数理解析研究所講究録
第 744 巻 1991 年 207-221

スチェクロフ固有値問題と結合解法

電気通信大学 情報工学科　　牛島照夫 (Teruo Ushijima)

はじめに

本稿でいうスチェクロフ固有値問題とは，有界領域 G における問題

$$(\mathrm{P}_0)\quad \begin{cases} -\Delta u &= 0 \quad \text{in} \quad G, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \lambda u \quad \text{on} \quad L \end{cases}$$

のことである (Stekloff [4]). ここで $\frac{\partial}{\partial n}$ は外向き法線微分，λ は固有値，L は G の境界である．領域 G で調和な関数 u の L での境界値 φ をそのフラックス，法線導関数値 $q = \frac{\partial u}{\partial n}$ に対応させる作用素を A_0 とすれば，A_0 は $L^2(L)$ 上の非負値自己共役作用素を定める．問題 (P_0) はこの作用素 A_0 の固有値問題である．

問題 (P_0) をやや一般化する．ここでは G を障害物とする．十分大きい a をとると，半径 a の円，一般次元では超球の内部に G は含まれるものとする．領域 H を G の外部領域とし，O を H と半径 a の円の共通部分とする：$O = H \cap \{x: \ |x| < a\}$. 円環 $|x| = a$ を Γ で表わす．次の固有値問題 (P) を設定する．

$$(\mathrm{P})\quad \begin{cases} -\Delta u &= 0 \quad \text{in} \quad O, \\ u &= 0 \quad \text{on} \quad L, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \lambda u \quad \text{on} \quad \Gamma. \end{cases}$$

この問題 (P) も，(P_0) と同様に，$L^2(\Gamma)$ における自己共役作用素 A の固有値問題と見なせる．

さて，以下では二次元問題を考える．半径 a の円の外部を Ω と書き，次の問題 (Π) を設定する．

$$(\Pi)\quad \begin{cases} -\Delta u &= 0 \quad &\text{in} \quad \Omega, \\ u &\text{is bounded} \quad &\text{in} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \lambda u \quad &\text{on} \quad \Gamma. \end{cases}$$

ここでは，$\frac{\partial}{\partial n}$ は円の内部に向かう法線導関数である．これを円に対する外部スチェクロフ固有値問題と言ってよいであろう．この問題も $L^2(\Gamma)$ における自己

共役作用素 Λ を定める．その固有関数は三角関数を用いて表示され，そのスペクトル集合は

$$\sigma(\Lambda)=\left\{\frac{n}{a}:\ n=0,1,2,\cdots\right\}$$

である．点 $\frac{n}{a}$ は全て固有値で，$n=0$ のとき単純である他は，その重複度は 2 である．

結合解法の例題として，$f\in L^2(H)$ のサポートが O に含まれる：

$$\mathrm{supp}\,(f)\subset O$$

場合の斉次ディリクレ条件下での領域 H におけるポアッソン方程式 (E) を考える．

$$(\mathrm{E})\quad \begin{cases} -\Delta u &= f \qquad\quad \text{in}\quad H,\\ \quad u & \text{is bounded}\quad \text{in}\quad H,\\ \quad u &= 0 \qquad\quad \text{on}\quad L.\end{cases}$$

問題 (E) 解 u の Γ での値を φ とすれば，φ は

(a)
$$\psi+A\varphi=-\Lambda\varphi$$

をみたす．ここで，u_0 を，

$$(\mathrm{E}_0)\quad \begin{cases} -\Delta u_0 &= f \quad \text{in}\quad O,\\ \quad u_0 &= 0 \quad \text{on}\quad O\cup\Gamma\end{cases}$$

をみたすものとして，ψ は

(1)
$$\psi=\frac{\partial u_0}{\partial n}\quad \text{on}\quad \Gamma$$

で定める．このとき $\frac{\partial}{\partial n}$ は O から見て外向き方向の法線微分である．

境界上の作用素係数の一次方程式 (a) を解いて，φ が求まれば，

$$(\mathrm{E}_1)\quad \begin{cases} -\Delta u_1 &= f \quad \text{in}\quad O,\\ \quad u_1 &= 0 \quad \text{on}\quad L,\\ \quad u_1 &= \varphi \quad \text{on}\quad \Gamma\end{cases}$$

