E}(u,u) = \int_N |\nabla u|^2 dx$$

一般に $\beta$ は decay order $\alpha$ より小さいが、(*) で $u$ に制限をくわえれば、decay order になるのではないかと予想される。実際次の補題を示せる。

**Lem.** $u_t = p_t(x,0)$ とおくと、

$$\frac{\log\left(\frac{\|u_t\|_1}{\|u_t\|_2}\right)^2}{\log \frac{\|u_t\|_2^2}{\mathcal{E}(u_t,u_t)}} \longrightarrow \alpha \quad \text{as } t\to\infty$$

ならば

$$-\frac{\log p_t(0,0)}{\log t} \longrightarrow \alpha \quad \text{as } t\to\infty$$

上の結論は、だいたい $p_t(0,0) = O(t^{-\alpha})$ as $t\to\infty$ と考えてよい。更に計算が可能となるように、$u_t$ の代用

として、次のような $v_n$ を考えることにしよう。

$K_n \subset N$ を compact で、$K_n \subset K_{n+1}$, $B(0, n) \subset K_n$ とし、$v_n$ は harmonic on $\mathring{K}_n$ で $v_n(0) = 1$, $v_n = 0$ on $K_n^c$ とする。すなわち、$v_n$ は $0$ で $1$, $K_n$ の外で $0$ となる電圧分布と考えられる。このとき $\beta$ に対応するものは

$$\delta = \lim_{n \to \infty} \frac{\log \left( \frac{\|v_n\|_1}{\|v_n\|_2} \right)^2}{\log \frac{\|v_n\|_2^2}{\mathcal{E}(v_n, v_n)}}$$

更に、

$$\left( \frac{\|v_n\|_1}{\|v_n\|_2} \right)^2 \approx V(K_n) \equiv K_n \text{の長さ}$$

$$\|v_n\|_2^2 \approx V(K_n)$$

と考えられるから、

$$R_n = 1 / \mathcal{E}(v_n, v_n) \qquad (\text{電気抵抗})$$

とおき、$\alpha$ の代用品として次の量を定義する。

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \frac{\log V(K_n)}{\log V(K_n) R_n} .$$

以上の考察から、我々は

$$\alpha = \delta = \gamma$$

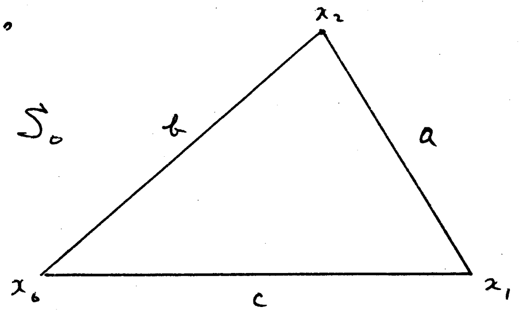
が成立すると思っている。

以下で Deformed Sierpinski Gasket について、$\gamma$ の

計算結果を述べるが、Sierpinski Gasket については、すでに知られている decay order $\alpha$ は $d$ に一致する。

## §2. Deformed Sierpinski Gasket

まず Deformed Seirpinski Gasket の説明から始める。$S_0$ を図のような3辺の長さ $a$, $b$, $c$ の三角形（周を考える）とする。




縮小写像 $f_i$ $(i=0,1,2)$ を

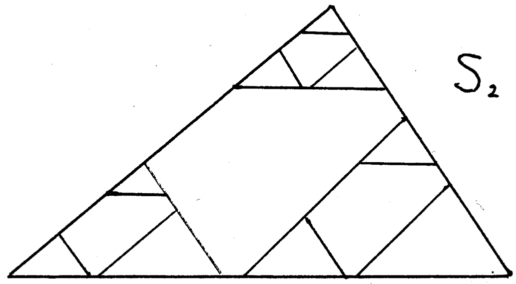
$$f_0(x) = k(x - x_0) + x_0, \quad f_1(x) = l(x - x_1) + x_1, \quad f_2(x) = m(x - x_2) + x_2$$

