

平均曲率一定の曲面の安定性

電気通信大学 小林 昭彦(Akihiko Kobayashi)

電気通信大学 渡辺 二郎(Jiro Watanabe)

0. はじめに

図0.1のような容器に気体が詰められているとする。

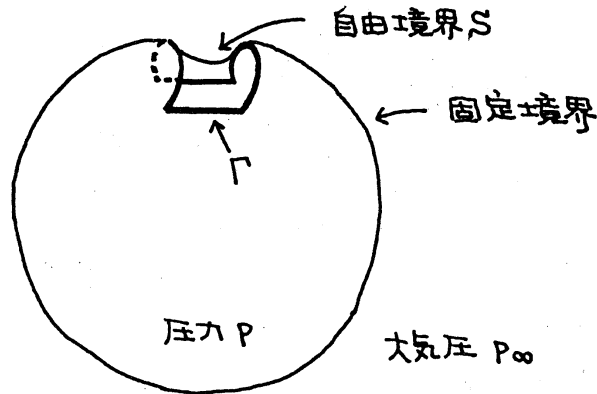


図0.1

容器の壁は固定境界の部分と薄い膜からできている自由境界の部分からなるものとする。薄膜 S の表面張力が一様であるとすれば、 S は容器の口の半径 r に張られる平均曲率一定の曲面である。また、この平均曲率は容器の内部と外部の圧力差 $p_\infty - p$ に比例する。

容器の外部の圧力 p_∞ は一定であるとし、容器の内部の圧力 p をゆっくり変化させる。このとき、境界面は安定な状態をたどって変化するものとする。

容器の口の半径が適当な形であるとき、ある圧力差のところでは境界面 S は不連続的に変化することが数値計算の結果として示される(図6.3-4と図8.3-4参照)。このことについて報告する。

注意 本稿では平均曲率一定の曲面の安定性を論ずるが、曲面が安定であるとか不安定であるとかいうのは、どのような物理系で考えるかに依存する。したがって、同一の曲面でも、考える自由エネルギーを変えれば安定にも不安定にもなりうる。すなわち、曲面の安定性は曲面が本来もっている性質ではない。

1. 与えられた「体積」をもつ平均曲率一定の曲面

3次元空間内にひとつのJordan閉曲線 Γ が与えられている。 Γ に張られる曲面 S があり、そのパラメータ表現のひとつを x とする。すなわち

$$x: \overline{B} = \{ u^2 + v^2 \leq 1 \} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \text{ はなめらかで1対1であり,}$$

$$x_u \times x_v \neq 0,$$

$$x(\overline{B}) = S,$$

$$x|_{\partial B} \text{ は } \Gamma \text{ のパラメータ表現である}$$

とする。

便宜上、曲面 S というべきところを x ということがある。本稿ではとくにことわらないかぎり、曲面といえば Γ に張られているものとする。さらに記号として

$$a(x) = S \text{ の面積,}$$

$$v(x) = \frac{1}{3} \int_S x \cdot n dS \quad (S \text{ (または } x) \text{ の体積) .} \quad (1.1)$$

を定義する。ここで n は S の単位法線ベクトルである。

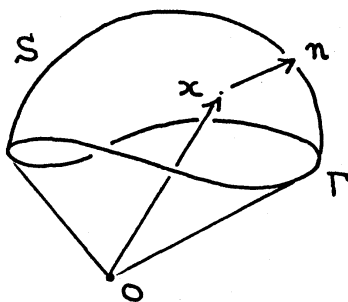


図1.1

H.C.Wente[12]とK.Steffen[8]は、任意の $V \in \mathbb{R}$ に対して、 Γ に張られる曲面 x で $v(x) = V$ をみたすもののなかに面積 $a(x)$ を最小にするものがあることを示した。この曲面を $x(V)$ とかく：

$$a(x(V)) = \min_{v(x)=V} a(x). \quad (1.2)$$

この曲面 $x(V)$ の平均曲率 $H(V)$ は一定である。

各 $V \in \mathbb{R}$ に対して曲面 $x(V)$ とその平均曲率 $H(V)$ を数値計算で求めることを考える。

注意 上記のようにWente[12]とSteffen[8]は、与えられた体積をもつ曲面のう

ちで面積最小のものを求めることにより平均曲率一定の曲面を求めた。しかし他の多くの存在定理は、与えられた平均曲率をもつ曲面を求める([1],[4],[9],[10],[11]など)。このとき平均曲率の絶対値が十分小さくなければ、これを平均曲率とする曲面は存在しない([3],[4],[11]など)。