を解くことが出来る．

(2)
$$u_i=u_0+u_1$$

とおく．また外部ディリクレ問題

$$
(\mathrm{E_e})\quad \begin{cases} -\Delta u & = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \quad u & \text{is bounded} \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \quad u & = \varphi \quad \text{on} \quad \Gamma \end{cases}
$$

の解を u_e とする．

$$
u = \begin{cases} u_i & \text{in} \quad O, \\ u_e & \text{in} \quad \Omega \end{cases}
$$

が (E) の解を与える．

問題 (a) を離散化して解くことが出来れば，問題 (E) を数値的に解く結合解法が与えられることになる．本稿では (a) の右辺は，有限要素法で，左辺は，スペクトル法で，それぞれ離散化する結合解法を念頭においた．問題 (a) の離散化問題 $(\mathrm{a_h})$ を考察し，その誤差評価法の見とおしを述べる．

1．作用素 Λ のスペクトル分解

始めに，関数系

$$
\left\{ C_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}},\ C_n = \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\cos n\theta,\ S_n = \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\sin n\theta,\ n = 1,2,\cdots \right\}
$$

は，ヒルベルト空間 $X = L^2(\Gamma)$ における完全正規直交系であることに注意する．ここで，Γ と Ω を，それぞれ，

$$
\begin{aligned}
\Gamma &= \{\, (a\cos\theta, a\cos\theta) :\ -\pi < \theta \le \pi \,\}, \\
\Omega &= \{\, (x,y) :\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ r > a,\ -\pi < \theta \le \pi \,\}
\end{aligned}
$$

のように極座標を用いて表わすものとする．Ω における関数

$$
\begin{aligned}
c_n(x,y) &= \left(\tfrac{a}{r}\right)^n C_n(\theta), \quad n = 0,1,2,\cdots, \\
s_n(x,y) &= \left(\tfrac{a}{r}\right)^n S_n(\theta), \quad n = 1,2,\cdots
\end{aligned}
$$

を定め，

$$
\lambda_n = \frac{n}{a}, \quad n = 0,1,2,\cdots
$$

とおくと，固有対 $\{\lambda, u\} = \{\lambda_n, c_n\}$ および $\{\lambda, u\} = \{\lambda_n, s_n\}$ は外部スチェクロフ固有値問題 (II) の全ての固有対を尽くしている．

さて $X = L^2(\Gamma)$ の内積を

$$\begin{aligned}(\Phi, \Psi) &= \int_\Gamma \Phi \bar{\Psi}\, d\Gamma \\ &= a \int_{\pi}^{\pi} \Phi(a\cos\theta, a\sin\theta)\, \bar{\Psi}(a\cos\theta,\ a\sin\theta)\, d\theta\end{aligned}$$

で表わす．このとき Λ の定義域 $D(\Lambda)$ は，

$$D(\Lambda) = \left\{ \Phi \in L^2(\Gamma) :\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{a}\right)^2 \left\{ |(\Phi, C_n)|^2 + |(\Phi, S_n)|^2 \right\} < \infty \right\}$$

であり，$\Phi \in D(\Lambda)$ に対して

$$\Lambda\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{a}\right) \{(\Phi, C_n)\, C_n + (\Phi, S_n)\, S_n\}$$

と表わせることは，前段で述べたことから導かれる．ソボレフ空間の言葉で言えば，

$$D(\Lambda) = H^1(\Gamma)$$

である．上のスペクトル分解は，”はじめに” で述べた $\sigma(\Lambda)$ に関する事項を含んでいる．

2．作用素 A の変分的定義

次のような関数空間を導入する．

$$\begin{aligned} V &= \{\, v \in H^1(O) :\ v|_L = 0 \,\}, \\ V_0 &= H_0^1(O), \end{aligned}$$

空間 V から $X = L^2(\Gamma)$ の中への標準的なトレース作用素を γ とする：

$$\begin{aligned} \gamma v &= v|_\Gamma, \quad v \in V, \\ Y &= \gamma(V) \end{aligned}$$

とおく．$Y = H^{1/2}(\Gamma)$ である．空間 Y の元 Φ を固定した変分問題：

$$(P) \quad \begin{cases} \min \frac{1}{2} a(v, v), \\ v \in V, \\ v = \Phi \quad \text{on} \quad \Gamma \end{cases}$$

の解を u とする．すなわち u は次の弱形式問題 (H_Φ) の解である．

$$(H_\Phi)\quad \begin{cases} a(u,v) &= 0, \quad v \in V_0, \\ \qquad u &\in V, \\ \qquad u &= \Phi \quad \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

