数理解析研究所講究録
744巻 1991年 248-254

Ｕｎｉｌａｔｅｒａｌ問題に対する境界法

岡山理科大学　榊原道夫　（Michio Sakakihara）

１．はじめに

ここで取り上げる問題は変分不等式により記述されるいくつかの問題である．その典型的な例としてObstacle問題が挙げられる．その様な問題に対する数値解析法の１つとして境界要素法に代表される境界法の適用について考察を行う．境界法は周知のようにその解法の定式化にあたり問題としている方程式の特殊解を必要とするためにその適用される範囲が線形偏微分方程式に限定されていた．例えば本報告において議論されるようなObstacle問題は境界法により取り扱うことが困難な問題と考えられてきた．しかしながら，ある種のObstacle問題は境界法を用いることにより有効に近似解を構成することができる．本報告の１つの目的はその様な問題の存在と境界法の適用方法示すことである．その様な問題の1つとしてUnilateral境界値問題が存在する．その問題に対する境界要素Garelkin法の収束性について考察する．またその他のObstacle問題に対して境界法の定式化を示す．また数値例より提案する近似解法の妥当性を示す．

２．Unilateral境界値問題に対する境界要素Garelkin法

次のような問題を考える．

（P１）
$$-\Delta u+u=0 \quad in\ \Omega \qquad (1)$$
$$u-f \geq 0,\quad \partial u/\partial n \geq 0 \quad and \quad (u-f)\,\partial u/\partial n=0 \quad on\ \partial\Omega \qquad (2)$$

ここでΩは平面上の有界領域でC^2－境界を持つと仮定する．今E(x,y)を方程式（１）に対する基本解であると仮定する．そのとき方程式（１）を満足する関数が次の境界積分により構成できる．

$$u(x) = \int_\Gamma E(x,y)\,\rho(y)\,ds_y \qquad (3)$$

ここでΓ＝∂Ω である．またρ（y）は境界上の密度関数である．このように与えられる関数により問題を書き直すことができる．すなわち次のような境界積分不等式が得られる．

(P 2)　$K\rho - f \geq 0$, $Q\rho \geq 0$ and $(K\rho - f)Q\rho = 0$　　(4)

ここで積分作用素K，Qは次のように定義する．

$$K\rho(x) = \oint_{\Gamma} E(x,y)\rho(y)\,ds_y$$

$$Q\rho(x) = \frac{1}{2}\rho + p.v.\oint_{\Gamma} \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_x}\rho(y)\,ds_y$$

境界積分不等式による問題の定式化が与えられたが，解の存在と一意性はあるのかということが問題となる．その議論を行うために（P 2）を境界上において定義された適切な関数空間において与えられた変分問題に置き換えて考察する．すなわち次の変分不等式を得る．

(P 3) Find ρ in Y such that
$a(\rho, r-\rho) \geq (f, r-\rho)$　for all r in Y

ここで関数空間Yは次のようなソボレフ空間である．

$$Y \equiv \{ r \text{ in } L^2(\Gamma) \mid Q r \geq 0 \}$$

また $a(r, s) \equiv (Kr, s)$ で $(\cdot, \cdot)$ は境界上の内積を表す．ところで後に証明するがP 3は次のように簡略化できる．

(P 4) Find ρ in Z such that
$a(\rho, r-\rho) \geq (f, r-\rho)$　for all r in Z

ここで

$$Z \equiv \{ r \text{ in } L^2(\Gamma) \mid r \geq 0 \}$$

である．考察している問題の近似解の構成について考える．境界上をN個の線分に分割し，その線分上で定義された階段関数によりρを近似する．それにより我々は次の行列とベクトルにより表される相補問題を得る．

(P 5)　$G\underline{\rho} - \underline{f} \geq \underline{0}$, $\underline{\rho} \geq \underline{0}$ and $(G\underline{\rho} - \underline{f})\underline{\rho} = \underline{0}$　　(5)