2. 数値計算の方法

条件 $v(x)=V$ のもとで面積 $a(x)$ を最小とするような曲面 x を求める。この極値問題に対するLagrangianは

$$\varphi(x, H) = a(x) + 2H[v(x) - V]$$

である。

φ の停留点 (x, H) を求めたい。

そのためにLagrangian φ の代わりにaugmented Lagrangian

$$\psi(x, H) = \varphi(x, H) + r \cdot [v(x) - V]^2, \quad r > 0$$

を考え、 ψ の停留点を宇沢アルゴリズムで求める[2]。

ψ の停留点 (x_0, H_0) は

$$(P) \begin{cases} \nabla_x \psi(x_0, H_0) = \nabla_x a(x_0) + 2\{H_0 + r[v(x_0) - V]\} \nabla_x v(x_0) = 0, \\ \nabla_H \psi(x_0, H_0) = 2[v(x_0) - V] = 0 \end{cases}$$

をみたすものであるから、これから容易に φ と ψ の停留点が同一であることがわかる。

ψ は x に関して下に有界であり、次の定理がなりたつ。

定理 任意の $H \in \mathbb{R}$ と正の r に対して Γ に張られる曲面 x_0 で

$$\psi(x_0, H) = \min_x \psi(x, H) \tag{2.1}$$

をみたすものが存在する。このとき、 x_0 の平均曲率は

$$H + r[v(x_0) - V]$$

である。

この最小化問題を数値的に解くには、例えば共役勾配法(Fletcher-Reeves法)や準Newton法(Davidon-Fletcher-Powell法)といった反復解法を用いればよい[7]。

ψ の停留点を求める問題(P)を解くために宇沢アルゴリズムを用いる。

宇沢アルゴリズム

(1) $H_0 \in \mathbb{R}$ を求める。

(2) $H_n \in \mathbb{R}$ が与えられたとき,

$$\begin{cases} \psi(x_n, H_n) = \min_x \psi(x, H_n), \\ H_{n+1} = H_n + r[v(x_n) - V] \end{cases}$$

によって x_n と H_{n+1} を求める.

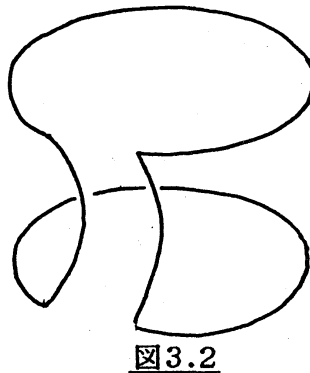
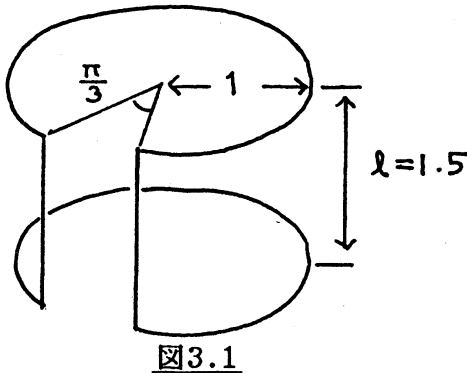
このようにして得られる列 (x_n, H_n) が $n \rightarrow \infty$ のとき収束すれば, その極限 (x_∞, H_∞) は, $v(x_\infty) = V$ をみたしていれば, 問題(P)の解であることを証明することができる.

3. 数値計算結果の概要

Jordan閉曲線 Γ として図3.1の枠を考える.

この枠に張られる極小曲面は, $1.40 < \ell < 1.53$ のとき3種類あるが, [5]ではこれらのうちの2種類を数値計算で求めている.

この枠に近い形のものが図3.2の枠である. Γ の線分の部分をcatenaryでおきかえたものである. Wienerはこの枠($1.0554 < \ell < 1.3254$ の範囲で, 適当な開き角の場合)に少なくとも2つの極小曲面が張られることを注意した[6]. このことに因んで図3.1の枠を, ここではWiener枠と呼ぶことにする.



問題(P)を数値的に解くことにより, 問題(1.2)の解である曲面 $x(V)$ とその平均曲率 $H(V)$ が求められた. 関数 $V \mapsto a(x(V))$ と $V \mapsto H(V)$ の計算結果のグラフが図3.3と図3.4である.

これから $da(x(V))/dV = -2H(V)$ がなりたつことが読み取れるが, このことは, 微分可能性があれば, 証明することができる.

以後, 本稿では $x(V), H(V)$ は V に関して微分可能であると仮定する.