ここで，$a(u,v)$ は O 上のディィリクレ内積：

$$a(u,v) = \int_O \nabla u\ \nabla \bar{v}\ \mathrm{d}x$$

である．

以下の議論は既報告（牛島–松木–青木［5］，Ushijima［6］など）で行なった水の波問題のときと同様な方法で行なうことが出来る．先ず任意の $\Phi \in \Gamma$ に対して，(H_Φ) の解 $u \in V$ が存在することを確かめることが出来る．そこで

$$u \equiv H\Phi$$

とおくと，$H \in L(Y,V)$ である．ヒルベルト空間 $X = L^2(\Gamma)$ における二次形式 a_0 を

$$\begin{aligned} D(a_0) &= Y, \\ a(\Phi,\Psi) &= a(H\Phi, H\Psi), \qquad \Phi,\Psi \in Y, \end{aligned}$$

によって定める．このとき次の命題 1 と 2 が成立する．

命題 1　二次形式 a_0 は，X における正定値閉エルミート形式である．

命題 2　a_0 に対応する正定値自己共役作用素 A は完全連続な逆をもつ．

命題 2 で定まる A が我々の問題 (a) における作用素 A である．明らかに

$$D(A^{1/2}) = H^{1/2}(\Gamma)$$

である．Λ と同時に

$$D(A) = H^1(\Gamma)$$

であることが期待されるが，著者にはまだその証明が出来ていない．$u = H\Phi$ と $v = H\Psi$ が十分に滑らかであれば，

$$\begin{aligned} a_0(\Phi,\Psi) &= a(u,v) \\ &= \textstyle\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\bar{v}\ \mathrm{d}\Gamma \end{aligned}$$

であり,

$$a_0(\Phi,\Psi)=(A\Phi,\Psi)$$

であるから, A は "はじめに" で述べた性質をもつことを,(形式的には) 確認できる.

3. 境界作用素係数方程式の導出

問題 (E) の解 u に対して,

$$u_i=u|_O,\qquad u_e=u|_\Omega\qquad \varphi=\varphi|_\Gamma$$

とおくと, u_i と u_e は, それぞれ問題 $(\mathrm{E_i})$ と $(\mathrm{E_e})$ の解である. ここで $(\mathrm{E_i})$ は

$$(E_\mathrm{i})\quad\begin{cases}-\Delta u_i &= f \quad \text{in} \quad O,\\ \quad u_i &= 0 \quad \text{on} \quad L,\\ \quad u_i &= \varphi \quad \text{on} \quad \Gamma\end{cases}$$

である. 境界 Γ では,

$$(3)\qquad \frac{\partial u_i}{\partial n}=\frac{\partial u_e}{\partial n}\qquad \text{on}\quad \Gamma$$

をみたさなければならない. ここで $\frac{\partial}{\partial n}$ は, 円領域 $|x|<a$ に関して外向き法線微分である. したがって右辺において

$$(4)\qquad \frac{\partial u_i}{\partial n}=-\Lambda\varphi$$

となる. 一方 $(\mathrm{E_0})$ の解 u_0 と $(\mathrm{E_1})$ の解 u_1 を用いて(2)式によって u_i が表わされるから,(3)の左辺においては,

$$\frac{\partial u_i}{\partial n}=\frac{\partial u_0}{\partial n}+\frac{\partial u_1}{\partial n}.$$

(1)と A とを用いると

$$(5)\qquad \frac{\partial u_i}{\partial n}=\psi+A\varphi.$$

(3),(4),(5)から問題 (a) が得られる.

以下では, 取りあつかいの便利のために (a) を

$$(\mathbf{a})\qquad (A+\Lambda)\varphi+\psi=0$$

の形に書き表わすことにする.

作用素 $A+\Lambda$ の定義は，二次形式 $a_0(\Phi,\Psi)+\left(\Lambda^{1/2}\Phi,\Lambda^{1/2}\Psi\right)$ に対応する X での正定値自己共役作用素と考えるのが自然であろう．その作用素の定義域を特定することは，著者にはまだ出来ていない．