ここで行列Gの要素$g_{i,j}$は次のように与えられる．

$$g_{i,j} = \int_\Gamma \int_\Gamma E(x,y)\,\chi_j(y)\,\chi_i(x)\,ds_y\,ds_x$$

$$\chi_i(x) = \begin{matrix} 1 & x \in \Gamma_i \\ 0 & oterwith \end{matrix}$$

この相補問題は，種々な方法により解くことができるが，もっとも簡単で有効な方法は射影法であると思われる．解法は以下のようである．今，行列Gを以下のように対角行列D，下三角行列L，上三角行列Uに分解する．

$$G = D - L - U$$

そのとき次の反復過程により近似解の列を構成する．

$\underline{\rho}^0$ を与える．

$$\underline{\rho}^{n+1/2} = D^{-1}\{L\underline{\rho}^{n+1} + U\underline{\rho}^{n} + \underline{f}\} \qquad (6)$$

$$\underline{\rho}^{n+1} = P_Z(\underline{\rho}^{n+1/2}) \qquad (7)$$

ここでP_Zは集合Zへの射影を表しており，ここで取り上げている問題では，$P_Z(r) = \max\{r, 0\}$ である．上に示した反復法はGが対称正定値であるならば収束する．

3．P3とP4の等価性

P3とP4の等価性を証明する．その準備として次の補題を示す．

補題1．　uを$-\Delta u + u = 0$の有界領域ΩでDrichlet問題$u = f$の弱解であると仮定する．また$h = \partial u / \partial n$とする．そのとき次の不等式が成立する．

$$C_0 \int_\Gamma uh\,ds \leqq \| h \|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqq C_1 \int_\Gamma uh\,ds$$

ここでC_0，C_1はuに依存しない正定数である．

この補題はBabucika[1]により証明された．ここでnは外向き法線方向である．補題1と同様の事実が$\Omega^c = R^2 \setminus \Omega$に対しても成立する．ただしn’は$\Omega^c$対する外向き法線方向である．

補題２．　ｕを－Δｕ＋ｕ＝０の外部領域Ω^cでDrichlet問題ｕ＝ｆの弱解であると仮定する．また$h=\partial u/\partial n'$とする．そのとき次の不等式が成立する．

$$C_0\int_\Gamma uhds \leqq \|h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqq C_1\int_\Gamma uhds$$

ここでC_0，C_1はｕに依存しない正定数である．

このことより次の定理を得る．

定理１．作用素ＱはＨ$^{-1/2}$（Γ）において有界作用素でありかつ楕円である．それゆえQ^{-1}が存在しかつＱρ≧０ならばρ≧０である．

証明：有界性および楕円性よりQ^{-1}が存在することが言える．そのQ^{-1}を不等式の両辺に作用し，Ｑが対称正定値であることに注意することにより上記の定理を得る．

４．Ｐ４の解の存在と一意性

次にＰ４の解の存在および一意性について述べる．そのことを証明するために我々は，Lions & Stamppach[2] により与えられた変分不等式についての次の定理を用いる．

定理２．Ｖをあるバナッハ空間とするｂ（・，・）をＶ－楕円なＶ上の有界双線形系であるとする．またＫをＶの閉凸部分空間，ｆはＶの双対空間の要素と仮定する．そのとき変分問題：

Find　u　in　K　such　that

ｂ（ｕ，ｖ－ｕ）≧（ｆ，ｖ－ｕ）　for all　v　in　Z

は一意可解である．

この定理およびsakakihara[3]により得られたａ（・，・）の楕円性および有界性より次の定理を得る．

定理３．　Ｐ４は一意可解である．

証明：　ＺがＬ^2（Γ）の閉凸部分空間であることは，その定義より明かである．またＬ^2（Γ）はＨ$^{-1/2}$（Γ）の閉凸部分空間である．ゆえにＺがＨ$^{-1/2}$（Γ）の閉凸部分空間であることが分かる．ところで[3]によりａの楕円性および有界性が示されていることより，定理２を用いて定理３が得られる．

5．誤差評価

次にGalerkin解の誤差評価について述べる．変分不等式の近似解を有限要素法により構成する場合の誤差評価の問題はBrezzi, Hager & Raviart[4]により与えられている．その論文の定理2．1および補題3を用いることにより次の定理が得られる．