とする。ここで $k, l, m > 0$, $l+m$, $m+k$, $k+l \leq 1$.

$$S_n = S_n(a, b, c, k, l, m) \equiv \bigcup_{j=0}^{n} \bigcup_{0 \leq i_1, \cdots, i_j \leq 2} f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_j}(S_0)$$

$$S_\infty = S_\infty(a, b, c, k, l, m) \equiv \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n(a, b, c, k, l, m)$$

とおく。



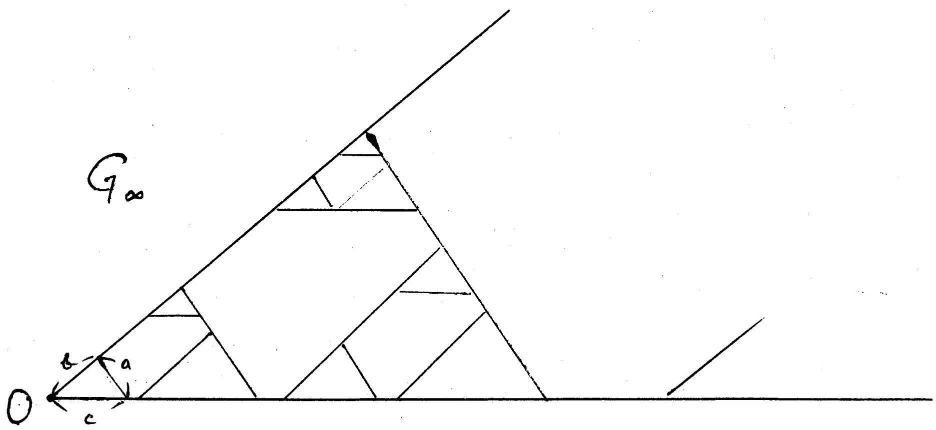
$S_\infty$ を Deformed Sierpinski Gasket と呼ぶことにする。

$S_\infty(a, a, a, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ が通常の Sierpinski Gasket である。 $S_\infty$ を infinite graph network と考えるために、

$$G_n = G_n(a, b, c, k, l, m) \equiv \frac{1}{k^n} S_n(a, b, c, k, l, m)$$

$$G_\infty = G_\infty(a, b, c, k, l, m) \equiv \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$$

とする。ここで $\frac{1}{k^n} S_n$ は $S_n$ を $\frac{1}{k^n}$ 倍拡大したものとする。




infinite graph network $G_\infty$ については §1 で定義した $\gamma$ は次式で与えられる。

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \frac{\log V(G_n)}{\log V(G_n) R_n}$$

次が $\gamma$ の値を計算した結果である。

<u>Th</u> i) $k = l = m = 1/2$ のとき $\gamma = \dfrac{\log 3}{\log 5}$

ii) $\min(l+m,\ m+k,\ k+l) < 1$ のとき

$$\gamma = \begin{cases} \dfrac{\log\left(1+\frac{l}{k}+\frac{m}{k}\right)}{\log\frac{1}{k}\left(1+\frac{l}{k}+\frac{m}{k}\right)} & , k+l+m \geq 1 \\ \dfrac{1}{2} & , k+l+m < 1 \end{cases}$$

注意 1° $\gamma$ は $a, b, c$ に無関係に決まる。

2° $k = l = m = 1/2$ のとき、$\gamma$ は Kusuoka[6], Rammal-Toulouse [9] で $a = b = c$ のとき求めた spectral dimension から決まる $\alpha = \dfrac{\log 3}{\log 5}$ に一致する。