4．有限要素法による A の近似 A_h

さて V の有限次元部分空間 V_h が与えられているとする．V_h の次元は N であるとする．適当に V_h の基底 w_j $(1\le j\le N)$ をとれば，

$$V_h=\left\{\, v_h=\sum_{j=1}^{N} V(j)w_j:\ V(j)\in\mathbf{C}\,\right\}$$

と表わされる．ここである N_0, $1<N_0<N$, があって

$$\operatorname{supp}(w_j)\cap\Gamma\quad\begin{cases}\neq\emptyset, & 1\le j\le N_0,\\ =\emptyset, & N_0+1\le j\le N,\end{cases}$$

がみたされるものとする．

$$\omega_j=w_j|_\Gamma,\qquad 1\le j\le N_0,$$

とおく．関数 ω_j, $1\le j\le N_0$, の生成する Γ 上の有限次元空間を X_h とする：

$$X_h=\left\{\, \Phi_h=\sum_{j=1}^{N_0}\Phi(j)\omega_j:\ \Phi(j)\in\mathbf{C}\,\right\}.$$

明かに，

$$X_h\subset Y$$

である．又，

$$V_{h0}=\left\{\, v_j=\sum_{j=N_0+1}^{N} V(j)w_j:\ V(j)\in\mathbf{C}\,\right\}$$

とおく．明かに，

$$V_{h0}\subset V_0$$

である．(H_Φ) の近似問題として，$\Phi_h \in X_h$ に対して次の問題$\left(H^{\mathrm{h}}_{\Phi_h}\right)$ が導入される．

$$\left(H^{\mathrm{h}}_{\Phi_h}\right) \quad \begin{cases} a(u_h, v_h) & = 0, \qquad v_h \in V_{h0}, \\ \quad u_h & \in V_h, \\ \quad u_h & = \Phi_h \qquad \text{in} \quad \Gamma. \end{cases}$$

ここでも，X_h の任意の元 Φ_h に対して，$\left(H^{\mathrm{h}}_{\Phi_h}\right)$ の解 u_h は一意存在するので，

$$u_h = H_h \Phi_h$$

によって $H_h \in L(X_h, V_h)$ を定める．さらに，

$$a_h(\Phi_h, \Psi_h) = a(H_h \Phi_h, H_h \Psi_h)$$

によって X_h 上の二次形式 a_h を導入し，a_h に対応する X_h での正定値有界自己共役作用素を A_h とする：

$$(A_h \Phi_h, \Psi_h) = a_h(\Phi_h, \Psi_h).$$

ところで，$\Phi_h = \sum_{j=1}^{N_0} \Phi(j)\omega_j$ を N_0 次元ベクトル $\mathbf{\Phi} = (\Phi(j))_{1 \le j \le N_0}$ に対応させ，$\Psi_h = \sum_{j=1}^{N_0} \Psi(j)\omega_j$ を $\mathbf{\Psi} = (\Psi(j))_{1 \le j \le N_0}$ に対応させると，ある N_0 次正方行列 $\mathbf{A}$ が存在して

$$(A_h \Phi_h, \Psi_h) = (\mathbf{A}\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Psi})_{\mathbf{C}^{N_0}}$$

と書けるはずである．この $\mathbf{A}$ の計算法を説明しておく．

N 次正方行列 $\mathbf{K}$ を，基底 $\{w_j : 1 \le j \le N\}$ に関する $-\Delta$ の離散表現，すなわち剛性行列とする．要素

$$k_{i,j} = a(w_i, w_j), \qquad 1 \le i, j \le N,$$

に対して，$\mathbf{K} = (k_{i,j})_{1 \le i,j \le N}$ を N_0 次正方行列 $\mathbf{K_0} = (k_{i,j})_{1 \le i,j \le N_0}$，$N - N_0$ 次正方行列 $\mathbf{K_1} = (k_{i,j})_{N_0+1 \le i,j \le N}$，$(N - N_0) \times N_0$ 次長方行列 $\mathbf{K_2} = (k_{i,j})_{N_0+1 \le i \le N_1,\ 1 \le j \le N_0}$ を用いて，

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K_0} & \mathbf{K_2^T} \\ \mathbf{K_2} & \mathbf{K_1} \end{pmatrix} \tag{6}$$

と表わそう．このとき，

(7) $$\mathbf{A} = \mathbf{K_0} - \mathbf{K_2^T K_1^{-1} K_2}$$

である．

領域 O を"三角形"分割してラグランジ補間型の有限要素空間を作る．この際境界 L と Γ 上に二節点をもつ"三角形"に対しては，Zlamal の曲要素を使うなどして適合条件 $V_h \subset V$ をみたさせることができることを注意する（Zlamal [7]）．