求められた曲面 $x(V)$ が汎関数

$$\varphi(x, H(V)) = a(x) + 2H(V) \cdot v(x)$$

の極小を与える点かどうかを数値実験で確かめてみた。すなわち $x(V)$ を出発点として勾配法によって $\varphi(x, H(V))$ がより小さい値をとる点をたどらせたが、その軌跡は

1) $H'(V) < 0$ のときは、出発点 $x(V)$ から動かなかつた。したがって $x(V)$ は $\varphi(x, H(V))$ の極小点であることが数値的に確かめられた。

2) $H'(V) > 0$ のときは、出発点 $x(V)$ からしだいにはずれていった。したがって $x(V)$ は $\varphi(x, H(V))$ の鞍点であることが数値的に確かめられた。

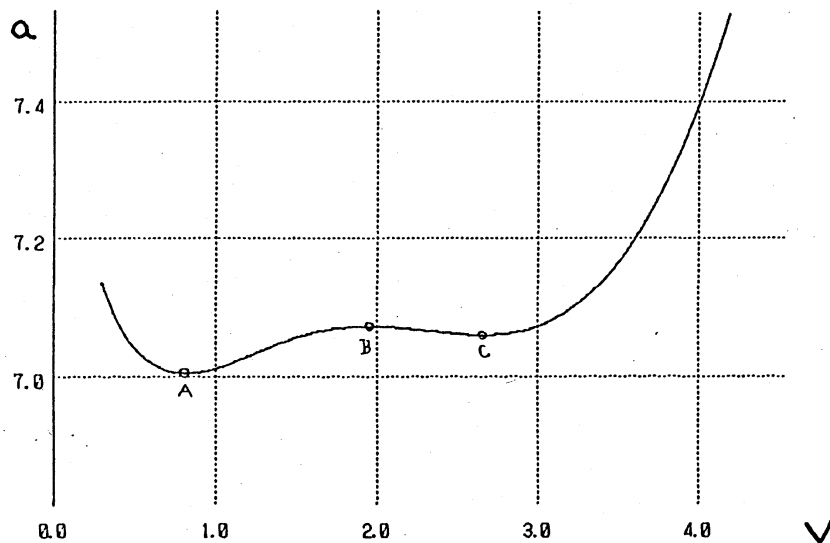


図3.3 $a = a(x(V))$ のグラフ

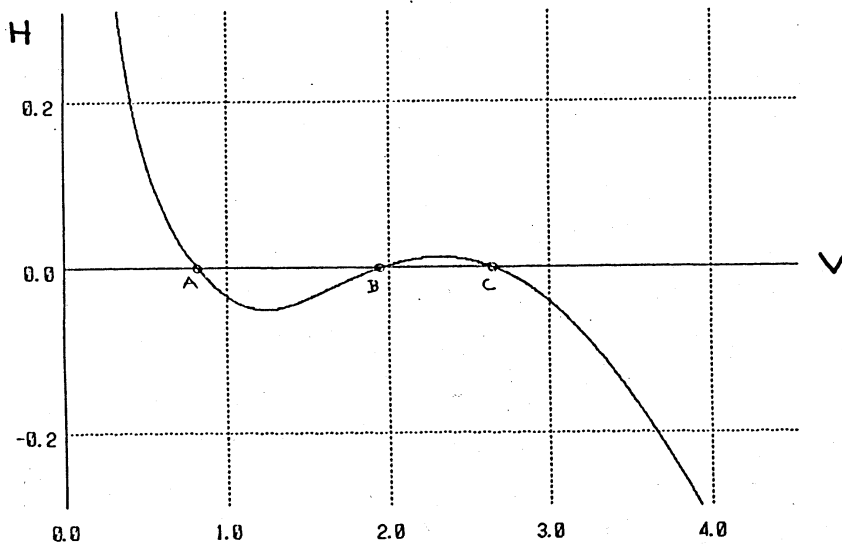


図3.4 $H = H(V)$ のグラフ

4. 境界面の安定性

いま考えている物理系において温度は一様かつ一定であるとする。系のエネルギー変化は、自由境界面 S の面積と位置が変化することによって引き起こされるものとする。したがって系のエネルギーの変化する部分は

$$\alpha \cdot a(x) + (p_\infty - p)v(x) \left[= \alpha \cdot \varphi(x, H_*) , H_* = \frac{p_\infty - p}{2\alpha} (\text{一定}) \right]$$

である。第1項の増加は、表面張力に逆らう仕事によって引き起こされ、第2項の増加は圧力差に逆らう仕事によって引き起こされる。

この系の平衡状態は

$$\nabla_x \varphi(x_0, H_*) = 0 \quad (4.1)$$

をみたすような x_0 であり、この状態 x_0 が安定か不安定かは、 $x=x_0$ が $\varphi(x, H_*)$ の極小点であるか鞍点であるかである。