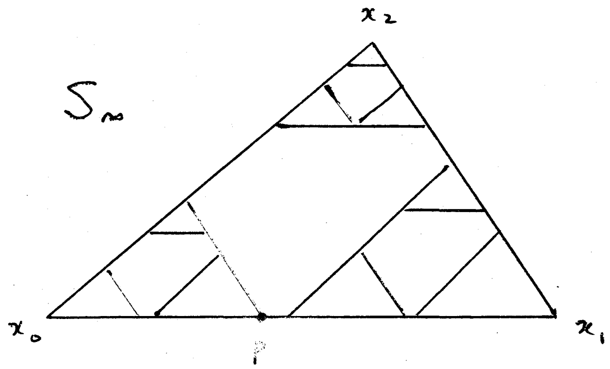
3° $\gamma$ は $k = l = m = 1/2$ で不連続になっているのは興味深い。

Th の証明で注意すべき点は、抵抗 $R_n$ の計算に、いわゆる Y−Δ 公式を用いることである。詳細については、[8] を見られたい。

## §3. $S_\infty$ における調和関数（電圧分布）

$S_\infty$ の $x_0, x_1, x_2$ にそれぞれ電圧 $h(x_0), h(x_1), h(x_2)$ を与えたとき、$S_\infty$ における電圧分布（調和関数）$h(x)$ を求めることを考える。$S_\infty$ の自己相似性から、図における点 $p$ における電圧 $h(p)$ が求まればよい。我々は $S_n$ での $p$ における電圧 $h_n(p)$ を求め、$h(p) = \lim_{n} h_n(p)$ とし

て $h(p)$ を求めることにする。




現在のところ，すべて求められたわけではないが，部分的な結果を次に挙げる。計算の基本となるのは，ここでも Y−Δ 公式である。

<u>Th.</u>　i)　$k = l = m = 1/2$ のとき

$$h(p) = \frac{2}{5} h(x_0) + \frac{2}{5} h(x_1)$$

ii)　$a = b = c$，$k = l = m < 1/2$ のとき

$$h(p) = (1-k)\, h(x_0) + \frac{2k}{3} h(x_1) + \frac{k}{3} h(x_2)$$

<u>注意</u>　1°　i) は $a, b, c$ に無関係であり，$a = b = c$ のときは，Kigami [4] で求められている調和関数と一致している。

2°　ii) で $k \uparrow 1/2$ とすると

$$h(p) = \frac{1}{2} h(x_0) + \frac{1}{3} h(x_1) + \frac{1}{6} h(x_2)$$

となり、$a=b=c$, $k=l=m=1/2$ の場合に一致しない。しかもこのとき $h$ は $S_{\infty}$ 上不連続となる。これは §2 で見た $\gamma$ の不連続性と関連しているように思われ興味深い。

参考文献

[1] M.T.Barlow and E.A.Perkins, Brownian motion on the Sierpinski gasket, Probab. Th. Rel. Fields,79(1988),59-85.
[2] E.A.Carlen,S.Kusuoka and D.W.Strook, Upper bounds for symmetric Markov transition functions, Ann. Inst. Poincare, Sup. au no 2(1982),245-270.
[3] B.Gaveau,M.Okada and T.Okada, Explicit heat kernels on graphs and spectral analysis, to appear in Proceedings of the special year in Several Complex Variables at Mittag-Leffler '87-'88 (ed. J.E.Fornaess and C.O.Kiselman),Princeton Univ. Press.
[4] J.Kigami, A harmonic calculus on the Sierpinski spaces, Japan J. Appl. Math., 6(1989),259-290.
[5] J.Kigami, Harmonic calculus on p.c.f. self-similar sets, preprint.
[6] S.Kusuoka, A diffusion process on a fractal, Probabilistic Methods in Mathematics and Phisics (Katada 1985), Kinokuniya-North Holland, Tokyo,1987,251-279.
[7] S.Kusoka, Drichlet forms on fractals and products of random matrics, Publ.RIMS,Kyto Univ. 25(1989),659-680.
[8] M.Okada, T.Sekiguchi and Y.Shiota, Heat kernels on infinite graph networks and deformed Sierpinski gaskets, Japan J. Appl. Math., to appear
[9] R.Rammal and G.Toulouse, Random walks on fractal structures and percolation clusters, J. Phis. Lett., 44(1983),13-22.