5．近似問題の設定

現実的な計算可能性を考慮して (a) の近似問題 $(\mathrm{a_h})$ を次のように設定する．

$(\mathrm{a_h})$ $$(A_h + \Lambda_h)\phi_h + \psi_h = 0$$

ここで，ψ_h は与えられた X_h の元であり，A_h は4で構成した作用素であり，Λ_h は Λ のしかるべき近似作用素である．とりあえず

(8) $$\Lambda_h = P_h \Lambda Q_h$$

のように書けるものとする．ここで P_h は X から X_h の上への有界線形作用素で，Q_h は X_h から X の中への有界線形作用素である．例えば，P_h は直交射影作用素であるとする．Q_h の例として $N_0 = 2M$ なるとき，X_h の元は Γ 上の $2M$ 個の節点で決定される場合，それらの節点値から，離散フーリエ変換（ＤＦＴ）を用いてフーリエ係数を計算することによって，X_h の元を M 次までの三角多項式の空間 $X^{(M)}$ の元に写す写像 Q_h などを考えている：

$$Q_h :\ X_h \ni \Phi_h \to Q_h\Phi_h \in X^{(M)},$$
$$X^{(M)} = \left\{ \Phi^{(M)} = a_0C_0 + \textstyle\sum_{n=1}^{M-1}(a_nC_n + b_nS_n) + a_MC_M \right\}.$$

作用素 Λ_h を，基底 ω_j, $1 \le j \le N_0$ に関して行列表現したものを $\mathbf{\Lambda}$ としよう．すなわち，

$$\varphi_h = \sum_{j=1}^{N_0} \Phi(j)\omega_j \ \longleftrightarrow\ \mathbf{\Phi} = (\Phi(j))_{1\le j\le N_0}$$

のとき

$$\Lambda_h \varphi_h = \sum_{j=1}^{N_0} \Theta(j)\omega_j \longleftrightarrow \boldsymbol{\Theta} = (\Theta(j))_{1 \le j \le N_0}$$

とすると，

$$\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Phi} \tag{9}$$

である．

我々の計算法は次のようにまとめられる．

手順１． $(\mathbf{E_0})$ の離散化問題：

$$(\mathbf{E_{h0}}) \quad \begin{cases} a(u_{h0}, v_h) & = (f, v_h), \qquad v_h \in V_{h0}, \\ \quad u_{h0} & \in V_{h0} \end{cases}$$

を解く．

手順２．

$$\psi_h = \frac{\partial u_{h0}}{\partial n} \in X_h$$

と定める．

手順３． $(\mathbf{a_h})$ を解いて φ_h を定める．

手順４． $(\mathbf{E_1})$ の離散化

$$(\mathrm{e_{h1}}) \quad \begin{cases} a(u_{h1}, v_h) & = 0, \qquad v_h \in V_{h0}, \\ \quad u_{h1} & \in V_h, \\ \quad u_{h1} & = \varphi_h \quad \text{on} \quad \Gamma \end{cases}$$

を解く．

手順５． $u_{hi} = u_{h0} + u_{h1}$ として近接場 u_{hi} を求める．

ところで $(\mathbf{a_h})$ の解 φ_h と，$(\mathbf{E_{h1}})$ の解 u_{h1} をそれぞれ

$$\begin{aligned} \varphi_h &= \textstyle\sum_{j=1}^{N_0} \Phi(j)\omega_j, \\ u_{h1} &= \textstyle\sum_{j=1}^{N_0} \Phi(j)w_j + \sum_{j=N_0+1}^{N} U_1(j)w_j \end{aligned}$$

と表現し，

$$\mathbf{\Phi} = (\Phi(j))_{1\le j\le N_0}, \qquad \mathbf{U}_1 = (U_1(j))_{N_0+1\le j\le N}$$

とすると，これらは，連立一次方程式：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K_0}+\mathbf{\Lambda} & \mathbf{K_2^T} \\ \mathbf{K_2} & \mathbf{K_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{\Phi} \\ \mathbf{U}_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \mathbf{\Psi} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{10}$$

の解である．ここで ψ_h を

$$\psi_h = \sum_{j=1}^{N_0} \Psi(j)\omega_j \longleftrightarrow \mathbf{\Psi} = (\Psi(j))_{1\le j\le N_0}$$