曲面 $x(V)$ とその平均曲率 $H(V)$ は(4.1)をみたすが、 $V=V_0$ において

$$\frac{dH}{dV}(V_0) < 0 \quad (\text{又は} > 0)$$

ならば、 $x(V_0)$ は安定(又は不安定)である。すなわち $x(V_0)$ は $\varphi(x, H(V_0))$ の極小点(又は鞍点)である。

証明

$$f(V) = \varphi(x(V), H(V_0)) = a(x(V)) + 2H(V_0) \cdot V$$

とおく。このとき

$$f'(V_0) = -2H(V_0) + 2H(V_0) = 0,$$

$$f''(V_0) = -2H'(V_0)$$

がなりたつ。したがって $H'(V_0) < 0$ ならば、 V が V_0 に十分近いとき

$$f(V) \geq f(V_0).$$

したがって V が V_0 に十分近く、かつ $v(x)=V$ であるとき、

$$\varphi(x, H(V_0)) \geq \varphi(x(V), H(V_0)) \geq \varphi(x(V_0), H(V_0)).$$

がなりたち、 $x(V_0)$ の近傍として、十分小さい $\delta > 0$ に対して、 $\{x: |V(x) - V_0| < \delta\}$ をとれば、ここで $\varphi(x, H(V_0))$ は $x=x(V_0)$ で極小となる。

逆に $H'(V_0) > 0$ ならば、 V が V_0 に十分近いとき

$$f(V) < f(V_0), \quad V \neq V_0$$

であるから、 V が V_0 に十分近く、かつ $v(x)=V_0$ であれば、

$$\varphi(x(V), H(V_0)) \leq \varphi(x(V_0), H(V_0)) \leq \varphi(x, H(V_0))$$

がなりたつ。これは、 $x=x(V_0)$ が鞍点であることを意味する。

注意 上記の結論が数値計算の結果と一致することは前節で述べた通りである。

5. 最小固有値の符号

いま、曲面 S_0 の平均曲率 H_0 が一定であるとする

$$\nabla_x \varphi(x_0, H_0) = 0 \quad (5.1)$$

$$\nabla_x^2 \varphi(x_0, H_0)(\xi, \xi) = \int_{S_0} \xi \cdot L\xi dS \quad (5.2)$$

がなりたつ。ここで x_0 は S_0 のパラメータ表現であり、

$$L\xi = -\Delta\xi - 2(2H_0^2 - K_0)\xi,$$

Δ は S_0 上のLaplace-Beltrami作用素、 K_0 は S_0 のガウス曲率である。 ξ は S_0 上の法線方向外向きの変位を表す滑らかな実数値関数で Γ 上では0であるとする。

次の固有値問題を考える：

$$\begin{cases} S_0 \text{ 上で } L\xi = \lambda\xi, \\ \Gamma \text{ 上で } \xi = 0. \end{cases}$$

この問題のスペクトル集合は実固有値の列

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \rightarrow \infty$$

であり

$$\lambda_1 = \min \left\{ \int_{S_0} \xi \cdot L\xi dS; \int_{S_0} \xi^2 dS = 1 \right\} \quad (5.3)$$

である。曲面 $x(V)$ 上の L の最小固有値 λ_1 について

$$H'(V) < 0 \text{ (又は } > 0) \text{ ならば } \lambda_1 \geq 0 \text{ (又は } < 0)$$

がなりたつ。

証明 $H'(V) < 0$ のとき、前節の結果から $v(x)$ が V に十分近いとき

$$\varphi(x, H(V)) \geq \varphi(x(V), H(V))$$

であるから、(5.1-2)により

$$\int_{S_0} \xi \cdot L\xi dS = \nabla_x^2 \varphi(x(V), H(V))(\xi, \xi) \geq 0.$$

したがって、(5.3)から $\lambda_1 \geq 0$ である。

次に

$$\xi(V) = \frac{dx(V)}{dV} \cdot n \quad (n \text{ は } x(V) \text{ の単位法線ベクトル}) \quad (5.4)$$

とおけば,

$$\nabla_x^2 \varphi(x(V), H(V))(\xi(V), \zeta(V)) = -2H'(V) \quad (5.5)$$

であるから, $H'(V) > 0$ のときは上の等式と(5.2)から

$$\int_{S(V)} \xi(V) \cdot L\xi(V) dS < 0.$$

したがって(5.3)から $\lambda_1 < 0$ である.

6. Wienerの枠に張られる境界面の安定性

第4節の結果を枠がWiener枠である場合に適用する.

いま考えている物理系(図0.1)の温度は一様で一定であるとする. 容器外部の圧力 p_∞ は一定であるとする. 容器内部の圧力 p をゆっくり変化させるときの自由境界 S の形の変化を調べる. 容器の体積は十分大きくて, S の形の変化に伴う容器内部の圧力 p の変化はないものとする.

容器内部の圧力が p であるとき, 境界面 S は平均曲率一定の曲面であり, その平均曲率は

$$H = (p_\infty - p) / 2\alpha$$

である. この曲面には曲線 $H = H(V)$ 上の1点 $(V, H(V))$ が対応する.