補題3．[3] $\rho \in H^{1/2}(\Gamma)$ および ρ^I を一定境界要素により構成された有限部分空間 V^h への L^2 射影であると仮定する．そのとき次の誤差評価が成立する．

$$\|\rho-\rho^I\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq Ch\|\rho\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

ここでhは境界要素の代表的分割サイズを表す．

定理4．$f \in H^{3/2}(\Gamma)$ と仮定する．そのとき次の誤差評価が成立する．

$$\|\rho-\rho^h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \quad O(h)$$

ここで ρ^h はGalerkin境界要素解を表す．

6．その他の例

ここで取り上げた境界法および射影法を用いた方法はその他のobstacle問題を解くのに応用できる．次のような1次元非定常熱方程式に対するobstacle問題を考える．

$$Lu \geqq 0, \quad u-f \geqq 0, \quad Lu(u-f)=0 \quad \text{in } (0,1)$$
$$u(0)=u(1)=0$$

ここで $L=\partial/\partial t-\partial^2/\partial x^2$ である．この問題を次の手順で解く．

$Lu=0$ を境界法で解き δt 後の近似解を求める．
$u^*=\max\{u, f\}$ とおく．

この手順を繰り返すことにより，問題に対する近似解を得ることができる．
ここでは熱方程式を時間について差分化し得られた楕円型方程式に対し境界法を適用する解法を適用した場合について上記の手順による数値解を示し，境界法が上記の問題を解くのに有効な手法の1つであることを示す．
$f=-(x-0.25)(x-0.75)$ の場合に対する数値例を図1および図2に示す．　図1はobstacleに接触するまでの数値解であり図2は十分時刻が進んだ場合の数値解である．時刻1．0ではほぼ定常解とであることが分かる．

またこのような方法はある種の楕円型のobstacle問題に対しても境界法が有効であることを示している．例えば次のような問題を考えよう．

$$(P6)\quad -\Delta w+1\geq 0,\quad w\geq 0,\quad (-\Delta w+1)w=0\quad \text{in}\ \Omega$$
$$w=f\quad \text{on}\ \Gamma$$

ダム問題の数理モデルとして提案されている相補問題である[5]. この場合Ωにおけるポアソン方程式$-\Delta w+1=0$のDirichlet問題をとく解法と射影法を合わせることにより前記の相補問題を解くことができる. そのことは簡単な1次元問題を考えることにより確認する事ができる. 区間(0,1)において$w(0)=4/5$, $w(1)=0$という境界条件が与えられたときその境界値問題に対する解は$w(x)=-(x-0.8)(x-1)$となる. この解とwに対する非負条件より1次元の(P6)に対する解は次のようになる.

$$w(x)=\begin{cases}-(x-0.8)(x-1) & (0\leq x\leq 0.8)\\ 0 & (0.8<x\leq 1)\end{cases}$$

ただしObstacleが零でない限りにおいては, 境界法の適用は簡単はならず反復法を用いなければならない.

7. まとめ

境界法の自由境界問題に対する適用は多くなされているがその有効な適用問題は主に境界の移動が非定常方程式として与えられた問題である場合が多い. 定常の自由境界問題の解法として境界法を考えるとき問題の選択が境界法の利点を有効に発揮するのに重要となる. ここで取り上げた問題は, 境界法の利点を損なうことなく取り扱えるいくつかの問題を示し, 部分的に理論的考察を与えた. 特に興味あることは従来複雑な反復法を用いることにより境界法の定式化が示されていたダム問題が対応する相補問題より出発することにより境界法の適用が有効に行えることが理解できたことである. 今後の課題としてはどの程度の自由境界問題まで境界法により取り扱うことができるかを考察してゆきたい.