と対応させた．

実際（１０）から

$$\mathbf{K_0\Phi} + \mathbf{\Lambda\Phi} + \mathbf{K_2^T U_1} + \mathbf{\Psi} = \mathbf{0}, \tag{11}$$
$$\mathbf{K_2\Phi} + \mathbf{K_1 U_1} = \mathbf{0} \tag{12}$$

が得られる．（１１）から $\mathbf{U_1}$ を消去すると,（７）によって,

$$\mathbf{A\Phi}+\mathbf{\Lambda\Phi}+\mathbf{\Psi} = \mathbf{0} \tag{13}$$

であり，これは（９）によって $(\mathbf{a_h})$ を意味している．（１２）は $(\mathbf{E_{h1}})$ を意味している．

したがって，計算法の手順において３）と４）の手順は同時に実行することが出来る．

この算法においては，フラックスの近似 ψ_h を必要とし，この精度が解の精度を支配することが予想される．手順１）での V_{h0} をより次数の高いラグランジ補間型空間などに置きかえることの有効性が示唆される．

図１は，４節で引用した Zlamal の曲要素を用いる有限要素近似の説明図である．この方法は，標準三角形 R_1, R_2, R_3 の上での基底関数を，写像 $\mathbf{x}(\xi)$ を使って，曲三角形 P_1, P_2, P_3 上での基底関数と合成して，定める手法である．写像 $\mathbf{x}(\xi)$ は，標準三角形 R_1, R_2, R_3 を曲三角形 P_1, P_2, P_3 の上へ一対一に写す写像で，領域の境界が円弧（の一部）である場合の曲三角形 P_1, P_2, P_3 における $\mathbf{x}(\xi)$ の定義は図中に示したようになる．

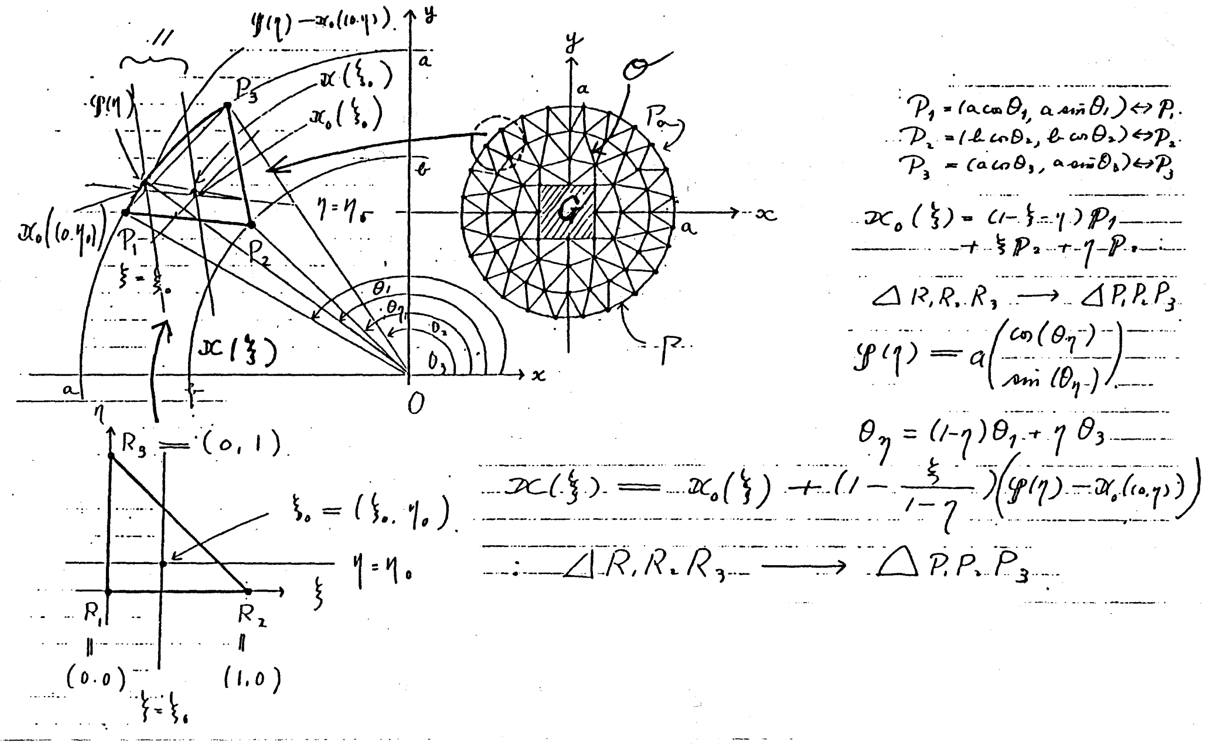

図１．Zlamal の曲要素を用いた O の三角形分割

６．誤差評価法の見とおし

問題 (a) の解 $\varphi\in D(A)\cap D(\Lambda)$ が存在するものと仮定し，さらに $(\mathrm{a_h})$ の解 φ_h の存在も仮定し，X のノルムでの誤差評価を得るための十分条件を求めて見る．問題 (a) と $(\mathrm{a_h})$ を次の形 (Λ) と (Λ_h) に書きかえる．