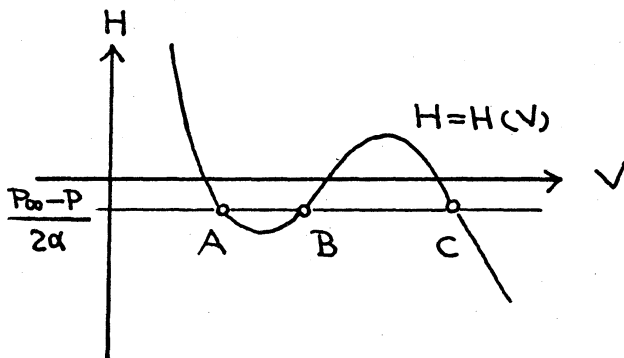


図6.1

もし図6.1のように3点A, B, Cで条件

$$H(V) = (p_\infty - p) / 2\alpha$$

をみたすならば, 点Bでは $H'(V) > 0$ であり, 対応する曲面は不安定であるので, このような曲面はいま考えている系において現れることはない.

点A,Cでは $H'(V) < 0$ であり、対応する曲面は安定であるので、このような曲面は現れることになる。

いま容器内部の圧力 p を p_0 から p_2 まで徐々に増加させると、境界面 S に対応する点は A_0 から A_2 まで進み、さらに p を増加させると S に対応する点は A_2 から C_2 に移り、そこから C_3 の方向に進む(図6.2, 図6.4)。

逆に容器内部の圧力 p を p_3 から p_1 まで減少させれば、境界面に対応する点は C_3 から C_1 まで進み、さらに p を減少させれば、 S に対応する点は C_1 から A_1 に移り、そこから A_0 の方向に進む(図6.3)。

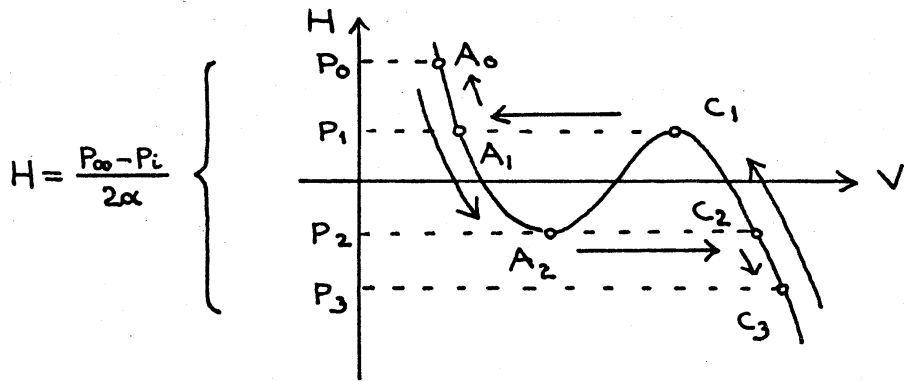


図6.2

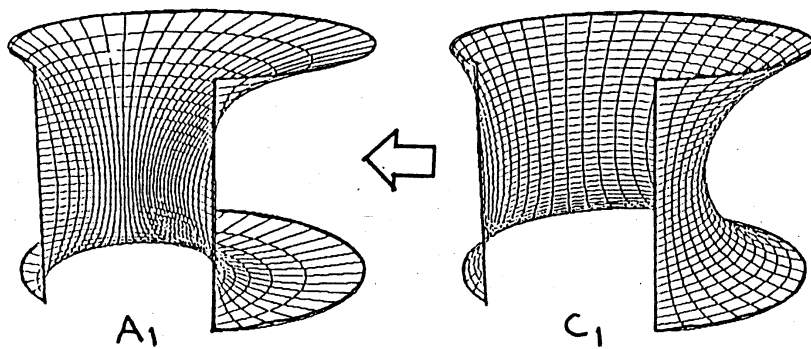


図6.3

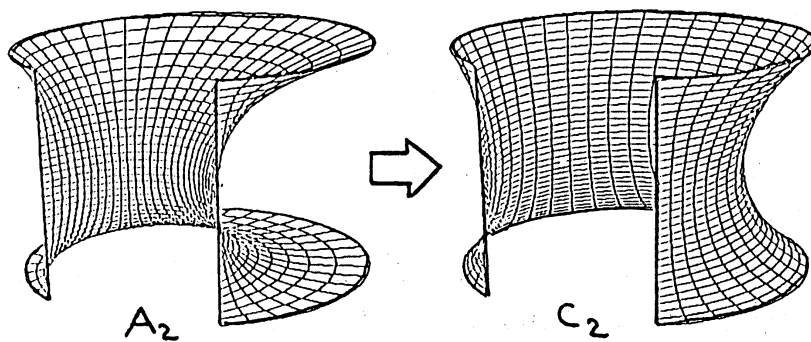


図6.4

7. 容器の体積が比較的小さい場合の境界面の安定性

図0.1のような容器に気体が入っているとす。容器の壁は固定境界の部分と自由境界 S の部分からなり、 S は薄膜でできていて、その表面張力は一様であるとする。

S の境界 Γ は変化しないとする。容器内部の気体の圧力、体積、モル数をそれぞれ p , V, ν とし、容器外の気体の圧力 p_∞ はつねに一定とする。容器内外の気体の温度は一様で一定とする。