文献

[1] Babuska,I., The finite element method with Lagrangian multypliers, Numer. Math., 20(1978)179-193.
[2] Lions,J.L. and G.Stampacchia, Variational Inequalities, Commu. Pure Appl. Math. 20(1967) 493-519.
[3] Sakakihara,M., Galerkin Boundary Element Method with Single Layer Potential, Inter. Series of Numer. Math., Birkhauser, 86(1988) 419-427.
[4] Brezzi,F. W.W.Hager and P.A.Raviart, Error estimates for the finite element solution of variational inequalities ,Part I. Prime Theory, Numer. Math. 28(1977), 431-443.
[5] Friedman, A., Variational Principles and Free-Boundary Problem, Pure & Apll. Math. Wiley-Interscience Series (1982).

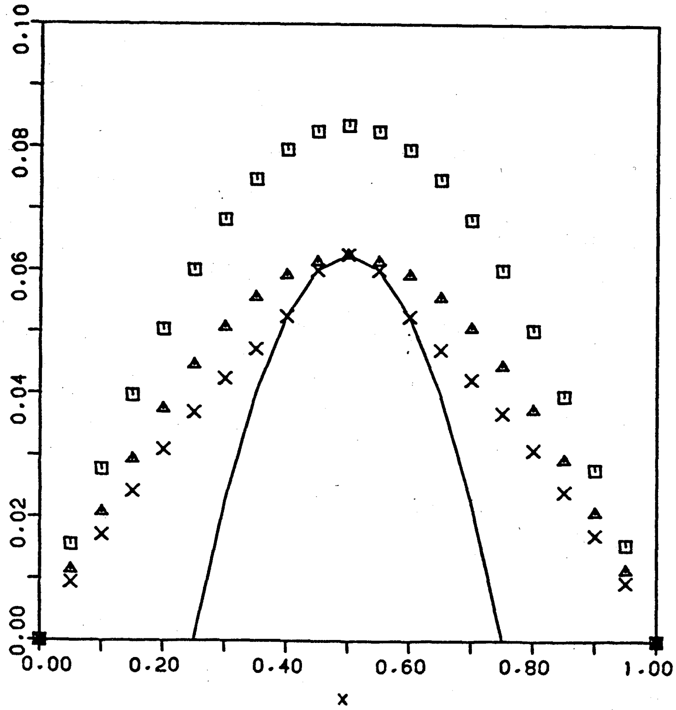

図 1　　dx=0.05, dt=0.01, △　t=0.28,
×　t=0.3, □　t=1.0

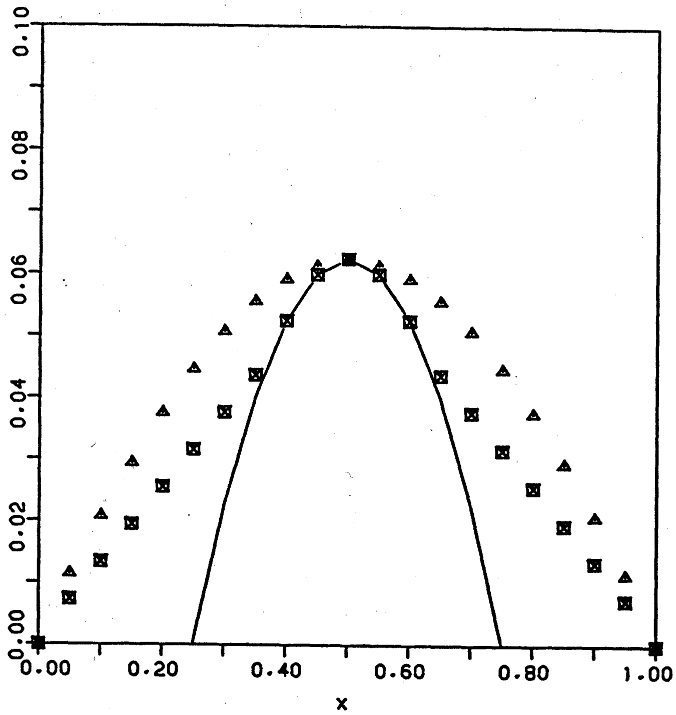

図 2　　dx=0.05, dt=0.01, ○　t=0.28,
△　t=0.3, ×　t=0.5