$$(\Lambda)\qquad \varphi+A^{-1}\Lambda\varphi+A^{-1}\psi=0,$$

$$(\Lambda_\mathrm{h})\qquad \varphi_h+A_h^{-1}\Lambda_h\varphi_h+A_h^{-1}\psi_h=0.$$

我々の作戦は次のようにまとめられる．

作戦１．$\tilde{\varphi}_h=P_h\varphi$ のみたす問題

$$\left(\tilde{\Lambda}_\mathrm{h}\right)\qquad \tilde{\varphi}_h+A_h^{-1}\Lambda_h\tilde{\varphi}_h+\tilde{\rho}_h=0$$

における非斉次項 $\tilde{\varphi}_h$ を求める．このとき，

$$e_h=\varphi_h-\tilde{\varphi}_h,$$
$$f_h=A_h^{-1}\psi_h-\tilde{\rho}_h$$

は，

$$(\varepsilon_h) \qquad \left(1 + A_h^{-1}\Lambda_H\right) e_h + f_h = 0$$

をみたす．

作戦２． h に依存しない定数 β があって

$$(14) \qquad \left\|\left(1 + A_h^{-1}\Lambda_h\right)\right\|_{L(X_h)} \leq \beta$$

となることを期待する．この期待が実現すれば，

$$\|e_h\|_{X_h} \leq \beta \|f_h\|_{X_h}$$

である．

作戦３． φ と ψ がしかるべき正則性の条件 (R) をみたすものとして，$\|f_h\|_{X_h}$ を h の関数で評価する．

作戦４． 条件 (R) が問題 (E) ではどのような場合にみたされるかを検討する．

これらの作戦に関して得られたささやかな結果を，本稿の主定理とする．

定理　作戦１にのべた f_h は，

$$\begin{aligned}
f_h &= f_h^1 + f_h^2 + f_h^3 + f_h^4, \\
f_h^1 &= \left(A_h^{-1} - P_h A^{-1}\right)(\Lambda\varphi + \psi), \\
f_h^2 &= A_h^{-1}(\psi_h + P_h\psi), \\
f_h^3 &= (P_h - 1)\varphi, \\
f_h^4 &= A_h^{-1} P_h \Lambda (Q_h P_h \varphi - \varphi)
\end{aligned}$$

と分解される．

証明　(Λ) の両辺に P_h を作用させると，

$$P_h\varphi + P_h A^{-1}\Lambda\varphi + P_h A^{-1}\varphi = 0.$$

$\tilde{\varphi}_h = P_h\varphi$ は，

$$\begin{aligned}
&\tilde{\varphi}_h + A_h^{-1}\Lambda_h\tilde{\varphi}_h + \tilde{\rho}_h = 0, \\
&\tilde{\rho}_h = -A_h^{-1}\Lambda_h\tilde{\varphi}_h + P_h A^{-1}\Lambda\varphi + P_h A^{-1}\varphi
\end{aligned}$$

をみたす．$\Lambda_h = P_h \Lambda Q_h$ であるから

$$\tilde{\rho}_h = -A_h^{-1} P_h \Lambda (Q_h P_h \varphi - \varphi) - \left(A_h^{-1} P_h \Lambda\varphi - P_h A^{-1} \Lambda\varphi\right) + P_h A^{-1} \psi$$

であり，したがって，

$$\begin{aligned} f_h &= A_h^{-1} \psi_h - \tilde{\rho}_h \\ &= A_h^{-1} P_h \Lambda (Q_h P_h \varphi - \varphi) && + \left(A_h^{-1} P_h - P_h A^{-1}\right) \Lambda\varphi \\ &\quad + A_h^{-1} \psi_h && - P_h A^{-1} \psi \\ &= A_h^{-1} P_h \Lambda (Q_h P_h \varphi - \varphi) && + \left(A_h^{-1} P_h - A^{-1}\right) \Lambda\varphi \\ &\quad + (1 - P_h) A^{-1} \Lambda\varphi && + A_h^{-1} (\psi_h - P_h \psi) \\ &\quad + \left(A_h^{-1} P_h - A^{-1}\right) \psi && + (1 - P_h)^{-1} A^{-1} \psi. \end{aligned}$$