モル数 ν が一定であるとして、 S を法線方向外向きに ξ だけ変化させたときの自由エネルギー F の第1変分は

$$\nabla_x F(\xi) = -2\alpha \int_S H \xi dS + (p_\infty - p) \int_S \xi dS \quad (7.1)$$

である。ここで α は境界面 S の表面張力係数であり、 H は S の平均曲率(曲率の中心が容器の外側にあるとき曲率は正)とする。

(7.1)の右辺の第1項は、 S の面積変化に伴う仕事であり、第2項は体積 V の変化に伴うものである。平衡状態は

$$\nabla_x F = 0$$

で与えられる。(7.1)から

$$\nabla_x F = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p_\infty - p = 2\alpha H.$$

いま平衡状態にある曲面を S_0 、そのパラメータ表現を x_0 とする。

この節では、容器内の気体のモル数 ν は一定であるとする。容器内の圧力 p はその体積 V だけの関数であるとし、

$$p = \nu RT / V \quad (R \text{は気体定数}) \quad (7.2)$$

がなりたつものとする。すなわち容器内の気体は理想気体で温度は変化しないとする。

いま

$$\overline{H}_\nu(V) = \frac{p_\infty - \nu RT / V}{2\alpha}$$

とおく。条件(7.2)のもとでは

$$p_\infty - p = 2\alpha \overline{H}_\nu(V)$$

である。条件(7.2)のもとで x_0 における F の第2変分は

$$\begin{aligned} \nabla_x^2 F(\xi, \xi) = & \alpha \int_{S_0} (\xi L \xi + 4H_0^2 \xi^2) dS + 2\alpha \overline{H}'_\nu(V_0) \cdot \left(\int_{S_0} \xi dS \right)^2 \\ & + 2\alpha \overline{H}'_\nu(V_0) \left(-2 \int_{S_0} H_0 \xi^2 dS \right) \end{aligned}$$

$$= \alpha \int_{S_0} \zeta \cdot L \zeta dS + 2\alpha \overline{H}'_\nu \cdot \left(\int_{S_0} \zeta dS \right)^2 \quad (7.3)$$

ここで $V_0 = v(x_0)$, $p_0 = \nu RT / V_0$, $\overline{H}'_\nu(V_0) = (p_\infty - p) / 2\alpha = H_0$ である。

いま, とくに ζ として (5.4) の $\zeta(V)$ をとる. (7.3) において x_0, S_0, V_0, H_0 はそれぞれ $x(V), S(V), V, H(V)$ である. (5.2) と (5.5) に注意すれば, (7.3) から

$$\nabla_x^2 F(\zeta(V), \zeta(V)) = 2\alpha [\overline{H}'_\nu(V) - H'(V)]$$

がわかる.

またさらに条件 (7.2) のもとでは, (7.1) から

$$F(x) = \alpha \cdot a(x) + p_\infty v(x) - \nu RT \cdot \log v(x) + \text{const}$$

であることがわかる.

以上のことから

$$\frac{dF(x(V))}{dV} = \alpha \cdot \frac{da(x(V))}{dV} + p_\infty - \frac{\nu RT}{V} = -2\alpha H(V) + 2\alpha \overline{H}'_\nu(V) = 0,$$

$$\frac{d^2F(x(V))}{dV^2} = \alpha \cdot \frac{d^2a(x(V))}{dV^2} + \frac{\nu RT}{V^2} = -2\alpha H'(V) + 2\alpha \overline{H}'_\nu(V)$$

がわかる. したがって

$$\overline{H}'_\nu(V) - H'(V) < 0$$

であるとき, 条件 (7.2) のもとで F は $x = x(V)$ において極小とはならない. 逆に

$$\overline{H}'_\nu(V) - H'(V) > 0$$

であるときは, V_1 が V に十分近いとき

$$F(x(V_1)) \geq F(x(V))$$

であり, また $v(x) = V_1$ であるとき

$$F(x) \geq F(x(V_1))$$

であるから, $v(x)$ が V に十分近いときつねに

$$F(x) \geq F(x(V))$$

がなりたつ. すなわち条件 (7.2) のもとで F は $x = x(V)$ において極小である.

8. Wiener 枠に張られる境界面 (容器の体積が比較的小さい場合)

容器の口の枠が Wiener 枠である場合に前節の結果を適用する.