最右辺の第 2 項と第 5 項，第 3 項と第 6 項をそれぞれまとめると，

$$\begin{aligned} f_h &= A_h^{-1} P_h \Lambda (Q_h P_h \varphi - \varphi) && + \left(A_h^{-1} P_h - A^{-1}\right) (\Lambda\varphi + \psi) \\ &\quad + (1 - P_h) A^{-1} (\Lambda\varphi + \psi) && + A_h^{-1} (\psi_h - P_h \psi) \\ &= f_h^4 + f_h^1 + f_h^3 + f_h^2 \end{aligned}$$

である．ただし f_h^3 においては $\Lambda\varphi + \psi = -A\varphi$ を代入した．

定理の系

（１）　ある評価関数 $\varepsilon(h)$ があって，

$$\left\|\left(A_h^{-1} P_h - A^{-1}\right)\right\|_{L(X)} \leq \varepsilon(h)$$

ならば，

$$\left\|f_h^1\right\| \leq \varepsilon(h) \left\|\Lambda\varphi + \psi\right\|.$$

（２）　ある h に依存しない定数 α があって，

$$\left\|A_h^{-1}\right\|_{L(X_h)} \leq \alpha^{-1}$$

ならば

$$\left\|f_h^2\right\| \leq \alpha^{-1} \left\|\psi_h - P_h \psi\right\|.$$

（３）　$\left\|f_h^3\right\| = \left\|(P_h - 1) \varphi\right\|.$

（４）　ある h に依存しない定数 $\tilde{\alpha}$ があって，

$$\left\|A_h^{-1} P_h\right\| \leq \tilde{\alpha}^{-1}$$

ならば,

$$\left\|f_h^4\right\| \leq \tilde{\alpha}^{-1}\left\|\Lambda\left(Q_h P_h \varphi - \varphi\right)\right\|.$$

まとめ

外部領域問題を離散的に解く，ある有限要素−スペクトル結合解法の算法を提示した．

その算法の収束性に関する若干の考察を行った．楽観的な期待（１４）を除けば，収束のために十分な条件をみたす近似作用素 P_h と Q_h を例示することはできることと思われる．（１４）の証明の方針は現時点では著者には明かではない.（１４）は近似法が収束するための殆ど必要条件でもあろうから，この手法が収束するものならば,（１４）は証明されてしかるべきものである．本稿は，楽観的な期待のまま筆を置かざるを得ない．

同一の，あるいは類似の問題は，既に多数とりあつかわれている．例えば，Johnson−Nedelec［２］，Hariharan のサーベイ報告［１］，瀬戸［３］などがある．これらの手法を，我々の境界作用素係数方程式の近似という観点から見直してみたいと希望している．

文献

［１］Hariharan, S. I., Absorbing boundary conditions for exterior problems, in Numerical Methods for Partial Differential Equations, (Pitman research nots in mathematics series, 145) 199-232 Chapter 6, Edited by Hariharan, S. I., and Moulden, T. H., Longman Scientific & Technical (1986).

［２］Johnson, C., and Nedelec, J. C., On the coupling of boundary integral and finite element methods, Math. Comp., 35, 1063–1079 (1980).

［３］瀬戸秀幸，スカラ−-ポテンシャル場における開境界条件とその応用，第７回環瀬戸内Ｃ＆Ａ研究会　SUMMER SEMINAR　発表論文，於宇部，1989 年７月 14 日，15 日.

［４］Stekloff, W., Sur la théorie des fonctións foundamentals, C. R. Acad. Paris, 128, N° 16, 984-987 (1899).

「５」牛島照夫，松木美保子，青木篤，水の波の線形問題について，数理解析研究所講究録 691，97-125 (1989).

［６］Ushijima, T., Finite element analysis of linear water wave problem, Report CSIM No12 Department of Computer Science and Information Mathematics, The University of Electro–Communications (1990).

［７］Zlamal, M., Curved elements in the finite element method. I, SIAM J. Numer. Anal., 10, No.1, 229-240 (1973).