図 8.1 の点 A, C では

$$\overline{H}'_\nu(V) - H'(V) > 0$$

であるから, A, C に対応する曲面は安定であり, 点 B では

$$\overline{H}'_v(V) - H'(V) < 0$$

であるから、 B に対応する曲面は不安定である。ただし条件(7.2)がつねになりつつよ
うな変化に関する安定性である。

いま容器内部の気体のモル数をゆっくり変化させる過程を考える。温度は一様で一
定であるとし、条件(7.2)が成り立つものとする。

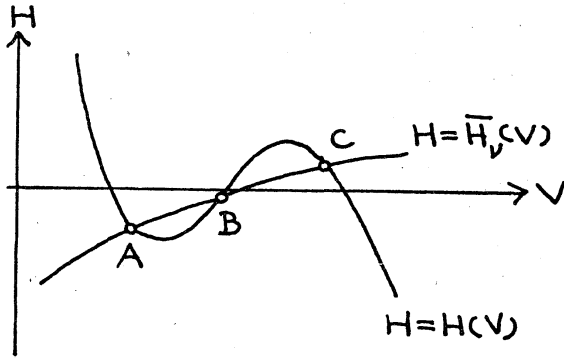


図8.1

図8.2において ν が ν_0 から ν_2 まで徐々に増加していけば、曲面に対応する点は A_0 から
 A_2 に徐々に変化していく。 ν を ν_2 からさらに増加させれば、 S に対応する点は A_2 から C_2
に移る(図8.3)。さらに ν を増加させれば、 S に対応する点は C_2 から C_3 の方向に進む。
逆に ν を ν_3 から減少させるときは、 S に対応する点は $C_3 \rightarrow C_1 \rightarrow A_1 \rightarrow A_0$ と進む(図8.4)。

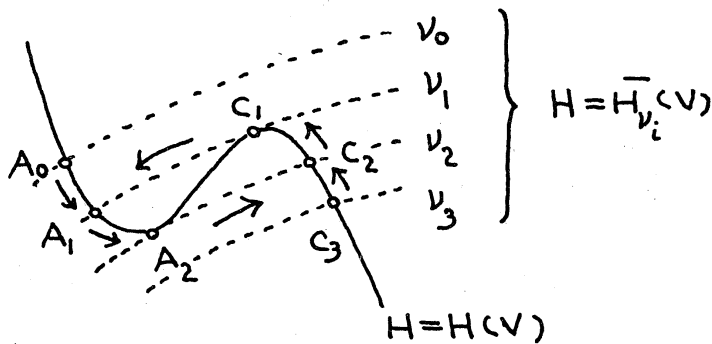


図8.2

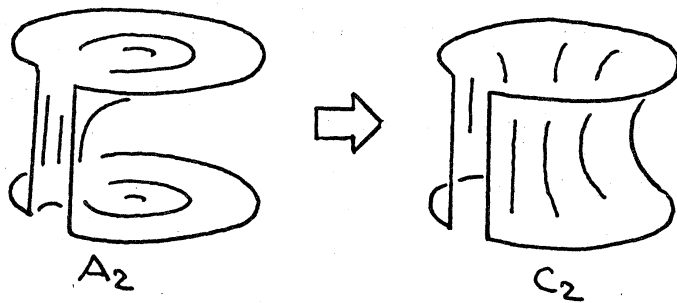


図8.3

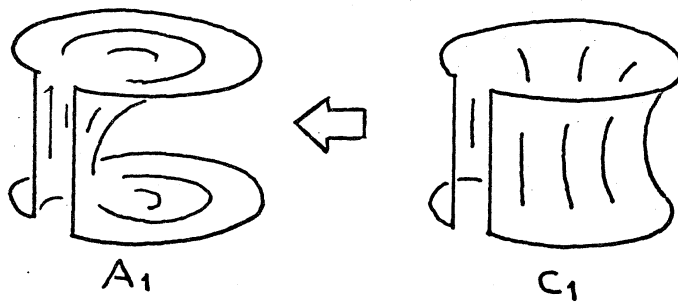


図8.4

9. シャボン玉の安定性

枠 Γ は円周とする．原点を Γ の中心にとって体積 V を定義すれば，曲線 $H=H(V)$ は図9.1のようになる．

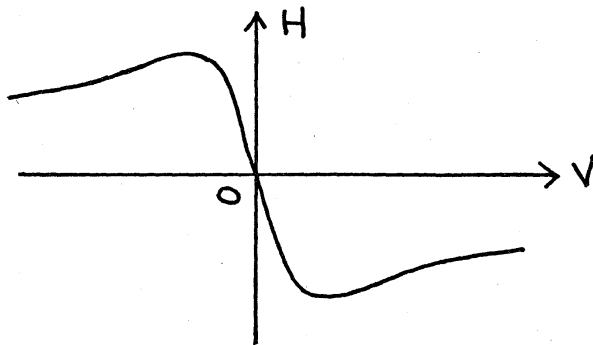


図9.1

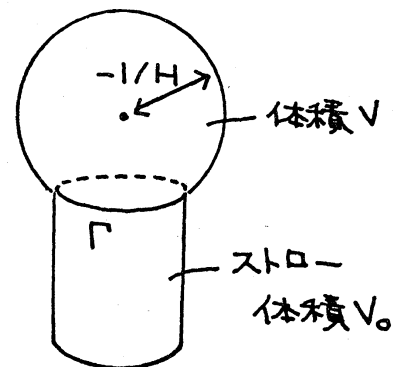


図9.2

石鹸膜とストローからなる図9.2のような系を考える．この系においては石鹸膜が自由境界であり，ストローとその底面が固定境界である．温度 T は一様かつ一定とする．内部の体積は $V+V_0$ ，気体のモル数は ν とする．

関数

$$H = \bar{H}_\nu(V) = \frac{1}{2\alpha} \left(p_\infty - \frac{\nu RT}{V_0 + V} \right)$$

のグラフを図9.1の中にかきこめば、図9.3のようになる。

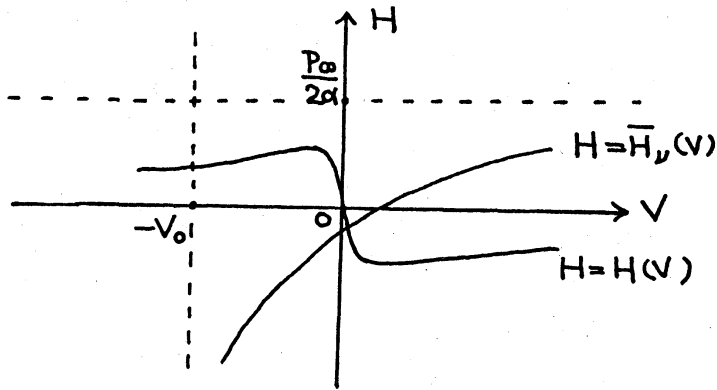


図9.3

図9.3からわかるように2つの曲線 $H = H(V)$ と $H = \bar{H}_\nu(V)$ の交点において

$$\bar{H}'_\nu(V) > H'(V)$$

であるから、この交点に対応する境界面は第7節の結果により安定である。したがって円形枠に張られる石鹸膜は常に安定である。

次に球形のシャボン玉の安定性について示す。シャボン玉の半径を r 、体積を V 、平均曲率は $H = H(V) = -1/r$ であるとする。シャボン玉内部の圧力は $p = \nu RT/V$ である。

$$\bar{H}_\nu(V) = \frac{1}{2\alpha} \left(p_\infty - \frac{\nu RT}{V} \right)$$

を V で微分して

$$\bar{H}'_\nu(V) = \frac{\nu RT}{2\alpha V^2} = \frac{p}{2\alpha V}$$

を得る。一方

$$H'(V) = \frac{1}{4\pi r^4} = -\frac{H}{3V}$$

であり、 $H = (p_\infty - p)/2\alpha$ であるから

$$H'(V) = \frac{p - p_\infty}{6\alpha V}$$

したがって

$$\overline{H}'_v(V) - H'(V) = \frac{2p + p_\infty}{6\alpha V} > 0$$

となりシャボン玉は安定である。

文献

- [1] H.Brézis, J.M.Coron: Multiple solutions of H-systems and Rellich's conjecture, *Comm. Pure Appl. Math.* 37(1984), 149-187.
- [2] M.Fortin, R.Glowinski: Augmented Lagrangian methods, applications to the numerical solution of boundary-value problems, Amsterdam, North-Holland, 1983.
- [3] E.Heinz: On the nonexistence of a surface of constant mean curvature with finite area and prescribed rectifiable boundary, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 35(1969), 249-252.
- [4] S.Hildebrandt: On the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature, *Comm. Pure Appl. Math.* 23(1970), 97-114.
- [5] M.Hinata, M.Shimasaki, T.Kiyono: Numerical solution of Plateau's problem by a finite element method, *Math. Comp.*, 28(1974), 45-60.
- [6] J.C.C.Nitsche: Lectures on minimal surfaces, Vol.1, Cambridge Univ. Press, 1989.
- [7] 坂和 正敏: 非線形システムの最適化, 森北出版, 1986.
- [8] K.Steffen: Flächen konstanter mittlerer Krümmung mit vorgegebenem Volumen oder Flächeninhalt, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 49(1972), 99-128.
- [9] K.Steffen: On the nonuniqueness of surfaces with prescribed constant mean curvature spanning a given contour, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 94(1986), 101-122.
- [10] M.Struwe: Large H-surfaces via the mountain-pass-lemma, *Math. Ann.* 270(1985), 441-459.
- [11] M.Struwe: Plateau's problem and the calculus of variations, *Math. Notes* 35, Princeton Univ. Press, 1988.
- [12] H.C.Wente: A general existence theorem for surfaces of constant mean curvature, *Math. Z.* 120(1971), 277-288.